Groupe de travail sur la correspondance de Langlands géométrique en caractéristique $p > 0$

Le but de ce groupe de travail est de lire l'article [BB07], dans lequel Bezrukavnikov et Braverman établissent une variante en caractéristique p de la correspondance de Langlands géométrique globale sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, ils traitent le cas de $GL(n)$, et « au dessus du lieu lisse ». Le cas d'un groupe (semi-simple) quelconque (mais toujours au-dessus du lieu lisse) fait l'objet d'un travail récent de Chen et Zhu [CZ14]. Une généralisation au « lieu intègre » (mais seulement pour $GL(n)$) a été obtenue par Groechening dans [Gr15].

Il y aura trois séances (compter environ 2h par exposé), qui auront toutes lieu en **salle B407** :

— **Jeudi 7 janvier 2016, 13h :** Exposé 1 (Lawrence Breen) et Exposé 2 (Sylvain Brochard)

— **Mardi 12 janvier 2016, 13h :** Exposé 3 (Cédric Pépin) et Exposé 4 (Niels Borne)

— **Vendredi 29 janvier 2016, 13h30 :** Exposé 5 (Benoît Stroh)

Le programme est le suivant. L'équivalence que l'on veut montrer va se décomposer en une suite d'équivalences

$$D^b(\mathcal{D}_{\mathrm{Bun}_n^0}) \simeq D^b(\mathcal{Y}_{\mathcal{D}_{\mathrm{Bun}_n^0}})_1 \simeq D^b((\mathcal{Y}_{\mathcal{D}_{\mathrm{Bun}_n^0}})_1^\vee) \simeq D^b(\mathrm{Loc}_n^0).$$

La première fait l'objet de l'exposé 1, et la deuxième de l'exposé 2 ; elles sont valables pour une algèbre d'Azumaya quelconque, pas nécessairement $\mathcal{D}_{\mathrm{Bun}_n^0}$. On introduit $\mathcal{D}_{\mathrm{Bun}_n^0}$ dans l'exposé 3, puis on établit la troisième équivalence dans l'exposé 4. On montre enfin dans l'exposé 5 que l'équivalence composée possède la bonne propriété de Hecke. Plus en détails :

Exposé 1 : $\mathbb{G}_m$-gerbes et algèbres d'Azumaya. Le but de l'exposé est d'introduire les notions de champ, gerbe et algèbre d'Azumaya, rappelées seulement rapidement dans [BB07] paragraphes 2.1, 2.2 et 2.3, et de démontrer le lemme 2.3. Ce lemme est également énoncé dans [CZ14] B.1, et la référence pour une démonstration détaillée est [DP2] §2.1.2.

Exposé 2 : Champs en groupes commutatifs et transformée de Fourier-Mukai. On introduira la notion de champ en groupes commutatifs (=champ de Picard), puis celle de 1-motif de Beilinson, et on énoncera le théorème d'isomorphisme de Fourier-Mukai pour ceux-ci : [CZ14] A.1-A.3.5, [BB07] 2.4-2.7 et [DP2] Appendice (voir aussi [SGA 4] Exposé XVIII pour la notion de champ de Picard) ; on pourra donner très brièvement l'idée de la preuve dans le cas des schémas abéliens : [H06] 9.19 (et [M81] pour l'approche originale de Mukai). On présentera ensuite la dualité pour les torseurs sous un 1-motif de Beilinson, dans le but d'énoncer la variante tordue de l'isomorphisme de Fourier-Mukai : [CZ14] A.4-A.6.2, [BB07] 2.8-2.9 et [DP2] Appendice ; on expliquera comment on déduit cette variante de l'isomorphisme de Fourier-Mukai précédent : [DP2] A.7 de l'Appendice.

Exposé 3 : La propriété d'Azumaya des opérateurs différentiels cristallins. On introduira l'algèbre $\mathcal{D}_Y$ des opérateurs différentiels cristallins sur un k-schéma lisse Y, et on présentera sa propriété d'Azumaya : [BB07] 3.3, [CZ14] B.2.1 et [BMR08]. On étudiera ensuite les foncteurs image réciproque et image directe de $\mathcal{D}$-modules : [BB07] 3.6-3.9. On indiquera comment ces considérations s'adaptent au cas d'un « bon » champ $\mathcal{Y}$: [BB07] 3.13-3.16 (et 2.10) et [CZ14] B.3 et B.5. On expliquera enfin comment munir l'algèbre d'Azumaya $\mathcal{D}_{\mathcal{Y}}$ d'une structure de groupe (au sens de [BB07] 2.10) lorsque la forme différentielle canonique sur $T^*\mathcal{Y}$ est primitive : [BB07] 3.11 et 3.16, [CZ14] B.3, B.4 et C.

Exposé 4 : $\mathcal{D}$-modules sur Bun_n et la fibration de Hitchin. On pourra négliger le fait que $\mathrm{Bun}_n = \mathrm{Bun}_{GL(n)}$ n'est pas bon ([BB07] 4.6 ; par exemple Bun_G serait bon si G était semi-simple, [BD] 2.1.2), et ainsi travailler avec une algèbre $\mathcal{D}_{\mathrm{Bun}_n}$ comme dans l'exposé précédent. Le premier point de l'exposé consiste à introduire la fibration de Hitchin $T^*\mathrm{Bun}_n \simeq \mathrm{Higgs}_n \to \mathrm{Hitch}_n$, et à l'identifier au dessus d'un ouvert Hitch_n^0 au champ de Picard $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}^0/\mathrm{Hitch}_n^0)$ de la courbe spectrale lisse universelle $\widetilde{X}^0/\mathrm{Hitch}_n^0$: [BB07] 4.1-4.5, [T13] §4.1 et [Ga09] §2-§3. Le second point consiste à construire le $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}^0/\mathrm{Hitch}_n^0)'$-torseur $\mathrm{Loc}_n^0 \to (\mathrm{Hitch}_n^0)'$ (où les $'$ désignent les twists par Frobenius) : [BB07] 4.7-4.8. On pourra alors énoncer le résultat principal [BB07] 4.10 :

1. L'algèbre d'Azumaya $\mathcal{D}_{\mathrm{Bun}_n^0}$ possède une structure de groupe au-dessus de celle de $\mathcal{Y} := (T^*\mathrm{Bun}_n^0)' = \mathrm{Pic}(\widetilde{X}^0/\mathrm{Hitch}_n^0)'$; autrement dit ([BB07] 2.10), la $\mathbb{G}_m$-gerbe $\mathcal{Y}_{\mathcal{D}_{\mathrm{Bun}_n^0}}$ des scindages de $\mathcal{D}_{\mathrm{Bun}_n^0}$ possède une structure de $(\mathrm{Hitch}_n^0)'$-champ de Picard et s'insère dans une extension
$$0 \longrightarrow B\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathcal{Y}_{\mathcal{D}_{\mathrm{Bun}_n^0}} \longrightarrow \mathcal{Y} \longrightarrow 0.$$
2. La fibre en 1 de l'extension duale
$$0 \longrightarrow \mathcal{Y}^\vee \longrightarrow \mathcal{Y}^\vee_{\mathcal{D}_{\mathrm{Bun}_n^0}} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$
notée $(\mathcal{Y}_{\mathcal{D}_{\mathrm{Bun}_n^0}})^\vee_1$, s'identifie au $\mathcal{Y}^\vee = \mathrm{Pic}(\widetilde{X}^0/\mathrm{Hitch}_n^0)'$-torseur Loc_n^0. *A fortiori*,
$$D^b((\mathcal{Y}_{\mathcal{D}_{\mathrm{Bun}_n^0}})^\vee_1) \simeq D^b(\mathrm{Loc}_n^0).$$

En combinant avec le lemme 2.3 établi à exposé 1, et la proposition 2.9 établie à l'exposé 2, on obtient donc l'équivalence de Langlands annoncée :
$$\Phi_n : D^b(\mathcal{D}_{\mathrm{Bun}_n^0}) \simeq D^b(\mathrm{Loc}_n^0).$$
On terminera l'exposé en expliquant la *première* preuve du résultat principal, i.e. [BB07] 4.11-4.16.

Exposé 5 : La propriété des valeurs propres de Hecke. On introduira la notation $\mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}$ pour le $\mathcal{D}^0_{\mathrm{Bun}}$-module automorphe attaché à un système local $(\mathcal{E}, \nabla)$: [BB07] 4.18. On définira ensuite les correspondances et foncteurs de Hecke [BB07] 5.1.-5.2, puis on énoncera la compatibilité de l'équivalence Φ_n à ces foncteurs [BB07] 5.3. On expliquera ensuite la démonstration [BB07] 5.5-5.8, en insistant surtout sur le cas où la modification de fibrés sur la courbe est de degré $r = 1$; pour cela on reviendra au besoin sur la *seconde* approche [BB07] 4.17 du résultat principal. On conclura avec le théorème [BB07] 5.10.

Références

[BB07] B. Bezrukavnikov, A. Braverman, *Geometric Langlands Correspondence for $\mathcal{D}$-modules in Prime Characteristic : the $GL(n)$ case*, Pure and Applied Mathematics Quarterly, Volume 3, Number 1 (2007) (Special Issue : In honor of Robert MacPherson, Part 3 of 3), 153-179.

[BD] A. Beilinson, V. Drinfeld, *Quantization of Hitchin integrable system and Hecke eigensheaves*, disponible sur la page

`http://www.math.uchicago.edu/~mitya/langlands.html`

[BMR08] R. Bezrukavnikov, I. Mirkovic and D. Rumynin, *Localization of modules for a semi- simple Lie algebra in prime characteristic*, Ann. Math. 167 (2008), 945-991.

[CZ14] T.-H. Chen, X. Zhu, *Geometric Langlands in Prime Characteristic*, arXiv :1403.3981v1

[DP2] R. Donagi, T. Pantev, *Torus fibrations, gerbes, and duality* (with an appendix by Dmitry Arinkin), Mem. Amer. Math. Soc. 193 (2008), no. 901.

[Ga09] D. Gaitsgory, *Seminar notes : Higgs bundles, Kostant section, and local triviality of G-bundles (oct. 27, 2009)*, disponible sur la page

`http://www.math.harvard.edu/~gaitsgde/grad_2009/`

[Gr15] M. Groechening, *Moduli of flat connections in positive characteristic*, arXiv :1201.0741v2

[H06] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai Transforms in Algebraic Geometry*, Oxford University Press, USA, 2006.

[M81] S. Mukai, *Duality between $D(X)$ and $D(\widehat{X})$ with its application to Picard sheaves*, Nagoya Math. J 81 (1981), 153-175.

[SGA 4] A. Grothendieck et al., *Théorie des topos et cohomologie étale*, Lect. Notes Math. **269, 270, 305**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972-1973.

[T13] R. Travkin, *Quantum geometric Langlands correspondence in positive characteristic : the $GL(n)$-case*, arXiv :1110.5707v3