
FILTRATIONS DE STRATIFICATION DE QUELQUES VARIÉTÉS DE SHIMURA SIMPLES

par

Boyer Pascal

Résumé. — Nous définissons et étudions de nouvelles filtrations dites de stratification d'un faisceau pervers sur un schéma ; contrairement au cas de la filtration par les poids, ou de monodromie, ces filtrations sont valables quel que soit l'anneau Λ de coefficients. Nous illustrons ces constructions dans le contexte des variétés de Shimura unitaires simples de [14] pour les faisceaux pervers d'Harris-Taylor et le complexe des cycles évanescents introduits et étudiés dans [6]. Pour $\Lambda = \bar{\mathbb{Q}}_l$, nous montrons que ces filtrations de stratification sont plus efficaces que celle de monodromie-poids. Nous formulons des conjectures sur le cas $\Lambda = \bar{\mathbb{Z}}_l$ et relierons la combinatoire du cas $\Lambda = \bar{\mathbb{F}}_l$ à celle de la réduction modulo l des représentations du groupe linéaire donnée dans [8].

Abstract (Filtration of stratification of some simple Shimura varieties)

We define and study new filtrations called of stratification of a perverse sheaf on a scheme ; beside the cases of the weight or monodromy filtrations, these filtrations are available whatever are the ring of coefficients. We illustrate these constructions in the geometric situation of the simple unitary Shimura varieties of [14] for the perverse sheaves of Harris-Taylor and the complex of vanishing cycles introduced and studied in [6]. For $\Lambda = \bar{\mathbb{Q}}_l$ we show that these filtrations are more efficient than those of weight-monodromy. We formulate conjectures about the case $\Lambda = \bar{\mathbb{Z}}_l$ and study the case $\Lambda = \bar{\mathbb{F}}_l$ thanks to the combinatorics of the reduction modulo l of representations of the general linear group given in [8].

Introduction

Pour $l \neq p$ deux nombres premiers distincts, dans [6], nous avons explicité le faisceau pervers des cycles évanescents à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$, d'une certaine classe de variétés de Shimura unitaires X qualifiée de « simple » dans [14], en une place de caractéristique résiduelle p . Rappelons que cette description ne repose pas sur une étude géométrique

Classification mathématique par sujets (2000). — 14G22, 14G35, 11G09, 11G35, 11R39, 14L05, 11G45, 11Fxx.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, modules formels, correspondances de Langlands, correspondances de Jacquet-Langlands, faisceaux pervers, cycles évanescents, filtration de monodromie, conjecture de monodromie-poids.

sûrement illusoire de ces variétés qui consisterait à se ramener à une situation semi-stable ; pour l'essentiel les arguments se ramènent, via la cohomologie de ces variétés, à de la combinatoire sur les représentations

- admissibles des groupes linéaires sur un corps local et
- automorphes d'un groupe symplectique sur un corps de nombres.

Au coeur de ces arguments, on trouve la formule des traces de Selberg qui calcule la somme alternée des groupes de cohomologie de certains systèmes locaux dits d'Harris-Taylor, introduits dans [14], et définies sur certaines strates de la fibre spéciale de ces variétés de Shimura. L'apport principal de [6], est l'étude des prolongements de ces systèmes locaux à toute la fibre spéciale et dont l'outil essentiel est la filtration de monodromie-poids. La motivation première de ce travail est de prolonger cette étude dans le cas où l'anneau des coefficients est $\overline{\mathbb{F}}_l$ ou $\overline{\mathbb{Z}}_l$. Notons alors que dans ce contexte, les techniques clefs précédentes, formule des traces et filtrations de monodromie ou par les poids, n'existent plus. Dans ce papier nous nous attaquons au problème général de filtrer un faisceau pervers quel que soit son anneau de coefficients Λ , à l'aide d'une stratification de l'espace sous-jacent et nous appliquons nos constructions aux faisceaux pervers de [6]. Dans le cas où

- $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_l$, nous obtenons une démonstration simplifiée de l'étape la plus technique de loc. cit., celle où on calculait les faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor en invoquant une propriété d'autodualité sur le modèle local de Lubin-Tate prouvée par Fargues dans [12]. Ainsi les filtrations de stratification, bien que plus abstraites, se révèlent plus efficaces que la filtration de monodromie-poids.
- $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$, nous formulons deux hypothèses sur ces filtrations dont nous montrons qu'elles sont équivalentes à l'absence de torsion dans la cohomologie du modèle local de Lubin-Tate. La preuve de ces hypothèses, comme dans le cas $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_l$, fera appel à certaines propriétés de la cohomologie de la variété étudiée et sera l'objet d'un prochain papier.
- $\Lambda = \overline{\mathbb{F}}_l$, la situation reflète fidèlement la combinatoire de la réduction modulo l des représentations du groupe linéaire et du groupe des inversibles des algèbres à division centrale.

Ces résultats ouvrent la voie à l'étude de la torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura laquelle devrait être directement liée à l'étude de la réduction modulo l^n des représentations du groupe linéaire et du groupe des inversibles des algèbres à division centrale.

Donnons à présent quelques précisions sur ces nouvelles filtrations dites de stratification appliquées aux variétés de Shimura X de [14]. Notant F le corps reflex de la donnée de Shimura associée à X , on obtient un schéma de Hecke, au sens de [6], défini au-dessus de $\text{Spec } \mathcal{O}_v$, où \mathcal{O}_v est l'anneau des entiers du complété de F en une place v bien choisie, cf. le §4.2. Pour Γ un anneau de coefficients, on obtient d'après [15], un faisceau pervers $\Psi_{\mathcal{I},\Gamma}$ de Hecke dit des cycles proches sur la fibre spéciale géométrique $X_{\overline{s}}$ de X en v . Notant d la dimension de X , sa fibre spéciale X_s admet une stratification de Newton

$$X_s = X_s^{\geq 1} \supset X_s^{\geq 2} \dots \supset X_s^{\geq d}$$

où $X_s^{-h} := X_s^{\geq h} - X_s^{\geq h+1}$ est de pure dimension $d-h$. La strate X_s^{-h} admet des revêtements d'Igusa de seconde espèce, construits dans [14], qui fournissent des systèmes locaux dits d'Harris-Taylor. Dans [6] nous avons explicité la filtration de monodromie du faisceau pervers des cycles proches $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l}$ en termes d'extensions intermédiaires de ces systèmes locaux d'Harris-Taylor. Pour Λ un anneau de coefficients quelconque, l'idée est alors d'utiliser directement cette stratification pour filtrer $\Psi_{\mathcal{I}, \Lambda}$; la construction est générale et consiste étant donné un faisceau pervers P sur un schéma muni d'une stratification quelconque, de le filtrer au moyen des morphismes d'adjonction $j_! j^* P \rightarrow P$ et $P \rightarrow j_* j^* P$, cf. le §2. Pour $\Lambda = \mathbb{Z}_l$ et P sans torsion, si la stratification est « adaptée » à P , on obtient alors des systèmes locaux tels que les gradués sont certaines extensions « coincées » entre les complexes d'intersection relativement aux t -structures p et $p+$, cf. le §2. La « position » de ces faisceaux pervers ainsi que la classe d'équivalence de ces réseaux stables, dépendent à priori de la filtration considérée. On étudie, §2.7, plus particulièrement deux de ces constructions, la première dite filtration exhaustive de stratification et la deuxième qui lui est duale, la cofiltration exhaustive de stratification. Dans le cas de $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l}$, on observe que la suite spectrale associée à la filtration de stratification dégénère en E_1 , on dit alors que $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l}$ est dégénéré.

Dans la construction de la filtration de stratification d'un faisceau pervers sans torsion, afin d'obtenir des gradués sans torsion on est amené à saturer, cf. §2.3; chaque fois que ce processus est nécessaire, il engendre de la torsion notamment dans les fibres des faisceaux de cohomologie étudiés. Ainsi l'absence de torsion dans les faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}$, laquelle est d'après le théorème de comparaison de Berkovich équivalente à l'absence de torsion dans la cohomologie des espaces de Lubin-Tate, cf. §5.1, repose sur les deux hypothèses 7.2.1 et 7.2.5 qui expriment respectivement que les extensions par zéro des systèmes locaux d'Harris-Taylor et $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}$ sont saturés, i.e. il n'est pas nécessaire de saturer lors de la construction de la filtration exhaustive de stratification.

On conjecture que pour π_v une représentation irréductible cuspidale dont la réduction modulo l est supercuspidale, alors les p et $p+$ extensions intermédiaires des systèmes locaux d'Harris-Taylor associés, coïncident; dans le cas où cette réduction modulo l est seulement cuspidale, on vérifie aisément que ces deux extensions intermédiaires sont distinctes et on calcule la l -torsion de leur quotient laquelle est explicitée au moyen de la combinatoire de la réduction modulo l des représentations de $GL_d(F_v)$. Ainsi on notera que les gradués de la filtration de stratification sont les p -extensions intermédiaires alors que ceux de la cofiltration sont les $p+$ versions des faisceaux pervers d'Harris-Taylor. La filtration aboutissement de la suite spectrale associée à la filtration de stratification exhaustive de $\Psi_{\mathcal{I}}$, est alors sans torsion alors que celle associée à la cofiltration ne l'est pas; ce phénomène reflète une combinatoire sur les réseaux d'induction des représentations de Steinberg généralisées étudiée dans [8].

Décrivons succinctement le contenu des différents paragraphes. Le premier est pour l'essentiel un résumé de la première moitié de [17]; on y rappelle les théories de torsion sur une catégorie abélienne §7, leur compatibilité au recollement §1.2 et à la réduction modulaire

§1.3. La situation qui nous intéresse est celle des faisceaux pervers sur un schéma §1.4 et plus particulièrement celle des faisceaux pervers de Hecke §1.5.

Les constructions des filtrations de stratification sont données au §2. Après quelques généralités sur les pushout, pullback §2.1 et sur les stratifications d'un schéma §2.2, on introduit §2.3 le phénomène de saturation qui permet à partir d'une filtration d'un objet libre d'en construire une autre dont les gradués sont libres. On définit alors §2.4 dans une situation de recollement, des filtrations et cofiltrations d'un objet libre et on applique §2.6 et §2.7, cette construction par récurrence pour un faisceau pervers sur un schéma muni d'une stratification ; en général la stratification considérée est celle adaptée au faisceau pervers étudié. Lorsque la filtration est la plus fine possible, les gradués obtenus sont des faisceaux pervers « coincés » entre les versions p et $p+$ d'extensions intermédiaires de systèmes locaux. Au §2.9, nous montrons comment modifier un faisceau pervers donné pour les gradués prennent une position quelconque définie à l'avance entre ces deux extensions intermédiaires.

Au §3, on introduit quelques classes de faisceaux pervers. Reprenant la problématique du §2.9, on commence, §3.1, par la notion d'extension minimale et maximale analogue à celle de point indivisible d'un \mathbb{Z}_l -module : les extensions par zéros et les images directes fournissent de tels exemples. On étudie ensuite §3.2, les faisceaux pervers dits saturés, ceux dont la construction de la filtration de stratification ne nécessite pas de saturation ; c'est dans cette classe que se trouveront ceux dont les germes des faisceaux de cohomologie sont sans torsion. À la proposition 3.2.3, on étudie la réciproque i.e. sachant que les germes des faisceaux de cohomologie d'un faisceau pervers sont sans torsion alors il est saturé ; ce résultat sera utilisé pour le complexe des cycles proches où par récurrence sur le modèle local via le théorème de comparaison de Berkovich, on saura que les germes des faisceaux de cohomologie sont sans torsion.

Le paragraphe finit §3.3 par les notions de système local récurrent et récursif lesquels ont la propriété remarquable de permettre le calcul de leurs faisceaux de cohomologie par récurrence : cette propriété était utilisée indirectement dans [6].

Après les généralités des paragraphes précédents, on reprend §4, notre objet d'étude que sont les variétés de Shimura unitaires simples étudiées dans [14], [6] et [7]. On rappelle §6 quelques notations sur les représentations du groupe linéaire sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$, puis §4.3 sur la stratification de Newton des fibres spéciales des variétés de Shimura étudiées §4.2.

On reprend ensuite §4.4 les résultats de [6] sur les systèmes locaux d'Harris-Taylor à la lumière des paragraphes précédents ; ainsi au corollaire 4.4.9, on réinterprète les calculs de loc. cit. en disant que les systèmes locaux d'Harris-Taylor sont récursifs. Au §5.4, on fait de même avec le faisceau pervers des cycles proches en disant par exemple au corollaire 4.5.7 que $\Psi_{\mathcal{X}, \bar{\mathbb{Q}}_l}$ est dégénéré.

Les techniques développées permettent en fait de simplifier grandement, §5, les arguments combinatoires de [6].

On s'intéresse enfin §7, à la filtration entière des extensions par zéro des systèmes locaux d'Harris-Taylor et au faisceau pervers des cycles évanescents. Le résultat le plus simple

concerne la partie supercuspidale §7.1. Dans le cas général §7.2, l'absence de torsion, dans la cohomologie du modèle local ou dans les fibres des faisceaux de cohomologie des systèmes locaux d'Harris-Taylor, est équivalente au caractère saturé des faisceaux pervers étudiés, cf. les hypothèses 7.2.1 et 7.2.5 : nous reviendrons sur ces deux hypothèses dans un prochain travail. On termine cette étude par une conjecture sur les p et $p+$ extensions intermédiaires des systèmes locaux d'Harris-Taylor dont la formulation est étroitement liée à l'étude de la réduction modulo l des représentations de Steinberg généralisée de [8] rappelée au §6 : celle-ci correspond à l'étude de la l -torsion du quotient de ces deux extensions intermédiaires et la torsion d'ordre supérieure se traduit alors naturellement en des termes combinatoires sur la théorie des représentations de GL_d .

Table des matières

| | |
|--|----|
| Introduction..... | 1 |
| 1. Faisceaux pervers entiers et théories de torsion..... | 6 |
| 1.1. Théories de torsion..... | 6 |
| 1.2. Recollement..... | 9 |
| 1.3. Réduction modulaire..... | 11 |
| 1.4. t -structures perverses..... | 12 |
| 1.5. Cas d'un schéma de Hecke..... | 16 |
| 2. Filtrations de stratification d'un faisceau pervers sans torsion..... | 17 |
| 2.1. Rappels sur les pushout et pullback dans une catégorie abélienne... | 17 |
| 2.2. Stratifications d'un schéma..... | 20 |
| 2.3. Saturation..... | 21 |
| 2.4. Cas d'une situation de recollement..... | 23 |
| 2.5. Recollement d'une t -structure perverse..... | 27 |
| 2.6. Filtration et cofiltration de stratification..... | 27 |
| 2.7. Filtration et cofiltration \mathfrak{S} -exhaustives..... | 30 |
| 2.8. Cas d'un schéma de Hecke..... | 32 |
| 2.9. Modifications d'un faisceau pervers sans torsion..... | 32 |
| 3. Sur quelques classes de faisceaux pervers sans torsion..... | 35 |
| 3.1. Minimalité et maximalité..... | 35 |
| 3.2. Faisceaux pervers saturés..... | 37 |
| 3.3. Systèmes locaux récurrents et récursifs..... | 40 |
| 4. Faisceaux pervers sur les variétés de Shimura simples..... | 42 |
| 4.1. Rappels sur les représentations de $GL_n(K)$ | 42 |
| 4.2. Variétés de Shimura unitaires simples..... | 43 |
| 4.3. Stratification de Newton..... | 44 |
| 4.4. Systèmes locaux d'Harris-Taylor..... | 45 |
| 4.5. Faisceau pervers de Hecke des cycles proches..... | 49 |
| 5. Retour sur les résultats faisceautiques de [6]..... | 54 |
| 5.1. Espaces de Lubin-Tate..... | 54 |
| 5.2. Les systèmes locaux d'Harris-Taylor sont récurrents..... | 56 |

| | |
|--|----|
| 5.3. Faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor | 58 |
| 5.4. Faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{T}}$ | 58 |
| 6. Rappels sur la réduction modulo l des représentations | 60 |
| 6.1. de $GL_d(K)$ | 60 |
| 6.2. de W_K | 61 |
| 6.3. de $D_{K,d}^{\times}$ | 61 |
| 6.4. Complexes d'induction des représentations de Steinberg | 62 |
| 7. Sur les filtrations de stratification entières | 64 |
| 7.1. Cas supercuspidal | 65 |
| 7.2. Deux hypothèses sur la saturation | 66 |
| 7.3. Une conjecture sur les $p+$ faisceaux pervers d'Harris-Taylor | 69 |
| Références | 72 |

1. Faisceaux pervers entiers et théories de torsion

Dans tout le texte, \mathbb{K} désignera une extension finie de \mathbb{Q}_l ou $\bar{\mathbb{Q}}_l$, d'anneau des entiers \mathbb{O} et de corps résiduel $\mathbb{F} = \mathbb{O}/(\varpi)$. La lettre Λ désignera alors une des trois lettres \mathbb{K}, \mathbb{O} ou \mathbb{F} .

1.1. Théories de torsion. — Une théorie de torsion, cf.[17] 1.3.1, sur une catégorie abélienne \mathcal{A} est un couple $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de sous-catégories pleines tel que :

- pour tout objet T dans \mathcal{T} et F dans \mathcal{F} , on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T, F) = 0;$$

- pour tout objet A de \mathcal{A} , il existe des objets $A_{\mathcal{T}}$ et $A_{\mathcal{F}}$ de respectivement \mathcal{T} et \mathcal{F} , ainsi qu'une suite exacte courte

$$0 \rightarrow A_{\mathcal{T}} \rightarrow A \rightarrow A_{\mathcal{F}} \rightarrow 0.$$

Remarque : \mathcal{T} (resp. \mathcal{F}) est stable par quotients et extensions (resp. sous-objets et extensions). On dira de $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion *héréditaire* (resp. *co-héréditaire*) si \mathcal{T} (resp. \mathcal{F}) est stable par sous-objets (resp. par quotients).

Dans une catégorie abélienne \mathcal{A} qui est \mathbb{O} -linéaire, un objet A de \mathcal{A} est dit de torsion (resp. libre, resp. divisible) si $\varpi^N 1_A$ est nul pour un certain entier N (resp. $\varpi \cdot 1_A$ est un monomorphisme, resp. un épimorphisme).

1.1.1. Proposition. — (cf. [17] 1.3.5) *Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne \mathbb{O} -linéaire; on note \mathcal{T} (resp. \mathcal{F} , resp. \mathcal{Q}) la sous-catégorie pleine des objets de torsion (resp. libres, resp. divisibles) de \mathcal{A} . Si \mathcal{A} est noethérienne (resp. artinienne) alors $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ (resp. $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$) est une théorie de torsion héréditaire (resp. co-héréditaire) sur \mathcal{A} .*

Remarque : ainsi dans une catégorie abélienne \mathbb{O} -linéaire noethérienne (resp. artinienne) tout objet A admet un plus grand sous-objet de torsion A_{tor} (resp. divisible A_{div}) de sorte que A/A_{tor} (resp. A/A_{div}) est sans torsion (resp. de torsion) et $\mathbb{K}A \simeq \mathbb{K}(A/A_{tor})$ (resp. $\mathbb{K}A \simeq \mathbb{K}A_{div}$).

1.1.2. Notations. — Soit \mathcal{D} une catégorie triangulée munie d'une t -structure $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ au sens de [2] définition 1.3.1; on notera :

- \mathcal{C} le cœur;
- $\tau_{\leq n}$ et $\tau_{\geq n}$, les foncteurs de troncation;
- $h^n := \tau_{\leq n} \tau_{\geq n} = \tau_{\geq n} \tau_{\leq n}$.

On rappelle qu'un foncteur triangulé $T : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ est dit t -exact à droite (resp. à gauche), si $T(\mathcal{D}_1^{\leq 0}) \subset \mathcal{D}_2^{\leq 0}$ (resp. $T(\mathcal{D}_1^{\geq 0}) \subset \mathcal{D}_2^{\geq 0}$) et t -exact s'il est t -exact à droite et à gauche.

1.1.3. Notation. — Pour $T : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ un foncteur triangulé, on note ${}^p T$ pour $h^0 \circ T \circ \epsilon_1$, où $\epsilon_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$ est l'inclusion du cœur.

Remarque : la situation que nous utiliserons essentiellement sera celle des faisceaux pervers sur un schéma d'où l'exposant p dans la notation même si pour l'instant il n'y a pas de t -structure perverse.

On rappelle que si (T^*, T_*) est une paire de foncteurs triangulés adjoints, alors T^* est t -exact à droite si et seulement si T_* est t -exact à gauche et alors $({}^p T^*, {}^p T_*)$ est une paire de foncteurs adjoints de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

1.1.4. Corollaire. — (cf. [17] 1.3.6) Si \mathcal{C} est munie d'une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ alors

$$\begin{aligned} {}^+ \mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{A \in \mathcal{D}^{\leq 1} : h^1(A) \in \mathcal{T}\} \\ {}^+ \mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{A \in \mathcal{D}^{\geq 0} : h^0(A) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

définissent une nouvelle t -structure sur \mathcal{D} dont on note ${}^+ \mathcal{C}$ le cœur lequel est en outre munie d'une théorie de torsion $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$.

Remarque : on retrouve la t -structure p à partir de $p+$ via les formules :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{A \in {}^+ \mathcal{D}^{\leq 0} : {}^+ h^0(A) \in \mathcal{F}\} \\ \mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{A \in {}^+ \mathcal{D}^{\geq -1} : {}^+ h^{-1}(A) \in \mathcal{T}\} \end{aligned}$$

de sorte que ${}^{++} \mathcal{C} = \mathcal{C}[-1]$.

1.1.5. Lemme. — Pour $A \in \mathcal{C}$ muni d'une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$, on a

$$A_{\mathcal{T}} = {}^+ h^{-1} A \text{ et } A_{\mathcal{F}} = {}^+ h^0 A.$$

Pour $A \in {}^+\mathcal{C}$ munie de la théorie de torsion $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$, on a

$$A_{\mathcal{F}} = h^0 A \text{ et } A_{\mathcal{T}[-1]} = h^1 A.$$

1.1.6. Notation. — Pour $T : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathcal{D}_2$ un foncteur triangulé, on notera ${}^{p+}h^0 T$ pour ${}^+h^0 \circ T \circ \epsilon_1$.

Remarque : comme précédemment l'exposant p ne fait pas encore mention à une quelconque t -structure perverse.

Exemple : reprenons l'exemple d'une catégorie linéaire \mathbb{O} -linéaire et supposons \mathcal{C} noethérienne munie de la théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ où \mathcal{T} (resp. \mathcal{F}) est la sous-catégorie pleine des objets de torsion (resp. libres) de \mathcal{C} . Pour $L \in \mathcal{F}$, ϖ_{1L} est un monomorphisme dans \mathcal{C} et on a la suite exacte courte dans \mathcal{C} :

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{\varpi_{1L}} L \rightarrow \text{Coker}_{\mathcal{C}} \varpi_{1L} \rightarrow 0.$$

Comme \mathcal{C} est une sous-catégorie abélienne admissible de \mathcal{D} , cette suite exacte provient d'un triangle distingué dans \mathcal{D}

$$L \xrightarrow{\varpi_{1L}} L \rightarrow \text{Coker}_{\mathcal{C}} \varpi_{1L} \rightsquigarrow$$

qui après rotation

$$\text{Coker}_{\mathcal{C}} \varpi_{1L}[-1] \rightarrow L \xrightarrow{\varpi_{1L}} L \rightsquigarrow$$

devient un triangle distingué dont les objets sont dans ${}^+\mathcal{C}$, ce qui donne une suite exacte courte dans ${}^+\mathcal{C}$

$$0 \rightarrow \text{Coker}_{\mathcal{C}} \varpi_{1L}[-1] \rightarrow L \xrightarrow{\varpi_{1L}} L \rightarrow 0$$

de sorte que ϖ_{1L} est désormais un épimorphisme dans ${}^+\mathcal{C}$ de noyau

$$\text{Ker}_{\mathcal{C}} \varpi_{1L} = \text{Coker}_{\mathcal{C}} \varpi_{1L}[-1].$$

1.1.7. Corollaire. — Soit $A \in \mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^+\mathcal{D}^{\geq 0}$ alors $A \in \mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$.

Démonstration. — Cela découle directement des liens entre les deux t -structures considérées. \square

1.1.8. Notation. — Pour $A, B \in \mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$, on notera

$$A \hookrightarrow B$$

une flèche $A \rightarrow B$ injective dans \mathcal{C} dont le conoyau est de torsion; c'est alors une flèche surjective de ${}^+\mathcal{C}$ dont le noyau est de torsion.

1.2. Recollement. — On suppose données trois catégories triangulées \mathcal{D} , \mathcal{D}_U et \mathcal{D}_F ainsi que des foncteurs triangulés

$$i_* : \mathcal{D}_F \rightarrow \mathcal{D}, \quad j^* : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_U$$

vérifiant les conditions de recollement de [2] §1.4.3

1. i_* possède un adjoint à gauche noté i^* et un adjoint à droite $i^!$;
2. j^* possède un adjoint à gauche $j_!$ et un adjoint à droite j_* ;
3. on a $j^*i_* = 0$ et donc par adjonction $i^*j_! = 0$ et $i^!j_* = 0$; en outre pour $A \in \mathcal{D}_F$ et $B \in \mathcal{D}_U$

$$\mathrm{Hom}(j_!B, i_*A) = 0 \text{ et } \mathrm{Hom}(i_*, j_*B) = 0;$$

4. pour tout $K \in \mathcal{D}$, il existe $d : i_*i^*K \rightarrow j_!j^*K[1]$ (resp. $d : j_*j^*K \rightarrow i_*i^!K[1]$), nécessairement unique, tel que le triangle

$$j_!j^*K \rightarrow K \rightarrow i_*i^*K \rightsquigarrow^d \quad (\text{resp. } i_*i^!K \rightarrow K \rightarrow j_*j^*K \rightsquigarrow^d)$$

soit distingué ;

5. les foncteurs i_* , $j_!$ et j_* sont pleinement fidèles : les morphismes d'adjonction

$$i^*i_* \rightarrow \mathrm{Id} \rightarrow i^!i_* \text{ et } j^*j_* \rightarrow \mathrm{Id} \rightarrow j^*j_!$$

sont des isomorphismes.

Remarque : on résume les propriétés précédentes en un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{i^!} & \xleftarrow{j_*} \\ \mathcal{D}_F & \xrightarrow{i_*} & \mathcal{D} & \xrightarrow{j^*} & \mathcal{D}_U \\ & \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j_!} & \end{array}$$

que l'on qualifie de *situation de recollement*.

Remarque : en considérant les catégories opposées triangulées via $[-1]$, en échangeant les rôles de i^* et $i^!$ (resp. $j_!$ et j_*), la situation

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{i^*} & \xleftarrow{j^!} \\ \mathcal{D}_F^{op} & \xrightarrow{i_*} & \mathcal{D}^{op} & \xrightarrow{j^*} & \mathcal{D}_U^{op} \\ & \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j_*} & \end{array}$$

est encore de recollement. Elle est dite formellement duale de la précédente.

Étant donnée des t -structures $(\mathcal{D}_U^{\leq 0}, \mathcal{D}_U^{\geq 0})$ sur \mathcal{D}_U et $(\mathcal{D}_F^{\leq 0}, \mathcal{D}_F^{\geq 0})$ sur \mathcal{D}_F , on définit une t -structure sur \mathcal{D} par recollement :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{K \in \mathcal{D} : j^*K \in \mathcal{D}_U^{\leq 0} \text{ et } i^*K \in \mathcal{D}_F^{\leq 0}\} \\ \mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{K \in \mathcal{D} : j^*K \in \mathcal{D}_U^{\geq 0} \text{ et } i^!K \in \mathcal{D}_F^{\geq 0}\}. \end{aligned}$$

Remarque : en recollant la t -structure de \mathcal{D}_F (resp. \mathcal{D}_U) avec la t -structure dégénérée $(\mathcal{D}_U, 0)$ de \mathcal{D}_U (resp. $(\mathcal{D}_F, 0)$ de \mathcal{D}_F), on obtient des foncteurs de troncation notés $\tau_{\leq n}^F$

(resp. $\tau_{\leq n}^U$) dont les foncteurs cohomologiques sont $i_*h_F^n i^*$ (resp. $j_*h_U^n j^*$). Dualemeent pour la t -structure dégénérée $(0, \mathcal{D}_U)$ (resp. $(0, \mathcal{D}_F)$), on obtient $\tau_{\geq n}^F$ (resp. $\tau_{\geq n}^U$) dont les foncteurs cohomologiques sont $i_*h_F^n i^!$ (resp. $j_*h_U^n j^*$). On a alors

$$\tau_{\leq n} = \tau_{\leq n}^F \tau_{\leq n}^U \text{ et } \tau_{\geq n} = \tau_{\geq n}^F \tau_{\geq n}^U.$$

1.2.1. Proposition. — ([17] proposition 2.30) Soient \mathcal{C}_F et \mathcal{C}_U munis de théorie de torsion $(\mathcal{T}_F, \mathcal{F}_F)$ et $(\mathcal{T}_U, \mathcal{F}_U)$, on définit une théorie de torsion sur \mathcal{C} par :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &:= \{P \in \mathcal{C} : {}^p i^* P \in \mathcal{T}_F \text{ et } j^* P \in \mathcal{T}_U\} \\ \mathcal{F} &:= \{P \in \mathcal{C} : {}^p i^! P \in \mathcal{F}_F \text{ et } j^* P \in \mathcal{F}_U\} \end{aligned}$$

1.2.2. Corollaire. — ([17] lemme 2.32) On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} {}^p i_*(\mathcal{T}_F) \subset \mathcal{T} \quad {}^p j_!(\mathcal{T}_U) \subset \mathcal{T} \quad {}^p j_!(\mathcal{T}_U) \subset \mathcal{T} \\ {}^p i_*(\mathcal{F}_F) \subset \mathcal{F} \quad {}^p j_*(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F} \quad {}^p j_{!*}(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F} \end{aligned}$$

Démonstration. — Cela découle directement

- de la définition de $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$;
- du fait, cf. [2] proposition 1.4.17 (i), que les composés

$${}^p j_* \circ {}^p i_*, \quad {}^p i^* \circ {}^p j_!, \quad {}^p i^! \circ {}^p j_*$$

sont nuls;

- de la nullité de ${}^p i^* {}^p j_{!*}$ et ${}^p i^! {}^p j_{!*}$.

□

Remarque : pour ${}^+ \mathcal{C}$, on a en particulier que ${}^{p+} j_!(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F}$.

En utilisant la construction du corollaire 1.1.4, on définit alors les foncteurs suivant :

$$\begin{aligned} {}^p j_! &= \tau_{\leq -2}^F j_* = \tau_{\geq 0}^F j_! \\ {}^{p+} j_! &= {}^+ \tau_{\leq -2}^F j_* = {}^+ \tau_{\geq 0}^F j_! \\ {}^p j_{!*} &= \tau_{\leq -1}^F j_* = \tau_{\geq 1}^F j_! \\ {}^{p+} j_{!*} &= {}^+ \tau_{\leq -1}^F j_* = {}^+ \tau_{\geq 1}^F j_! \\ {}^p j_* &= \tau_{\leq 0}^F j_* = \tau_{\geq 2}^F j_! \\ {}^{p+} j_* &= {}^+ \tau_{\leq 0}^F j_* = {}^+ \tau_{\geq 2}^F j_! \end{aligned}$$

dont le premier (resp. le dernier) est à image dans \mathcal{C} (resp. ${}^+ \mathcal{C}$) et les quatre autres dans $\mathcal{C} \cap {}^+ \mathcal{C}$. On a alors les triangles distingués suivant (cf. [17] 2.42-2.46) :

$$\begin{aligned} {}^p j_! &\rightarrow {}^{p+} j_! \rightarrow {}^p i_* h_{tors}^{-1} i^* j_*[1] \rightsquigarrow \\ {}^{p+} j_! &\rightarrow {}^p j_{!*} \rightarrow {}^p i_* h_{libre}^{-1} i^* j_*[1] \rightsquigarrow \\ {}^p j_{!*} &\rightarrow {}^{p+} j_{!*} \rightarrow {}^p i_* h_{tors}^0 i^* j_* \rightsquigarrow \\ {}^{p+} j_{!*} &\rightarrow {}^p j_* \rightarrow {}^p i_* h_{libre}^0 i^* j_* \rightsquigarrow \\ {}^p j_* &\rightarrow {}^{p+} j_* \rightarrow {}^p i_* h_{tors}^1 i^* j_*[-1] \rightsquigarrow \end{aligned}$$

1.2.3. Corollaire. — On suppose que j_* (resp. $j_!$) est t -exact pour \mathcal{C} (resp. ${}^+\mathcal{C}$) alors $j_*(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F}$ dans ${}^+\mathcal{C}$ (resp. $j_!(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F}$ dans \mathcal{C}). En outre ${}^p j_{!*}(\mathcal{F}_U)$ (resp. ${}^{p+} j_{!*}(\mathcal{F}_U)$) est dans $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$.

Démonstration. — Soit $L \in \mathcal{F}_U$ dans $\mathcal{C}_U \cap {}^+\mathcal{C}_U$; comme ${}^p j_* = j_*$, $j_* L \in \mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^+\mathcal{D}^{\geq 0}$ et le résultat découle du corollaire 1.1.7. Le cas de $j_!$ est dual : comme ${}^+ j_! = j_!$, $j_! L \in \mathcal{F}$ dans ${}^+\mathcal{C}$ de sorte que $j_! L$ appartient à $\mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^+\mathcal{D}^{\geq 0}$ d'où le résultat. En ce qui concerne les extensions intermédiaires, on utilise qu'un quotient d'un divisible (resp. un sous-objet d'un libre) est divisible (resp. libre) et la définition de ${}^p j_{!*}$ sa version $p+$. \square

1.2.4. Proposition. — (cf. [17] 2.27, 2.28, 2.29) Dans une situation de recollement, le foncteur ${}^p j_{!*}$ vérifie les propriétés suivantes :

- il préserve les monomorphismes et les épimorphismes ;
- en ce qui concerne les socles et les top, pour $A \in \mathcal{C}_U$ on a

$$\begin{aligned} \text{Soc } {}^p j_{!*} A &\simeq \text{Soc } {}^p j_* A \simeq {}^p j_{!*} \text{Soc } A \\ \text{Top } {}^p j_! A &\simeq \text{Top } {}^p j_{!*} A \simeq {}^p j_{!*} \text{Top } A \end{aligned}$$

- il est pleinement fidèle.

Remarque : en particulier pour A et B des faisceau pervers à support respectivement dans X et F , on a

$$\text{Hom}({}^p j_! A, B) = 0, \quad \text{Hom}(B, {}^p j_* A) = 0.$$

1.3. Réduction modulaire. — On note $\mathbb{F}(-)$ le foncteur de réduction modulaire $\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{L}}^{\mathbb{L}} (-)$; ce dernier ne commute pas aux foncteurs de troncations. Précisément pour $A \in D_c^b(X, \mathbb{O})$, d'après cf. [17] proposition 2.35, on a les triangles distingués :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\tau_{\leq n} A &\rightarrow \tau_{\leq n} \mathbb{F}A \rightarrow h^{-1} \left(\mathbb{F}h_{tors}^{n+1} A \right) [-n] \rightsquigarrow \\ \tau_{\leq n} \mathbb{F}A &\rightarrow \mathbb{F}^+ \tau_{\leq n} A \rightarrow h^0 \left(\mathbb{F}h_{tors}^{n+1} A \right) [-n-1] \rightsquigarrow \\ \mathbb{F}^+ \tau_{\leq n} A &\rightarrow \mathbb{F}\tau_{\leq n+1} A \rightarrow \mathbb{F}h_{libre}^{n+1} A [-n-1] \rightsquigarrow \end{aligned}$$

En appliquant ceci aux foncteurs de troncation $\tau_{\leq i}^F$ on obtient alors les triangles distingués 2.54-2.61 de [17] :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^p j_! &\rightarrow {}^p j_! \mathbb{F} \rightarrow h^{-1} \mathbb{F}^p i_* {}^p h_{tors}^{-1} i^* j_* [2] \rightsquigarrow \\ {}^p j_! \mathbb{F} &\rightarrow \mathbb{F}^p {}^+ j_! \rightarrow h^0 \mathbb{F}^p i_* {}^p h_{tors}^{-1} i^* j_* [1] \rightsquigarrow \\ \mathbb{F}^p {}^+ j_! &\rightarrow \mathbb{F}^p j_{!*} \rightarrow \mathbb{F}^p i_* h_{libre}^{-1} i^* j_* [1] \rightsquigarrow \\ \mathbb{F}^p j_{!*} &\rightarrow {}^p j_{!*} \mathbb{F} \rightarrow h^{-1} \mathbb{F}^p i_* {}^p h_{tors}^0 i^* j_* [1] \rightsquigarrow \\ {}^p j_{!*} \mathbb{F} &\rightarrow \mathbb{F}^p {}^+ j_{!*} \rightarrow h^0 \mathbb{F}^p i_* {}^p h_{tors}^0 i^* j_* \rightsquigarrow \\ \mathbb{F}^p {}^+ j_{!*} &\rightarrow \mathbb{F}^p j_* \rightarrow \mathbb{F}^p i_* h_{libre}^0 i^* j_* \rightsquigarrow \\ \mathbb{F}^p j_* &\rightarrow {}^p j_* \mathbb{F} \rightarrow h^{-1} \mathbb{F}^p i_* h_{tors}^1 i^* j_* \rightsquigarrow \\ {}^p j_* \mathbb{F} &\rightarrow \mathbb{F}^p {}^+ j_* \rightarrow h^0 \mathbb{F}^p i_* h_{tors}^1 i^* j_* [-1] \rightsquigarrow \\ \mathbb{F}^p {}^+ j_* &\rightarrow \mathbb{F}^p j_* \rightarrow \mathbb{F}^p i_* h_{libre}^1 i^* j_* [-1] \rightsquigarrow \end{aligned}$$

1.4. t -structures perverses. — Dans la suite S désigne le spectre soit

- d'un corps ;
- d'un anneau de valuation discrète hensélien A ;
- de \bar{A} le normalisé de A dans une clôture algébrique du corps des fractions de A .

On rappelle en outre que Λ désigne une des trois lettres \mathbb{K}, \mathbb{O} ou \mathbb{F} introduites plus haut.

Soit alors X un schéma de type fini sur S . On note $\mathcal{D} := D_c^b(X, \Lambda)$ la sous-catégorie pleine de $D(X, \Lambda)$ formée des complexes à cohomologie bornée constructible. Si $j : U \hookrightarrow X$ est un ouvert dense de complémentaire $i : F \hookrightarrow X$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{i^!} & \xleftarrow{j_*} \\ \mathcal{D}_F & \xrightarrow{i_*} & \mathcal{D} \xrightarrow{j^*} & \mathcal{D}_U \\ & \xleftarrow{i^*} & \xleftarrow{j^!} & \end{array}$$

est une situation de recollement ce qui permet de recoller des t -structures munies de théories de torsion comme précédemment.

1.4.1. Notation. — Dans la suite du texte, h^i désignera le foncteur cohomologique associée à la t -structure naturelle sur la catégorie dérivée considérée.

(a) **Cas où S est le spectre d'un corps :** on considérera dans cette situation la t -structure perverse p définie par :

$$\begin{aligned} A \in {}^p D^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^k i_x^* A = 0, \forall k > -\dim \overline{\{x\}} \\ A \in {}^p D^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^k i_x^! A = 0, \forall k < -\dim \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

où $i_x : \text{Spec } \kappa(x) \hookrightarrow X$. On note alors ${}^p \text{FP}(X, \Lambda)$ le cœur de cette t -structure : c'est une catégorie abélienne noethérienne et Λ -linéaire.

1.4.2. Notation. — Les foncteurs cohomologiques associés à la t -structure perverse ci-avant seront notés ${}^p h^i$.

Dans le cas où $\Lambda = \mathbb{O}$, en tant que catégorie abélienne \mathbb{O} -linéaire, on obtient comme précédemment une autre t -structure $p+$

$$\begin{aligned} A \in {}^{p+} D^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \begin{cases} h^i i_x^* A = 0, & \forall i > -\dim \overline{\{x\}} + 1 \\ h^{-\dim \overline{\{x\}} + 1} i_x^* A \text{ de torsion} \end{cases} \\ A \in {}^{p+} D^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \begin{cases} h^i i_x^! A = 0, & \forall i < -\dim \overline{\{x\}} \\ h^{-\dim \overline{\{x\}}} i_x^! A \text{ libre} \end{cases} \end{aligned}$$

dont on notera ${}^{p+} \text{FP}(X, \mathbb{O})$ le cœur et ${}^{p+} h^i$ les foncteurs cohomologiques. C'est une catégorie abélienne artiniennne et \mathbb{O} -linéaire.

Remarque : la t -structure p (resp. $p+$) sur X , s'obtient par recollement des t -structures p (resp. $p+$) sur U et F . Dans le cas où Λ est un corps, p et $p+$ coïncident.

1.4.3. Proposition. — (cf. [17] §1.7)

- Un objet A de $D_c^b(X, \mathbb{O})$ est dans ${}^pD^{\leq 0}(X, \mathbb{O})$ (resp. ${}^{p+}D^{\geq 0}$) si et seulement si $A \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} \mathbb{F}$ est un objet de ${}^pD^{\leq 0}(X, \mathbb{F})$ (resp. de ${}^{p+}D^{\geq 0}(X, \mathbb{F})$).
- Soit A un objet de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$ alors $A \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} \mathbb{O}/(\varpi)$ est un objet de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{F})$ si et seulement si A est libre, ce qui revient à demander que A soit un objet de ${}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$. On a alors $A \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} \mathbb{O}/(\varpi) = \text{Coker } \varpi.1_A$, noyau pris dans ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$.
- Soit A un objet de ${}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$ alors $A \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} \mathbb{O}/(\varpi)$ est un objet de ${}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{F})$ si et seulement si A est divisible, ce qui revient à demander que A soit un objet de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$. On a alors $A \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} \mathbb{O}/(\varpi) = \text{Ker } \varpi.1_A[1]$, noyau pris dans ${}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$.

Remarque : la dualité de Grothendieck échange les deux t -structures perverses p et $p+$. Soient $A, B \in {}^p\mathcal{C} \cap {}^{p+}\mathcal{C}$ tels que $A \hookrightarrow B$ (resp. $A \twoheadrightarrow B$) dans ${}^p\mathcal{C}$. Alors $DB \twoheadrightarrow DA$ (resp. $DB \hookrightarrow DA$) dans ${}^{p+}\mathcal{C}$.

Remarque : si f est un foncteur exact à droite pour la t -structure p et commute à la dualité de Grothendieck-Verdier alors

$$A \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 0} \Rightarrow f(A) \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 0}.$$

1.4.4. Proposition. — On suppose que l'inclusion $j : U \hookrightarrow X$ est affine alors pour $P \in {}^p\text{FP}(U, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(U, \mathbb{O})$ on a

$$j_*P = {}^pj_*P = {}^{p+}j_*P, \quad j_!P = {}^pj_!P = {}^{p+}j_!P,$$

et ${}^pj_{!*}P, {}^{p+}j_{!*}P$ sont dans ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$.

Démonstration. — Comme j est affine, j_* (resp. $j_!$) est t -exact pour p (resp. $p+$) et le résultat découle du corollaire 1.2.3. \square

Remarque : en ce qui concerne les extensions intermédiaires, par définition ${}^pj_{!*}K = \text{Im}_{{}^p\mathcal{C}}({}^pj_!K \rightarrow {}^pj_*K)$ et ${}^{p+}j_{!*} = \text{Im}_{{}^{p+}\mathcal{C}}({}^{p+}j_!K \rightarrow {}^{p+}j_*K)$ sont donc aussi dans ${}^p\mathcal{C} \cap {}^{p+}\mathcal{C}$. Ils sont en outre reliés par la suite exacte courte dans ${}^p\mathcal{C}$:

$$0 \rightarrow {}^pj_{!*} \rightarrow {}^{p+}j_{!*} \rightarrow {}^pi_* {}^ph_{tors}^0 i^* j_* \rightarrow 0. \quad (1.4.5)$$

1.4.6. Lemme. — Soit $P \in {}^p\text{FP}(U, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(U, \mathbb{O})$ avec $j : U \hookrightarrow X$ affine tel que ${}^ph_{tors}^0 i^* j_* P$ est non nul. Alors il existe un point z de $X - U$ tel que $\left(z^* h^{-\dim \bar{z}} {}^{p+}j_{!*} P \right)_{tors}$ est non nul.

Remarque : comme ${}^pj_{!*}P \in {}^pD^{\leq -1}$, on a nécessairement $z^* h^{-\dim \bar{z}} {}^pj_{!*}P$ qui est nul.

Démonstration. — On choisit pour z un point générique du support de ${}^ph_{tors}^0 i^* j_* P$ de sorte que d'après la remarque précédente, la suite exacte longue des faisceaux de cohomologie appliquée à la suite exacte courte (1.4.5) a pour fibre en z :

$$0 \rightarrow z^* h^{-\dim \bar{z}} {}^{p+}j_{!*} P \rightarrow z^* h^{-\dim \bar{z}} \left({}^ph_{tors}^0 i^* j_* P \right) \rightarrow 0$$

ce qui donne le résultat. \square

Remarque : plus généralement avec les notations précédentes, si Q est un faisceau pervers tel que dans ${}^p\mathrm{FP}(X, \mathbb{O})$

$${}^p j_{!*}P \hookrightarrow Q \hookrightarrow {}^{p+} j_{!*}P$$

distinct de ${}^p j_{!*}P$ alors la conclusion du lemme s'applique à Q . On notera que dans ${}^{p+}\mathrm{FP}(X, \mathbb{O})$ les inclusions précédentes deviennent

$${}^p j_{!*}P \twoheadrightarrow Q \twoheadrightarrow {}^{p+} j_{!*}P.$$

1.4.7. Proposition. — Soit $K \in {}^p\mathrm{FP}(U, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\mathrm{FP}(U, \mathbb{O})$ un faisceau pervers sans torsion sur U . Si l'inclusion $j : U \hookrightarrow X$ est affine alors

$$\mathbb{F}j_*K = j_*\mathbb{F}K, \quad \mathbb{F}j_!K = j_!\mathbb{F}K$$

Démonstration. — Le résultat découle directement de la proposition 1.4.4 et du fait que $\mathbb{F}K$ est un faisceau pervers. \square

(b) **Cas où** $S = \mathrm{Spec} A$: on note

- $f : X \rightarrow S$ le morphisme structural ;
- $s = \mathrm{Spec} k$ (resp. $\eta = \mathrm{Spec} K$) le point fermé (resp. générique) de S ;
- X_s (resp. X_η) la fibre spéciale (resp. générique) de X ;
- $i : X_s \hookrightarrow X$ (resp. $j : X_\eta \hookrightarrow X$) l'inclusion fermée (resp. ouverte).

Le complexe $f^!\Lambda_S[2](1)$ est dualisant sur X d'après [11] Th. finitude §4. On considère alors la t -structure sur X obtenue par recollement de la perversité autoduale p sur la fibre spéciale X_s de X et de la t -structure $({}^pD^{\leq -1}(X_\eta, \Lambda), {}^pD^{\geq -1}(X_\eta, \Lambda))$, notée $p[1]$, où p est la perversité autoduale sur la fibre générique X_η de X . Autrement dit, en posant, d'après [1] XIV 2.2, pour x un point de X d'image y dans S

$$\delta(x) = \deg \mathrm{Tr} \kappa(x)/\kappa(y) + \dim \overline{\{y\}}$$

on a

$$\begin{aligned} A \in {}^pD^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^q(i_x^*A) = 0, \forall q > -\delta(x) \\ A \in {}^pD^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^q(i_x^!A) = 0, \forall q < -\delta(x) \end{aligned}$$

On définit de même la t -structure $p+$ sur X de sorte que le foncteur dualisant $D_X = R\mathrm{Hom}(-, K_X)$ échange ${}^pD^{\leq 0}(X, \Lambda)$ (resp. ${}^{p+}D^{\leq 0}(X, \Lambda)$) et ${}^pD^{\geq 0}(X, \Lambda)$ (resp. ${}^{p+}D^{\geq 0}(X, \Lambda)$).

1.4.8. Proposition. — Le foncteur j_* (resp. $j_!$) est t -exact pour X_η muni de la t -structure $p[1]$ (resp. $p + [1]$) et X de la t -structure p (resp. $p+$) définie ci-dessus.

Démonstration. — Pour le cas de j_* , cf. par exemple [15] bas de la page 48 ; le cas de $j_!$ est dual. \square

D'après le corollaire 1.2.3, on en déduit alors le résultat suivant.

1.4.9. Corollaire. — Si $L_{\mathbb{O}} \in {}^pD^{\leq -1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}D^{\geq -1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{O})$, i.e. est sans torsion pour la t -structure $({}^pD^{\leq -1}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda), {}^pD^{\geq -1}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda))$, alors $j_!L_{\mathbb{O}}$, $j_*L_{\mathbb{O}}$, ${}^pj_{!*}L_{\mathbb{O}}$ et ${}^{p+}j_{!*}L_{\mathbb{O}}$ appartiennent à ${}^pD^{\leq 0}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}D^{\geq 0}(X, \mathbb{O})$, i.e. sont sans torsion.

(c) **Cas où $S = \text{Spec } \bar{A}$** : on note

- $\bar{s} = \text{Spec } \bar{k}$ (resp. $\bar{\eta} = \text{Spec } K$) le point fermé (resp. générique) de S ;
- $X_{\bar{s}}$ (resp. $X_{\bar{\eta}}$) la fibre spéciale (resp. générique) de X ;
- $\bar{i} : X_{\bar{s}} \hookrightarrow X$ (resp. $\bar{j} : X_{\bar{\eta}} \hookrightarrow X$) l'inclusion fermée (resp. ouverte).

Remarque : dans cette situation, il n'y a plus de complexe dualisant.

On considère alors les t -structures suivantes :

- $p(1)$ en recollant $({}^pD^{\leq -1}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda), {}^pD^{\geq -1}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda))$ et $({}^pD^{\leq 0}(X_{\bar{s}}, \Lambda), {}^pD^{\geq 0}(X_{\bar{s}}, \Lambda))$;
- $p(0)$ en recollant $({}^pD^{\leq 0}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda), {}^pD^{\geq 0}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda))$ et $({}^pD^{\leq 0}(X_{\bar{s}}, \Lambda), {}^pD^{\geq 0}(X_{\bar{s}}, \Lambda))$.

Remarque : on notera $p(1)+$ et $p(0)+$ les t -structures obtenues en recollant comme ci-dessus à partir des versions $p+$ sur $X_{\bar{\eta}}$ et $X_{\bar{s}}$.

1.4.10. Proposition. — (i) Pour $X_{\bar{\eta}}$ et X munis des t -structures $p[1]$ et $p(1)$ (resp. $p[1]+$ et $p(1)+$), les foncteurs \bar{j}_* et $\bar{j}_!$ sont t -exact. Pour $L_{\mathbb{O}}$ sur $X_{\bar{\eta}}$ qui est $p[1]$ pervers sans torsion, on a

$$\bar{j}_*L_{\mathbb{O}} = {}^{p(1)}\bar{j}_{!*}L_{\mathbb{O}} = {}^{p(1)+}\bar{j}_{!*}L_{\mathbb{O}}$$

qui est sans torsion sur X et on a la suite exacte courte de faisceau $p(1)$ -pervers sans torsion sur X :

$$0 \rightarrow \bar{i}^*\bar{j}_*L_{\mathbb{O}} \longrightarrow \bar{j}_!L_{\mathbb{O}} \longrightarrow \bar{j}_*L_{\mathbb{O}} \rightarrow 0.$$

(ii) Pour $X_{\bar{\eta}}$ et X munis des t -structures p et $p(0)$ (resp. $p+$ et $p(0)+$), les foncteurs \bar{j}_* et $\bar{j}_!$ sont t -exact. Pour $L_{\mathbb{O}}$ sur $X_{\bar{\eta}}$ qui est p -pervers sans torsion, on a

$$\bar{j}_!L_{\mathbb{O}} = {}^{p(0)}\bar{j}_{!*}L_{\mathbb{O}} = {}^{p(0)+}\bar{j}_{!*}L_{\mathbb{O}}$$

qui est sans torsion sur X et on a la suite exacte courte de faisceau $p(0)$ -pervers sans torsion sur X :

$$0 \rightarrow \bar{j}_!L_{\mathbb{O}} \longrightarrow j_*L_{\mathbb{O}} \longrightarrow \bar{i}^*\bar{j}_*L_{\mathbb{O}} \rightarrow 0.$$

Remarque : le complexe $\bar{i}^*\bar{j}_*L_{\mathbb{O}}$ est le complexe des cycles proches notés $\Psi_{\bar{\eta}}(L_{\mathbb{O}})$ que l'on considère muni de son action du groupe de Galois.

Démonstration. — (i) Le foncteur \bar{j}_* (resp. $\bar{j}_!$) est t -exact à gauche (resp. à droite) pour p et $p+$. Par ailleurs comme d'après [15] §4, $\bar{i}^*\bar{j}_*$ est t -exact relativement à p sur $X_{\bar{\eta}}$ et p sur $X_{\bar{s}}$, on en déduit que \bar{j}_* est t -exact relativement à $p[1]$ sur $X_{\bar{\eta}}$ et $p(1)$ sur X . En ce qui concerne $\bar{j}_!$, considérons le triangle distingué

$$\bar{j}_!\bar{j}^*K \longrightarrow K \longrightarrow \bar{i}_*\bar{i}^*K \rightsquigarrow$$

pour $K = \bar{j}_* L_\mathbb{O}$ avec $L_\mathbb{O}$ qui est $p[1]$ pervers. La suite exacte longue de $p(1)$ -cohomologie et le fait que ${}^p h^r \bar{i}_* \bar{j}_* L_\mathbb{O}$ est nul pour tout $r \neq -1$, donnent la nullité des ${}^{p(1)} h^r \bar{j}_! \bar{j}_* K$ pour tout $r \neq 0$ ainsi que la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \bar{i}_* {}^{p(1)} h^{-1} \bar{i}_* K \rightarrow \bar{j}_! \bar{j}_* K \rightarrow K \rightarrow 0$$

avec ${}^{p(1)} h^{-1} \bar{i}_* K = \Psi_\eta(L_\mathbb{O})$ qui est p -pervers. On en déduit alors que $\bar{j}_!$ est t -exact relativement à $p[1]$ et $p(1)$ ainsi que $\bar{j}_* L_\mathbb{O} = {}^{p(1)} \bar{j}_! L_\mathbb{O}$.

Soit alors $L_\mathbb{O}$ qui est $p[1]+$ pervers et soit

$${}^{p[1]} h^0 L_\mathbb{O} \rightarrow L_\mathbb{O} \rightarrow {}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_\mathbb{O} \rightsquigarrow$$

le triangle distingué associé où ${}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_\mathbb{O}[1]$ est $p[1]$ pervers de torsion et ${}^{p[1]} h^0 L_\mathbb{O}$ est libre. Après application du foncteur exact \bar{j}_* on obtient le triangle distingué

$$\bar{j}_* {}^{p[1]} h^0 L_\mathbb{O} \rightarrow \bar{j}_* L_\mathbb{O} \rightarrow \bar{j}_* {}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_\mathbb{O} \rightsquigarrow$$

où $\bar{j}_* {}^{p[1]} h^0 L_\mathbb{O}$ et $\bar{j}_* {}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_\mathbb{O}[1]$ sont $p(1)$ -pervers. Par ailleurs comme pour tout M qui est $p[1]$ -pervers, $\bar{j}_* M = {}^{p(1)} \bar{j}_! M$, il découle du corollaire 1.2.2 que $\bar{j}_* {}^{p[1]} h^0 L_\mathbb{O}$ (resp. $\bar{j}_* {}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_\mathbb{O}[1]$) est libre (resp. de torsion). On en déduit alors que \bar{j}_* est t -exact à gauche relativement à $p[1]+$ et $p(1)+$ et donc t -exact. La t -exactitude de $\bar{j}_!$ relativement à $p[1]+$ et $p(1)+$ s'en déduit alors comme précédemment.

Remarque : pour tout M qui est $p[1]+$ pervers, $\bar{j}_* M = {}^{p(1)+} \bar{j}_! M$.

(ii) Le raisonnement est strictement identique en notant que relativement aux t -structures p et $p(0)$, $\bar{i}_* \bar{j}_*$ est t -exact de sorte que pour $K = \bar{j}_* L_\mathbb{O}$:

- $\bar{i}_* \bar{i}_* K$ est p -pervers ;
- ${}^{p(1)} \bar{i}_* K = \Psi_\eta(L_\mathbb{O})$ est p -pervers ;
- ${}^{p(1)} h^{-1} \bar{i}_* K$ est nul.

□

1.5. Cas d'un schéma de Hecke. — Soit $\mathbb{X}_\mathcal{I} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ un schéma de Hecke pour $(\mathbb{G}, \mathcal{I})$. Pour $\Lambda = \mathbb{K}$ ou \mathbb{O} . La catégorie $\text{FPH}_\mathbb{G}(\mathbb{X}_\mathcal{I}; \Lambda)$ (resp. $\text{FH}_\mathbb{G}(\mathbb{X}_\mathcal{I}; \Lambda)$) des *faisceaux pervers* (resp. des *faisceaux*) de Hecke sur $\mathbb{X}_\mathcal{I}$ à coefficients dans Λ est définie comme la catégorie dont :

- les objets sont les systèmes $(\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ où \mathcal{F}_I est un faisceau pervers (resp. faisceau) sur \mathbb{X}_I à coefficients dans Λ , tels que pour tout $g \in \mathbb{G}$ et $J \subset I$ tel que $g^{-1} J g \subset I$, on dispose d'un morphisme de faisceaux sur \mathbb{X}_I , $u_{J,I}(g) : \mathcal{F}_I \rightarrow [g]_{J,I,*} \mathcal{F}_J$ soumis à la condition de cocycle

$$u_{K,I}(g'g) = [g]_{J,I,*}(u_{K,J}(g')) \circ u_{J,I}(g)$$

- Les flèches sont les systèmes $(f_I)_{I \in \mathcal{I}}$ avec $f_I : \mathcal{F}_I \longrightarrow \mathcal{F}'_I$ tels que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_I & \xrightarrow{u_{J,I}(g)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_J) \\ \downarrow f_I & & \downarrow [g]_{J,I,*}(f_J) \\ \mathcal{F}'_I & \xrightarrow{u_{J,I}(g)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}'_J) \end{array}$$

Remarque : par rapport à [6] §1.3.7, on a supprimé les conditions (ii) et (iii). Les propositions 6.1 et 6.2 de loc. cit. sont encore valables, i.e. $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$ et $\text{FH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$ sont des catégories abéliennes munies de foncteurs $j_!, i^*$ (resp. Rj_*, i_* , resp. $j_*, Ri^!$) qui sont t -exact à droite (resp. t -exact, resp. t -exact à gauche) avec les propriétés d'adjonction habituelles, de sorte que l'on se retrouve à nouveau dans une situation de recollement.

- Pour $\Lambda = \mathbb{O}$, on demande en outre que les $[g]_{J,I,*}$ restent t -exact. On définit alors
- ${}^p\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \mathbb{O})$ et ${}^{p+}\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \mathbb{O})$ comme ci-dessus en prenant à chaque étage la même t -structure i.e. avec ou sans $+$;
 - les théories de torsion à chaque niveau « induisent » une théorie de torsion sur $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \mathbb{O})$;
 - comme les $[g]_{J,I,*}$ commutent avec le foncteur $\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} (-)$, la théorie de réduction modulaire précédente se prolonge aux faisceaux pervers de Hecke.

Remarque : contrairement à [6], avec notre définition de faisceaux pervers de Hecke, sans les conditions (ii) et (iii) de la définition 1.3.7 de loc. cit., le dual de Grothendieck d'un faisceau pervers de Hecke n'est pas a priori un faisceau pervers de Hecke. On pourra toutefois noter que dans le cas particulier où $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ est un \mathbb{O} -système local pervers sur $j_{\mathcal{I}} : \mathbb{U}_{\mathcal{I}} \hookrightarrow \mathbb{X}_{\mathcal{I}}$ avec $\mathcal{P}_{\mathcal{I}} = {}^p j_{!*, \mathcal{I}} \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ alors $D\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ est un faisceau pervers de Hecke relativement à la t -structure $p+$ isomorphe à ${}^{p+} j_{!*, \mathcal{I}} \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\vee}$.

2. Filtrations de stratification d'un faisceau pervers sans torsion

Pour un Λ -faisceau pervers sans torsion sur un schéma X muni d'une stratification $\{X_{\alpha} : \alpha \in I\}$, nous allons construire des filtrations de celui-ci.

2.1. Rappels sur les pushout et pullback dans une catégorie abélienne. — Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne. Pour $A \rightarrow B$ une flèche entre objets de \mathcal{C} , on rappelle qu'un noyau $K \rightarrow A$ (resp. un conoyau $B \rightarrow Q$) est défini par la propriété universelle suivante : pour tout objet X de \mathcal{C} muni d'une flèche $X \rightarrow A$ (resp. $B \rightarrow X$) telle que le composé avec $A \rightarrow B$ est nul, il existe une flèche $X \rightarrow K$ (resp. $Q \rightarrow X$) telle que le diagramme suivant

commute

$$\begin{array}{ccc}
 X & & \\
 \downarrow & \searrow 0 & \\
 K & \longrightarrow & A \longrightarrow B
 \end{array}
 \quad (\text{ resp. } \quad
 \begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow 0 & \uparrow \\
 A & \longrightarrow & B \longrightarrow Q
 \end{array}
).$$

2.1.1. Définition. — Un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 P & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A & \longrightarrow & C
 \end{array}$$

est un pullback (dit aussi un tiré en arrière) si pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A & \longrightarrow & C
 \end{array}$$

il existe une unique flèche $X \rightarrow P$ telle que $X \rightarrow P \rightarrow A = X \rightarrow A$ et $X \rightarrow P \rightarrow B = X \rightarrow B$.

Dualement on a la définition suivante.

2.1.2. Définition. — Un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C & \longrightarrow & P
 \end{array}$$

est un pushout (dit aussi un poussé en avant) si pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C & \longrightarrow & X
 \end{array}$$

il existe une unique flèche $P \rightarrow X$ telle que $B \rightarrow P \rightarrow X = B \rightarrow X$ et $C \rightarrow P \rightarrow X = C \rightarrow X$.

2.1.3. Théorème. — (cf. [13] §2.1) Dans une catégorie abélienne \mathcal{C} , tout diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & B & \\
 & \downarrow & \\
 A & \longrightarrow & C
 \end{array}
 \quad (\text{ resp. } \quad
 \begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 & & \downarrow \\
 & & C
 \end{array}
)$$

peut être complété en un pullback (resp. pullout) et ce de manière unique à isomorphisme près.

2.1.4. Proposition. — Soit

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

un pullback et $K \rightarrow P$ un noyau de $P \rightarrow B$. Alors $K \rightarrow P \rightarrow A$ est un noyau de $A \rightarrow C$.

Démonstration. — Soit $X \rightarrow A$ tel que $X \rightarrow A \rightarrow C$ est nul ; alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{0} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

est commutatif de sorte qu'il existe une flèche $X \rightarrow P$ telle que $X \rightarrow P \rightarrow A = X \rightarrow A$ et $X \rightarrow P \rightarrow B$ est nul de sorte qu'il existe une unique flèche $X \rightarrow K$ telle que $X \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow A = X \rightarrow A$. Le résultat découle alors de la propriété universelle du noyau. \square

Dualement on la proposition suivante.

2.1.5. Proposition. — Soit

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & P \end{array}$$

un pushout et $P \rightarrow Q$ un conoyau de $C \rightarrow P$. Alors $B \rightarrow P \rightarrow Q$ est un conoyau de $A \rightarrow B$.

Démonstration. — Soit $B \rightarrow X$ telle que $A \rightarrow B \rightarrow X$ est nulle. Le diagramme suivant est alors commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{0} & X \end{array}$$

de sorte qu'il existe une flèche $P \rightarrow X$ telle que $C \rightarrow P \rightarrow X$ est nulle. Ainsi il existe une unique flèche $Q \rightarrow X$ telle que $B \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow X = B \rightarrow X$ et le résultat découle de la propriété universelle du conoyau. \square

Rappelons aussi le résultat suivant.

2.1.6. Proposition. — (cf [13] théorème 2.54) Soit

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

un pullback avec $B \rightarrow C$ surjective ; alors $P \rightarrow A$ est surjective.

Dualement si

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & P \end{array}$$

est un pushout avec $C \rightarrow A$ injective alors $B \rightarrow P$ est injective.

2.1.7. Corollaire. — Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte de \mathcal{C} et soit $C' \rightarrow C$ une flèche de \mathcal{C} . On note

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & C' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & C \end{array}$$

le pullback. Alors $0 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow C' \rightarrow 0$ est exacte.

Démonstration. — D'après la proposition précédente $P \rightarrow C'$ est surjective et d'après 2.1.4, A est un noyau de $P \rightarrow C'$ d'où le résultat. \square

2.1.8. Corollaire. — Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte de \mathcal{C} et soit $A \rightarrow A'$ une flèche de \mathcal{C} . On note

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & P \end{array}$$

le pushout. Alors $0 \rightarrow A' \rightarrow P \rightarrow C \rightarrow 0$ est exacte.

Démonstration. — D'après la proposition précédente, $A' \rightarrow P$ est injective et d'après 2.1.5, C est un conoyau de $A' \rightarrow P$, d'où le résultat. \square

2.2. Stratifications d'un schéma. —

2.2.1. Définition. — Une stratification d'un schéma X est une collection finie

$$\{X_\alpha; \alpha \in I\}$$

de sous-schémas localement fermés de X telle que :

- les X_α sont disjoints deux à deux ;
- $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$;
- pour tout $\alpha \in I$, la frontière $Fr X_\alpha$ s'écrit comme une réunion de strates X_β .

2.2.2. Lemme. — Il existe un unique sous-ensemble $I^= \subset I$ minimal pour la propriété suivante :

$$\bigcup_{\alpha \in I^=} X_\alpha \text{ est dense dans } X.$$

Démonstration. — C'est immédiat puisque l'ensemble des sous ensembles J de I tels que $\bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha$ est dense dans le support de P est non vide et stable par intersection. \square

Remarque : pour $\alpha \neq \beta$ des éléments de $I^=1$, $\overline{X_\alpha}$ et $\overline{X_\beta}$ sont des composantes irréductibles distinctes de X .

2.2.3. Définition. — Pour tout $h \geq 1$, on définit $X^{=h} := \bigcup_{\alpha \in I^=h} X_\alpha$ où $I^=h$ est défini par récurrence

$$I^{=h+1} := I^=1(I_{\geq h+1}), \text{ où } \overline{X^{=h}} - X^{=h} = \bigcup_{\alpha \in I^{\geq h+1}} X_\alpha.$$

2.2.4. Notation. — On note $X^{\geq h} := \overline{X^{=h}} = \bigcup_{\alpha \in I^{\geq h}} X_\alpha$.

Remarque : on obtient ainsi une stratification plus grossière que l'on notera sous la forme suivante

$$X^{\geq 1} \supset X^{\geq 2} \supset \dots X^{\geq k} \supset \emptyset$$

où pour tout $1 \leq h \leq k$, la codimension de $X^{\geq h}$ est supérieure ou égale à $h - 1$ et donc $k - 1$ est inférieur ou égal à la dimension de X .

2.2.5. Notation. — On note $j^{\geq h}$ l'inclusion $X^{=h} \hookrightarrow X^{\geq h}$ et $i_{\geq h} : X^{\geq h} \hookrightarrow X$.

2.3. Saturation. — On reprend les notations du §7, \mathcal{C} désigne le cœur d'une catégorie dérivée triangulée munie d'une t -structure. On suppose que \mathcal{C} est \mathbb{O} -linéaire noethérienne munie de la théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ comme dans la proposition 1.1.1 ; on note alors ${}^+\mathcal{C}$ la catégorie abélienne artinienne qui lui est associée munie de sa théorie de torsion $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$, cf. le corollaire 1.1.4. On considère alors une flèche $A \rightarrow P$ entre deux objets de $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$.

2.3.1. Lemme. — Si $A \rightarrow P$ est une inclusion dans ${}^+\mathcal{C}$ alors c'est aussi une inclusion dans \mathcal{C} .

Démonstration. — La suite exacte courte de ${}^+\mathcal{C}$

$$0 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow B \rightarrow 0$$

définit un triangle distingué $A \rightarrow P \rightarrow B \rightsquigarrow$ où B est tant que quotient dans ${}^+\mathcal{C}$ d'un objet divisible est donc divisible. Ainsi tous les termes de ce triangle distingué appartiennent à \mathcal{C} de sorte que la suite est aussi exacte dans \mathcal{C} . \square

Remarque : une inclusion $A \rightarrow P$ dans \mathcal{C} est une inclusion dans ${}^+\mathcal{C}$ si et seulement si le quotient P/A est sans torsion dans \mathcal{C} . Dualement on a le lemme suivant.

2.3.2. Lemme. — Si $A \rightarrow P$ est une surjection dans \mathcal{C} , alors c'est une surjection dans ${}^+\mathcal{C}$.

Démonstration. — La suite exacte courte de \mathcal{C}

$$0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow 0$$

définit un triangle distingué $B \rightarrow A \rightarrow P \rightsquigarrow$ où B en tant que sous-objet d'un objet libre de \mathcal{C} est un objet de ${}^+\mathcal{C}$ et donc tous les termes de ce triangle appartiennent à ${}^+\mathcal{C}$ et donc la suite précédente est aussi exacte dans ${}^+\mathcal{C}$. \square

Remarque : une surjection $A \rightarrow P$ dans ${}^+\mathcal{C}$ est une surjection dans \mathcal{C} si et seulement si le noyau dans ${}^+\mathcal{C}$ de $A \rightarrow P$ est sans torsion.

2.3.3. Lemme. — Soit $f_{\mathbb{O}} : A \rightarrow B$ est une flèche entre deux objets de $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$ telle que $f_{\mathbb{K}}$ est un isomorphisme. Alors $f_{\mathbb{O}}$ est un isomorphisme si et seulement si c'est une injection dans ${}^+\mathcal{C}$ et/ou une surjection dans \mathcal{C} .

2.3.4. Proposition. — Soit $i : A \hookrightarrow P$ une inclusion dans \mathcal{C} avec A et P sans torsion dans \mathcal{C} ; il existe alors une unique factorisation $A \rightarrow B \rightarrow P$ de f dans \mathcal{C} telle que :

- B est sans torsion dans \mathcal{C} ;
- le conoyau de $B \rightarrow P$ dans \mathcal{C} soit sans torsion ;
- le conoyau de $A \rightarrow B$ dans \mathcal{C} est de torsion.

On appellera B le saturé de i lequel est alors obtenu comme l'image de i dans ${}^+\mathcal{C}$.

Démonstration. — Vérifions tout d'abord que $B = \text{Im}_{+C} i$ convient ; comme B est le quotient dans ${}^+\mathcal{C}$ de A qui est divisible dans ${}^+\mathcal{C}$, on en déduit que B est sans torsion dans ${}^+\mathcal{C}$ et appartient donc aussi à \mathcal{C} . Ainsi comme i est injective dans \mathcal{C} on en déduit que A est un sous-objet de B dans \mathcal{C} .

Considérons la suite exacte courte de ${}^+\mathcal{C}$: $0 \rightarrow P \rightarrow D \rightarrow 0$ où D en tant que quotient dans ${}^+\mathcal{C}$ d'un objet divisible, est sans torsion et donc un objet de \mathcal{C} . Le triangle distingué associé est alors constitué d'objets de \mathcal{C} et donc une suite exacte courte dans \mathcal{C} avec donc D sans torsion.

De même considérons la suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow 0$ dans \mathcal{C} où E est un objet de \mathcal{C} . On obtient alors un triangle distingué $E[1] \rightarrow A \rightarrow B \rightsquigarrow$ associé à la surjection dans ${}^+\mathcal{C}$: $A \twoheadrightarrow B$ de sorte que $D[1]$ est un objet de ${}^+\mathcal{C}$ et donc D est un objet de torsion de \mathcal{C} .

Considérons alors B' une autre factorisation vérifiant les conditions de l'énoncé ; comme précédemment on a $A \hookrightarrow B'$ dans \mathcal{C} et donc une suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B' \rightarrow E' \rightarrow 0$ avec par hypothèse E' de torsion de sorte que dans ${}^+\mathcal{C}$, $A \rightarrow B'$ est surjective. La propriété de l'octaèdre donne alors que le cône D' de $B' \rightarrow P$ est un objet de \mathcal{C} : en effet son h^{-1} s'injecte dans E' et aussi dans B il est donc libre et de torsion et donc nul. Ainsi donc $B \hookrightarrow X$ dans \mathcal{C} avec un conoyau sans torsion. Ainsi la suite exacte courte dans \mathcal{C} : $0 \rightarrow B \rightarrow P \rightarrow D \rightarrow 0$ est aussi une suite exacte courte dans ${}^+\mathcal{C}$ et d'après la propriété

universelle de l'image, on a $\text{Im}_{+C} f \hookrightarrow B'$ dans ${}^+C$; ainsi comme dans ${}^+C$, $A \rightarrow B'$ est surjective, on a bien $B' = \text{Im}_{+C} f$. \square

2.3.5. Corollaire. — Soit $f : A \rightarrow P$ une flèche entre objets sans torsion de C alors $\text{Im}_C f$ est un sous-objet dans C de $B = \text{Im}_{+C} f$ avec :

- B un objet sans torsion de C ;
- dans C , $B \hookrightarrow P$ avec P/B sans torsion.

Démonstration. — On prend $i : A' = \text{Im}_C f \hookrightarrow P$ dont on prend le saturé; pour affirmer que ce saturé est $B = \text{Im}_{+C} f$ il suffit de voir que :

- B est sans torsion dans C ;
- $B \hookrightarrow P$ dans C avec P/B sans torsion dans C ;
- $A' \hookrightarrow B$ dans C avec B/A' de torsion.

Le premier point découle simplement du fait que B est un quotient dans ${}^+C$ de A' qui est un objet sans torsion de ${}^+C$. La suite exacte courte dans ${}^+C$: $0 \rightarrow B \rightarrow P \rightarrow D \rightarrow 0$, comme P est divisible sans ${}^+C$, montre que D est sans torsion dans ${}^+C$ et appartient donc à C de sorte que la suite précédente est aussi une suite exacte courte de C ce qui montre le deuxième point. D'après la propriété universelle de l'image, on en déduit que $A' \hookrightarrow B$ dans C et comme la flèche $A \rightarrow A' \hookrightarrow B$ dans C est surjective dans ${}^+C$, on obtient B/A' de torsion dans C , d'où le résultat. \square

2.4. Cas d'une situation de recollement. — Soit

$$\begin{array}{ccc} \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j^*} \\ \mathcal{D}_F & \xrightarrow{i_*} \mathcal{D} & \xrightarrow{j^*} \mathcal{D}_U \\ \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j_!} \end{array}$$

une situation de recollement telle que :

- \mathcal{D}_F et \mathcal{D}_U sont munis d'une t -structure $(\mathcal{D}_F^{\leq 0}, \mathcal{D}_F^{\geq 0})$ et $(\mathcal{D}_U^{\leq 0}, \mathcal{D}_U^{\geq 0})$ de sorte que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{K \in \mathcal{D} : j^*K \in \mathcal{D}_U^{\leq 0} \text{ et } i^*K \in \mathcal{D}_F^{\leq 0}\} \\ \mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{K \in \mathcal{D} : j^*K \in \mathcal{D}_U^{\geq 0} \text{ et } i^!K \in \mathcal{D}_F^{\geq 0}\}. \end{aligned}$$

est la t -structure sur \mathcal{D} obtenue par recollement ;

- \mathcal{C}_F et \mathcal{C}_U sont des catégories abéliennes \mathbb{O} -linéaires munies des théories de torsion $(\mathcal{T}_F, \mathcal{F}_F)$, et $(\mathcal{T}_U, \mathcal{F}_U)$ de sorte que

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &:= \{P \in C : {}^p i^* P \in \mathcal{T}_F \text{ et } j^* P \in \mathcal{T}_U\} \\ \mathcal{F} &:= \{P \in C : {}^p i^! P \in \mathcal{F}_F \text{ et } j^* P \in \mathcal{F}_U\} \end{aligned}$$

est une théorie de torsion sur la catégorie abélienne \mathbb{O} -linéaire C .

Comme au corollaire 1.1.4, on notera

$$\begin{aligned} {}^+ \mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{A \in \mathcal{D}^{\leq 1} : h^1(A) \in \mathcal{T}\} \\ {}^+ \mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{A \in \mathcal{D}^{\geq 0} : h^0(A) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

la t -structure duale de cœur ${}^+\mathcal{C}$ muni de sa théorie de torsion $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$ « duale » de celle de \mathcal{C} .

Remarque : les objets de \mathcal{F} sont divisibles dans ${}^+\mathcal{C}$ muni de la théorie de torsion $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$.

Soit désormais $P_\Lambda \in \mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$, autrement dit $P_\Lambda \in \mathcal{F}$ dans \mathcal{C} . Considérons alors le diagramme commutatif dans \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & P_\Lambda & \xrightarrow{\quad} & {}^p j_* j^* P_\Lambda & \xrightarrow{\quad} & {}^{p+} j_* j^* P_\Lambda \\
 & \nearrow & \uparrow & & \uparrow & & \nearrow \\
 {}^p j! j^* P_\Lambda & \longrightarrow & {}^{p+} j! j^* P_\Lambda & \longrightarrow & {}^p j!_* j^* P_\Lambda & \longrightarrow & {}^{p+} j!_* j^* P
 \end{array}$$

Remarque : d'après le corollaire 1.2.2, ${}^{p+} j! j^* P_\Lambda$ est sans torsion et on a la suite exacte courte de \mathcal{C} :

$$0 \rightarrow {}^p h_{\text{libre}}^{-1} i^* j_* j^* P_\Lambda \rightarrow {}^{p+} j! j^* P_\Lambda \rightarrow {}^p j!_* j^* P_\Lambda \rightarrow 0. \quad (2.4.1)$$

2.4.2. Définition. — On pose

- $\text{Fil}_U^1(P_\Lambda)$ l'image dans ${}^+\mathcal{C}$ de ${}^{p+} j! j^* P_\Lambda \rightarrow P_\Lambda$;
- $\text{Fil}_U^0(P_\Lambda)$ l'image dans ${}^+\mathcal{C}$ de

$${}^p h_{\text{libre}}^{-1} i^* j_* j^* P_\Lambda \rightarrow {}^{p+} j! j^* P_\Lambda \hookrightarrow \text{Fil}_U^1(P_\Lambda).$$

2.4.3. Lemme. — Les faisceaux pervers $\text{Fil}_U^0(P_\Lambda)$ et $\text{Fil}_U^1(P_\Lambda)$ définissent dans \mathcal{C} une filtration

$$\text{Fil}_U^0(P_\Lambda) \subset \text{Fil}_U^1(P_\Lambda) \subset P_\Lambda$$

telle que :

- les gradués sont sans torsion dans \mathcal{C} ;
- on a une surjection naturelle dans ${}^+\mathcal{C}$:

$${}^{p+} j!_* j^* P_\Lambda \twoheadrightarrow \text{Fil}_U^1(P_\Lambda) / \text{Fil}_U^0(P_\Lambda);$$

- $P_\Lambda / \text{Fil}_U^1(P_\Lambda) \simeq i_* {}^{p+} i^* P_\Lambda$.

Démonstration. — - Notons tout d'abord que $\text{Fil}_U^1(P_\Lambda)$ est un quotient dans ${}^+\mathcal{C}$ d'un faisceau pervers ${}^{p+} j! j^* P_\Lambda \in \mathcal{F}$ divisible, de sorte qu'il est sans torsion et donc, dans ${}^+\mathcal{C}$, l'inclusion $\text{Fil}_U^1(P_\Lambda) \hookrightarrow P_\Lambda$ est, d'après 2.3.1, une inclusion dans \mathcal{C} également.

- De la même façon $\text{Fil}_U^0(P_\Lambda)$ est un quotient dans ${}^+\mathcal{C}$ d'un faisceau pervers ${}^p h_{\text{libre}}^{-1} i^* j_* P_\Lambda$ divisible, et est donc sans torsion de sorte que, dans ${}^+\mathcal{C}$, l'inclusion $\text{Fil}_U^0(P_\Lambda) \hookrightarrow \text{Fil}_U^1(P_\Lambda)$ est aussi, d'après 2.3.1, une inclusion dans \mathcal{C} .

- D'après 2.3.4, $P_\Lambda / \text{Fil}_U^1(P_\Lambda)$ appartient à $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$. De la suite exacte courte dans ${}^+\mathcal{C}$

$$0 \rightarrow i_* {}^{p+} h^{-1} i^* P_\Lambda \rightarrow {}^{p+} j! j^* P_\Lambda \rightarrow P_\Lambda \rightarrow i_* {}^{p+} h^0 i^* P_\Lambda \rightarrow 0,$$

on en déduit alors que $P_\Lambda / \text{Fil}_U^1(P_\Lambda) \simeq i_* {}^{p+} h^0 i^* P_\Lambda$.

- Dans ${}^+\mathcal{C}$, $\text{Fil}_U^1(P_\Lambda) / \text{Fil}_U^0(P_\Lambda)$ est un quotient de l'objet divisible ${}^p j_* j^* P_\Lambda$ et appartient donc à $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$. \square

On résume les constructions précédentes par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 {}^p j_{!*} j^* P_\Lambda & \xrightarrow{+\mathcal{C}} & \mathrm{Fil}_U^1(P_\Lambda) / \mathrm{Fil}_U^0(P_\Lambda) & & \\
 \uparrow \mathcal{C} & & \uparrow c_{n+c} & & \\
 {}^p j_* j^* P_\Lambda & \xrightarrow{+\mathcal{C}} & \mathrm{Fil}_U^1(P_\Lambda) & \xleftarrow{c_{n+c}} & P_\Lambda \xrightarrow{c_{n+c}} i_* {}^p j^* P_\Lambda \\
 \uparrow \mathcal{C} & & \uparrow c_{n+c} & & \\
 {}^p h_{libre}^{-1} i^* j_* j^* P_\Lambda & \xrightarrow{+\mathcal{C}} & \mathrm{Fil}_U^0(P_\Lambda) & &
 \end{array}$$

Remarque : en ce qui concerne le quotient $gr_U^1(P_\Lambda) := \mathrm{Fil}_U^1(P_\Lambda) / \mathrm{Fil}_U^0(P_\Lambda)$, on peut écrire la surjection du lemme précédent comme une suite d'inclusions dans \mathcal{C}

$${}^p j_{!*} j^* P_\Lambda \hookrightarrow gr_U^1(P_\Lambda) \hookrightarrow {}^p j_* j^* P_\Lambda,$$

et on dit que $gr_U^1(P_\Lambda)$ est « coïncé » entre les deux extensions intermédiaires.

2.4.4. Définition. — Avec les notations précédentes, $\mathrm{Fil}_U^1(P_\Lambda)$ (resp. $\mathrm{Fil}_U^0(P_\Lambda)$) est dit saturé si dans la définition 2.4.2, l'image est prise dans \mathcal{C} . Si $\mathrm{Fil}_U^0(P_\Lambda)$ et $\mathrm{Fil}_U^1(P_\Lambda)$ sont tous deux saturés, on dira que la filtration $\mathrm{Fil}_U^0(P_\Lambda) \subset \mathrm{Fil}_U^1(P_\Lambda) \subset P_\Lambda$ est saturée.

Remarque : dans le cas où la filtration est saturée, le gradué $gr_U^1(P_\Lambda)$ est ${}^p j_{!*} j^* P_\Lambda$.

Dualement, en utilisant la suite exacte courte de \mathcal{C}

$$0 \rightarrow {}^p j_{!*} j^* P_\Lambda \rightarrow {}^p j_* j^* P_\Lambda \rightarrow {}^p h_{libre}^0 i^* j_* j^* P_\Lambda \rightarrow 0$$

et le fait que ${}^p j_* j^* P_\Lambda$ est sans torsion dans \mathcal{C} , on définit la cofiltration suivante.

2.4.5. Définition. — On pose

- $\mathrm{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda)$ l'image dans \mathcal{C} de $P_\Lambda \rightarrow {}^p j_* j^* P_\Lambda$;
- $\mathrm{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda)$ l'image dans \mathcal{C} de

$$P_\Lambda \rightarrow {}^p j_* j^* P_\Lambda \rightarrow {}^p i_* {}^p h_{libre}^0 i^* j_* j^* P_\Lambda.$$

Remarque : on obtient ainsi une cofiltration dans \mathcal{C}

$$P_\Lambda \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda) \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda)$$

avec $\mathrm{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda)$ (resp. $\mathrm{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda)$) qui est un sous-objet du faisceau pervers libre ${}^p j_* j^* P_\Lambda$ (resp. ${}^p i_* {}^p h_{libre}^0 i^* j_* j^* P_\Lambda$) et appartient donc à $\mathcal{C} \cap {}^+ \mathcal{C}$. En ce qui concerne le noyau $\mathrm{cogr}_{U,-1}(P_\Lambda)$ de $\mathrm{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda) \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda)$, on a les inclusions dans \mathcal{C} :

$${}^p j_{!*} j^* P_\Lambda \hookrightarrow \mathrm{cogr}_{U,-1}(P_\Lambda) \hookrightarrow {}^p j_{!*} j^* P_\Lambda.$$

En ce qui concerne le noyau de $P_\Lambda \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda)$, en vertu de la suite exacte dans \mathcal{C} :

$$0 \rightarrow i_* {}^p i^! P_\Lambda \rightarrow P_\Lambda \rightarrow {}^p j_* j^* P_\Lambda \rightarrow i_* {}^p h^1 i^! P_\Lambda \rightarrow 0,$$

on en déduit qu'il est isomorphe à $i_* {}^p i^! P_\Lambda$.

On résume cette construction par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
& & \text{cogr}_{U,-1}(P_\Lambda) & \xrightarrow{\mathcal{C}} & {}^{p+}j_{!*}j^*P_\Lambda \\
& & \downarrow \mathcal{C} & & \downarrow \mathcal{C} \\
i_*{}^p i^! P_\Lambda & \xrightarrow{\mathcal{C}^{n+\mathcal{C}}} & P & \xrightarrow{\mathcal{C}^{n+\mathcal{C}}} & \text{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda) & \xrightarrow{\mathcal{C}} & {}^p j_* j^* P_\Lambda \\
& & \downarrow \mathcal{C} & & \downarrow \mathcal{C} \\
& & \text{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda) & \xrightarrow{\mathcal{C}} & {}^p h_{\text{libre}}^0 i^* j_* j^* P_\Lambda
\end{array}$$

2.4.6. Proposition. — Si \mathcal{D} est muni d'une dualité D qui :

- échange ! et * ;
- permute \mathcal{C} et ${}^+\mathcal{C}$;
- et telle que $D(P_\Lambda) \simeq P_\Lambda$.

alors

$$\begin{aligned}
\text{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda) &\simeq D\left(\text{Fil}_U^1(P_\Lambda)\right) \\
\text{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda) &\simeq D\left(\text{Fil}_U^0(P_\Lambda)\right).
\end{aligned}$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que si $P \hookrightarrow Q$ est une injection dans \mathcal{C} alors $DQ \twoheadrightarrow DP$ est une surjection dans ${}^+\mathcal{C}$. \square

Remarque : la filtration $\text{Fil}_U^0(P_\Lambda) \subset \text{Fil}_U^1(P_\Lambda)$ est saturée si et seulement si, dans la définition 2.4.5, les quotients

$${}^p j_* j^* P_\Lambda / \text{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda) \text{ et } \left({}^p i_* {}^p h_{\text{libre}}^0 i^* j_* P_\Lambda \right) / \text{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda)$$

sont sans torsion.

Remarque : La filtration $\text{Fil}_U^0(P_\Lambda) \subset \text{Fil}_U^1(P_\Lambda) \subset P_\Lambda$ définit une cofiltration dans $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$

$$P_\Lambda \twoheadrightarrow / \text{Fil}_{U,0}(P_\Lambda) \twoheadrightarrow / \text{Fil}_{U,1}(P_\Lambda)$$

où on a posé $/ \text{Fil}_{U,0}(P_\Lambda) := P_\Lambda / \text{Fil}_U^0(P_\Lambda)$ et $/ \text{Fil}_{U,1}(P_\Lambda) := P_\Lambda / \text{Fil}_U^1(P_\Lambda)$. De même la cofiltration $P_\Lambda \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda)$, définit une filtration dans $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$

$$/ \text{CoFil}_U^{-1}(P_\Lambda) \hookrightarrow / \text{CoFil}_U^0(P_\Lambda) \hookrightarrow P_\Lambda$$

avec par définition $\text{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda) = P_\Lambda / / \text{CoFil}_U^0(P_\Lambda)$ et $\text{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda) = P_\Lambda / / \text{CoFil}_U^{-1}(P_\Lambda)$. À priori ces deux filtrations (resp. cofiltrations) ne sont pas égales comme nous le verrons dans l'exemple donné par le faisceau pervers des cycles proches d'une variété de Shimura unitaire., cf. la figure 4. Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned}
/ \text{CoFil}_U^{-1}(P_\Lambda) &\simeq D\left(/ \text{Fil}_{U,1}(DP_\Lambda)\right) \\
/ \text{CoFil}_U^0(P_\Lambda) &\simeq D\left(/ \text{Fil}_{U,0}(DP_\Lambda)\right).
\end{aligned}$$

2.5. Recollement d'une t -structure perverse. — Comme au §1.4, S désignera soit le spectre d'un corps, soit celui d'un anneau de valuation discrète hensélien A ou encore celui de \bar{A} le normalisé de A dans une clôture algébrique du corps des fractions de A . On considère alors X un schéma de type fini sur S . Pour $j : U \hookrightarrow X$ une inclusion d'un ouvert dense contenant la fibre générique X_η (resp. $X_{\bar{\eta}}$) si $S = \text{Spec } A$ (resp. $S = \text{Spec } \bar{A}$) avec $i : F := X - U \hookrightarrow X$, on est dans une situation de recollement ce qui permet d'appliquer les constructions du paragraphe précédent.

2.5.1. Lemme. — Pour $S = \text{Spec } k$ et $P_\mathbb{O} \in {}^p\text{FP}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$ tel que $P_\mathbb{K} := P_\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ est simple de support dense dans X . Il existe alors un ouvert dense $j : U \hookrightarrow X$ et un système local libre $\mathcal{L}_\mathbb{O}$ sur U tels que

$${}^p j_{!*} \mathcal{L}_\mathbb{O}[-\dim X] \hookrightarrow P_\mathbb{O} \hookrightarrow {}^{p+} j_{!*} \mathcal{L}_\mathbb{O}[-\dim X].$$

Démonstration. — Pour tout $s < -\dim X$, $h^{-s} P_\mathbb{O}$ est nul de support et pour $s = -\dim X$ soit $j : U \hookrightarrow X$ tel que $\mathcal{L}_\mathbb{O}[-\dim X] := j^* P_\mathbb{O}$ est localement constant sans torsion. Avec les notations du paragraphe précédent, soit

$$\text{Fil}_U^0(P_\mathbb{O}) \subset \text{Fil}_U^1(P_\mathbb{O}) \subset P_\mathbb{O}.$$

Comme

- $P_\mathbb{K}$ est simple ;
- $\text{Fil}_U^1(P_\mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ est non nul, vu le choix de U ;

on en déduit que $\text{Fil}^0(P_\mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ est nul et comme il est sans torsion, il est nul. De même $(P_\mathbb{O} / \text{Fil}_U^1(P_\mathbb{O})) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ est nul et sans torsion, il est nul. \square

2.6. Filtration et cofiltration de stratification. — Soit X un schéma muni d'une filtration $\mathfrak{S} = (X_\alpha)_{\alpha \in I}$; par la construction du paragraphe 2.2, on se ramène à la situation

$$X^{\geq 1} \supset X^{\geq 2} \supset \dots \supset X^{\geq d} \neq \emptyset,$$

avec les notations de 2.2.5. Pour $\Lambda = \mathbb{K}, \mathbb{O}$ ou \mathbb{F} et $P_\Lambda \in {}^p\text{FP}(X, \Lambda)$ un faisceau pervers sur X sans torsion, on se propose de définir des filtrations de P_Λ dont les gradués sont sans torsion.

Remarque : dans le cas $\Lambda = \mathbb{K}$ ou \mathbb{F} , les faisceaux pervers sont automatiquement sans torsion. Les constructions suivantes s'appliquent pour d'autres anneaux Λ où p est inversible.

2.6.1. Définition. — Avec les notations de 2.4.2, on définit

$$\text{Fil}_\mathfrak{S}^0(P_\Gamma) := i_{h,*} \text{Fil}_{X=h}^1(P_\Gamma),$$

où h est tel que le support de P_Λ est dense dans $X^{\geq h}$.

2.6.2. Proposition. — Tout faisceau pervers $P_\Gamma \in {}^p\text{FP}(X, \Lambda)$ sans torsion sur X muni d'une stratification \mathfrak{S} , peut-être muni functoriellement d'une filtration dans ${}^p\text{FP}(X, \Lambda)$

$$\text{Fil}_\mathfrak{S}^0(P_\Gamma) \subset \text{Fil}_\mathfrak{S}^1(P_\Gamma) \subset \dots \subset \text{Fil}_\mathfrak{S}^r(P_\Gamma) = P_\Gamma$$

telle que :

- r est inférieur ou égal à la dimension du support de P_Λ ;
- tous les gradués $gr_{\mathfrak{S}}^q(P_\Lambda) := \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^q(P_\Lambda) / \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{q-1}(P_\Lambda)$ sont sans torsion dans ${}^p\text{FP}(X, \Lambda)$;
- $\text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(P_\Lambda)$ a été défini ci-avant ;
- $\text{Fil}_{\mathfrak{S}}^k(P_\Lambda) / \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{k-1}(P_\Lambda)$ est le $\text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0$ de $P_\Lambda / \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{k-1}(P_\Lambda)$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur la dimension du support de P_Λ ; le cas où la dimension est nulle étant trivial supposons donc le résultat acquis jusqu'à la dimension $r - 1$ et traitons le cas où la dimension du support de P_Λ est égale à r . Par construction le quotient $Q := P_\Gamma / \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(P_\Gamma)$ est à support dans la frontière de U_P et est donc de dimension strictement inférieure à celle de P_Γ . Soit alors $\text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(Q) \subset \dots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{r-1}(Q)$ de sorte que les tirés en arrière suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(P_\Lambda) & \longrightarrow & P_\Lambda & \longrightarrow & Q = {}^{p+}i_P^* P_\Lambda \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow = & & \uparrow \text{J} & & \uparrow \text{J} \\
0 & \longrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(P_\Lambda) & \longrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^r(P_\Lambda) & \dashrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{r-1}(Q) \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow = & & \uparrow \text{J} & & \uparrow \text{J} \\
0 & \longrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(P_\Lambda) & \longrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{r-1}(P_\Lambda) & \dashrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{r-2}(Q) \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow = & & \uparrow \text{J} & & \uparrow \text{J} \\
0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \dots & \dashrightarrow & \dots \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow = & & \uparrow \text{J} & & \uparrow \text{J} \\
0 & \longrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(P_\Lambda) & \longrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^1(P_\Lambda) & \dashrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(Q) \longrightarrow 0
\end{array}$$

définissent la filtration demandée. □

2.6.3. Notation. — La filtration construite dans la proposition précédente sera dite de \mathfrak{S} -stratification et on notera

$$\text{EFil}_{\mathfrak{S},1}^{p,q}(P_\Lambda) = h^{p+q} gr_{\mathfrak{S}}^{-p}(P_\Lambda) \Rightarrow h^{p+q} P_\Lambda$$

la suite spectrale qui lui est associée et qui calcule les faisceaux de cohomologie de P_Λ .

2.6.4. Définition. — On dira que P_Λ est :

- \mathfrak{S} -saturée si à chaque étape de la construction le Fil_U^1 est saturé au sens de la définition 2.4.4 ;
- \mathfrak{S} -dégénéré si la suite spectrale spectrale $\text{EFil}_{\mathfrak{S},r}^{p,q}$ dégénère en E_1 .

Remarque : les faisceaux de cohomologie d'un faisceau pervers sans torsion P_Λ qui est saturé et dégénéré, se calculent aisément une fois que l'on connaît les suites spectrales de faisceaux de cohomologie des extensions par zéro des systèmes locaux de plus grand support

des $gr_{\mathfrak{S}}^q(P_{\Lambda})$; le contrôle de ces suites spectrales est d'autant plus facile que l'aboutissement est connu puisque nul en dehors du support du système local considéré.

Dualement, on peut définir des cofiltrations.

2.6.5. Définition. — Avec les notations précédentes, on pose

$$\mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},0}(P_{\Gamma}) := i_{h,*} \mathrm{CoFil}_{X=h,-1}(P_{\Gamma}),$$

où h est tel que le support de P_{Λ} est dense dans $X^{\geq h}$.

En raisonnant par récurrence sur la dimension du support de P_{Λ} et en utilisant des push-out comme dans le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & K := p_i^! P_{\Lambda} & \longrightarrow & P_{\Lambda} & \longrightarrow & \mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},0}(P_{\Lambda}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\
 0 & \longrightarrow & \mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},1-r}(K) & \longrightarrow & \mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},-r}(P_{\Lambda}) & \longrightarrow & \mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},0}(P_{\Lambda}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\
 0 & \longrightarrow & \mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},2-r}(K) & \longrightarrow & \mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},1-r}(P_{\Lambda}) & \longrightarrow & \mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},0}(P_{\Lambda}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\
 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\
 0 & \longrightarrow & \mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},0}(K) & \longrightarrow & \mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},-1}(P_{\Lambda}) & \longrightarrow & \mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},0}(P_{\Lambda}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

on obtient la proposition duale de 2.6.2.

2.6.6. Proposition. — *Tout faisceau pervers $P_{\Gamma} \in {}^p\mathrm{FP}(X, \Lambda)$ sans torsion sur X muni d'une stratification \mathfrak{S} , peut-être muni functoriellement d'une cofiltration dans ${}^p\mathrm{FP}(X, \Lambda)$*

$$P_{\Gamma} = \mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},-r}(P_{\Gamma}) \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},1-r}(P_{\Gamma}) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},0}(P_{\Gamma})$$

telle que :

- r est la dimension du support de P_{Λ} ;
- tous les gradués sont sans torsion dans ${}^p\mathrm{FP}(X, \Lambda)$;
- $\mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},0}(P_{\Lambda})$ a été défini ci-avant ;
- $\mathrm{Ker}\left(\mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},-k}(P_{\Lambda}) \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},1-k}(P_{\Lambda})\right)$ est le $\mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},0}$ de $\mathrm{Ker}\left(P_{\Lambda} \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},1-k}(P_{\Lambda})\right)$.

2.6.7. Définition. — La cofiltration construite dans la proposition précédente sera dite de \mathfrak{S} -stratification.

En reprenant la preuve de 2.4.6, on en déduit le résultat suivant.

2.6.8. Lemme. — *La dualité de Verdier échange la filtration et la cofiltration définies ci-avant :*

$$D\left(\mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},-k}(P_\Lambda)\right) \simeq \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S}}^k(DP_\Lambda).$$

Remarque : la cofiltration (resp. la filtration) associée à la filtration $\mathrm{Fil}_{\mathfrak{S}}^k(P_\Lambda)$ (resp. la cofiltration $\mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S},k}(P_\Lambda)$) sera notée ${}^/ \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},k}(P_\Lambda)$ (resp. ${}^/ \mathrm{CoFil}_{\mathfrak{S}}^k(P_\Lambda)$) dont les gradués appartiennent à $\mathcal{C} \cap {}^+ \mathcal{C}$.

2.7. Filtration et cofiltration \mathfrak{S} -exhaustives. — Soit X un schéma muni d'une stratification \mathfrak{S} et P_Λ un faisceau pervers sans torsion de ${}^p \mathrm{FP}(X, \Lambda)$ que l'on suppose \mathfrak{S} -constructible, i.e. ses faisceaux de cohomologie sont constructibles relativement à la stratification \mathfrak{S} . Autrement dit si on note \mathfrak{S}_P la stratification la moins fine de sorte que P_Λ est \mathfrak{S}_P -constructible, \mathfrak{S} est plus fine que \mathfrak{S}_P .

2.7.1. Proposition. — *Par application successives des filtrations $\mathrm{Fil}_U^0 \subset \mathrm{Fil}_U^1$ de la définition 2.4.2, tout faisceau pervers P_Λ sans torsion dans ${}^p \mathrm{FP}(X, \Lambda)$ sur X peut être muni fonctoriellement d'une filtration dans ${}^p \mathrm{FP}(X, \Lambda)$*

$$\mathrm{Fill}^0(P_\Lambda) \subset \mathrm{Fill}^1(P_\Lambda) \subset \cdots \subset \mathrm{Fill}^d(P_\Lambda) = P_\Lambda$$

telle que :

- d est un entier assez grand ;
- les gradués $\mathrm{grr}^k(P_\Lambda)$ sont sans torsion ;
- pour tout $0 \leq k \leq d$, il existe $\alpha(k) \in I$ ainsi qu'un système local $\mathcal{L}(k)$ sur $X_{\alpha(k)}$ et des injections dans ${}^p \mathrm{FP}(X, \Lambda)$:

$${}^p j_{\alpha(k),!} \mathcal{L}(k) \hookrightarrow \mathrm{grr}^k(P_\Lambda) \hookrightarrow {}^{p+} j_{\alpha(k),!} \mathcal{L}(k).$$

Démonstration. — On considère une stratification \mathfrak{S} de X plus fine que \mathfrak{S}_P . On raisonne par récurrence sur la dimension r de P_Λ ; le cas $r = 0$ étant trivial, on suppose le résultat acquis jusqu'au rang $r - 1$ et traitons le cas de r . On considère la filtration de la définition 2.4.2

$$\mathrm{Fil}_{U_P}^0(P_\Lambda) \subset \mathrm{Fil}_{U_P}^1(P_\Lambda) \subset P_\Lambda$$

où :

- $\mathrm{Fil}_{U_P}^0(P_\Lambda)$ et $P_\Lambda / \mathrm{Fil}_{U_P}^1(P_\Lambda)$ sont de dimension strictement inférieure à r et donc d'après l'hypothèse de récurrence, munies de telles filtrations ;
- $gr := \mathrm{Fil}_{U_P}^1(P_\Lambda) / \mathrm{Fil}_{U_P}^0(P_\Lambda)$ est tel que

$${}^p j_{U_P,!} j_{U_P}^* P_\Lambda \hookrightarrow gr \hookrightarrow {}^{p+} j_{U_P,!} j_{U_P}^* P_\Lambda.$$

Comme P_Λ est \mathfrak{S} -constructible, on en déduit que pour tout $\alpha \in I(P)$, $\mathcal{L}_\alpha := j_\alpha^* P_\Lambda$ est localement constant de sorte que gr se décompose en une somme directe $\bigoplus_{\alpha \in I(P)} gr_\alpha$ avec

$${}^p j_{\alpha,!} \mathcal{L}_\alpha \hookrightarrow gr_\alpha \hookrightarrow {}^{p+} j_{\alpha,!} \mathcal{L}_\alpha.$$

On procède alors comme dans le paragraphe précédent par pull-back, pour obtenir la filtration de l'énoncé. \square

Remarque : la construction précédente ne dépend que de \mathfrak{S}_P et pas du choix de \mathfrak{S} plus fine que \mathfrak{S}_P ce qui nous permet d'ôter \mathfrak{S} des notations.

2.7.2. Définition. — La filtration construite à la proposition précédente sera dite de stratification exhaustive; on dira que le faisceau pervers est exhaustivement saturé si sa filtration exhaustive l'est, i.e. si à chaque étape de la construction les Fil_U^0 et Fil_U^1 sont saturés au sens de la définition 2.4.4.

2.7.3. Notation. — On notera

$$\text{EFill}_1^{p,q}(P_\Lambda) = h^{p+q} \text{grr}^{-p}(P_\Lambda) \Rightarrow h^{p+q} P_\Lambda$$

la suite spectrale associée à la filtration exhaustive de P_Λ qui calcule ses faisceaux de cohomologie.

Dualement, on construit des cofiltrations exhaustives en utilisant $P_\Lambda \twoheadrightarrow \text{CoFil}^{U_P, -d}(P_\Lambda) \twoheadrightarrow \text{CoFil}^{U_P, 0}(P_\Lambda)$.

2.7.4. Proposition. — Par application successives des cofiltrations $\text{CoFil}_{U, -1} \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U, 0}$ de la définition 2.4.5, tout faisceau pervers P_Λ sans torsion dans ${}^p\text{FP}(X, \Lambda)$ sur X peut être muni fonctoriellement d'une cofiltration dans ${}^p\text{FP}(X, \Lambda)$

$$P_\Lambda = \text{CoFill}_{-d}(P_\Lambda) \subset \text{CoFill}_{1-d}(P_\Lambda) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \text{CoFill}_0(P_\Lambda)$$

telle que :

- d est un entier assez grand;
- les gradués $\text{cogrr}_k(P_\Lambda)$ sont sans torsion;
- pour tout $0 \leq k \leq d$, il existe $\alpha(k) \in I$ ainsi qu'un système local $\mathcal{L}(k)$ sur $X_{\alpha(k)}$ et des injections dans ${}^p\text{FP}(X, \Lambda)$:

$${}^p j_{\alpha(k), !*} \mathcal{L}(k) \hookrightarrow \text{cogrr}_k(P_\Lambda) \hookrightarrow {}^{p+} j_{\alpha(k), !*} \mathcal{L}(k).$$

2.7.5. Définition. — La cofiltration construite à la proposition précédente sera dite de stratification exhaustive.

La proposition 2.4.6 permet de relier filtration et cofiltration par la dualité de Verdier.

2.7.6. Lemme. — La dualité de Verdier échange la filtration et la cofiltration définies ci-dessus, i.e.

$$D\left(\text{CoFill}_{-k}(P_\Lambda)\right) \simeq \text{Fill}_k(DP_\Lambda).$$

Remarque : dans les constructions précédentes, les systèmes locaux $\mathcal{L}(k) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ ne sont pas nécessairement irréductibles. On peut bien entendu filtrer les $\mathcal{L}(k)$ de sorte que les gradués sont simples après tensorisation par \mathbb{K} ; bien entendu les réseaux obtenus dépendront à priori du procédé choisi.

2.7.7. Notation. — On notera ${}^l\text{Fill}_k$ (resp. ${}^l\text{CoFill}^k$) la cofiltration (resp. la filtration) de $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$ associée à la filtration (resp. la cofiltration) Fill^k (resp. CoFill_k).

2.8. Cas d'un schéma de Hecke. — Pour $\mathbb{X}_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ un schéma de Hecke relativement à $(\mathbb{G}, \mathcal{I})$ et $\Lambda = \mathbb{K}, \mathbb{O}$ ou \mathbb{F} , nous avons défini au §1.5, la catégorie $\text{FP}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$ des faisceaux pervers de Hecke sur $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$ à coefficients dans Λ . Pour $\Lambda = \mathbb{O}$, on dispose des théories de torsion p et $p+$.

On peut alors reprendre les constructions des §2.6 et §2.7, à chaque niveau $I \in \mathcal{I}$ ce qui permet de définir des filtrations ou cofiltrations de stratification d'un faisceau pervers de Hecke sans torsion.

2.9. Modifications d'un faisceau pervers sans torsion. — L'objectif de ce paragraphe est de montrer que l'on ne peut pas donner plus de précisions sur la position des gradués

$${}^p j_{\alpha(k), !*} \mathcal{L}(k) \hookrightarrow gr_k(P_{\Lambda}) \hookrightarrow {}^{p+} j_{\alpha(k), !*} \mathcal{L}(k)$$

dans l'énoncé de la proposition 2.7.1. Plus précisément à partir d'un faisceau pervers sans torsion $P_{\mathbb{O}}$ muni de sa filtration de stratification exhaustive, nous montrerons comment, quitte à modifier certains des réseaux $\mathcal{L}(k)$, construire $P'_{\mathbb{O}}$ dont les gradués sont les G_k

$${}^p j_{\alpha(k), !*} \mathcal{L}(k) \hookrightarrow G_k \hookrightarrow {}^{p+} j_{\alpha(k), !*} \mathcal{L}(k)$$

où on se donne par avance la position des G_k et on s'autorise à modifier le réseau $\mathcal{L}(k)$, i.e. à prendre $\mathcal{L}'(k)$ avec $\mathcal{L}'(k) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K} \simeq \mathcal{L}(k) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$.

2.9.1. Lemme. — Soient $P_{\mathbb{O}}^-, P_{\mathbb{O}}^+ \in {}^p \text{FP}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+} \text{FP}(X, \mathbb{O})$ et une suite exacte courte de ${}^p \text{FP}(X, \mathbb{O})$

$$0 \rightarrow P_{\mathbb{O}}^- \rightarrow P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow T_0 \rightarrow 0$$

où T_0 est de l^n torsion. Il existe alors une suite exacte courte de ${}^p \text{FP}(X, \mathbb{O})$

$$0 \rightarrow P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow P_{\mathbb{O}}^- \rightarrow T \rightarrow 0,$$

où T est de l^n torsion. En outre toute suite exacte courte de ${}^p \text{FP}(X, \mathbb{O})$ de la forme

$$0 \rightarrow P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow P_{\mathbb{O}}^- \rightarrow T \rightarrow 0,$$

avec T de torsion est telle que T est de l^n torsion.

Démonstration. — La suite exacte courte $0 \rightarrow P_{\mathbb{O}}^- \rightarrow P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow T_{\mathbb{O}} \rightarrow 0$ fournit un élément $\xi \in \text{Ext}_{\mathbb{O}}^1(T_{\mathbb{O}}, P_{\mathbb{O}}^-)$ qui est de l^n torsion de sorte que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & P_{\mathbb{O}}^- & \longrightarrow & P_{\mathbb{O}} & \longrightarrow & T_{\mathbb{O}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \times l^n \\
 0 & \longrightarrow & P_{\mathbb{O}}^- & \longrightarrow & P_{\mathbb{O}}^+ & \longrightarrow & T_{\mathbb{O}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \times l^n & & \downarrow & & \downarrow = \\
 0 & \longrightarrow & P_{\mathbb{O}}^- & \longrightarrow & P_{\mathbb{O}} & \longrightarrow & T_{\mathbb{O}} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où $P_{\mathbb{O}} \simeq P_{\mathbb{O}}^- \oplus T_{\mathbb{O}}$. On obtient ainsi une flèche de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$

$$P_{\mathbb{O}}^+ \longrightarrow P_{\mathbb{O}} \longrightarrow P_{\mathbb{O}}^-$$

dont le noyau $N_{\mathbb{O}}$ est libre et tel que $P_{\mathbb{O}}^+/N_{\mathbb{O}}$ est libre; ainsi $N_{\mathbb{O}}$ est nul. On note alors $T \in {}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$ le conoyau

$$0 \rightarrow P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow P_{\mathbb{O}}^- \rightarrow T \rightarrow 0$$

avec T qui est de l^n torsion.

Considérons désormais une suite exacte courte de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$:

$$0 \rightarrow P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow P_{\mathbb{O}}^- \rightarrow T \rightarrow 0.$$

Soit m tel que T est de l^m torsion. La suite exacte longue

$$\dots \rightarrow {}^p h^{-1} i^* P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow {}^p h^{-1} i^* P_{\mathbb{O}}^- \rightarrow {}^p h^{-1} i^* T \rightarrow {}^p h^0 i^* P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow 0$$

impose que $l^m {}^p h_{\text{tor}}^0 i^* T_{\mathbb{O}} = 0$ et donc $m \geq n$. □

Exemples :

(1) Pour $L_{\mathbb{O}} \in {}^p\text{FP}(U, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(U, \mathbb{O})$, la suite exacte courte

$$0 \rightarrow {}^p j_{!*} L_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^{p+} j_{!*} L_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^p h_{\text{tor}}^0 i^* j_{!*} L_{\mathbb{O}} \rightarrow 0,$$

vérifie les hypothèses de l'énoncé, ce qui fournit alors une suite exacte courte de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$:

$$0 \rightarrow {}^{p+} j_{!*} L_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^p j_{!*} L_{\mathbb{O}} \rightarrow T \rightarrow 0.$$

En outre on a $i^* T \in {}^p\mathcal{D}(F, \mathbb{O})^{\leq -1}$ et ${}^p i^! T \in {}^p\mathcal{D}(F, \mathbb{O})^{\geq 1}$, de sorte que $T \simeq {}^p j_{!*} j^* T \simeq {}^p j_{!*} L_{\mathbb{O}} / l^n L_{\mathbb{O}}$.

(2) De même pour

$${}^p j_{!*} L_{\mathbb{O}} \hookrightarrow P_{\mathbb{O}}^- \hookrightarrow P_{\mathbb{O}}^+ \hookrightarrow {}^{p+} j_{!*} L_{\mathbb{O}},$$

on obtient une suite exacte courte $0 \rightarrow P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow P_{\mathbb{O}}^- \rightarrow T \rightarrow 0$ où T est de torsion.

(3) A contrario étant donné $L_{\mathbb{O}} \in {}^p\text{FP}(U, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(U, \mathbb{O})$ ainsi qu'une suite exacte courte dans ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$

$$0 \rightarrow A_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^p j_{!*} L_{\mathbb{O}} \rightarrow i_* T \rightarrow 0$$

avec $T \in {}^p\text{FP}(F, \mathbb{O})$ de torsion ; alors T est nécessairement nul puisqu'isomorphe à ${}^p j_{!*} j^* T$.

2.9.2. Proposition-Définition. — Soit

$$\text{Fill}^0(P_{\mathbb{O}}) \subset \text{Fill}^1(P_{\mathbb{O}}) \subset \cdots \subset \text{Fill}^d(P_{\mathbb{O}}) = P_{\mathbb{O}}$$

la filtration exhaustive d'un \mathbb{O} -faisceau pervers $P_{\mathbb{O}}$ sans torsion. Pour tout $k = 0, \dots, d$ on peut construire un faisceau pervers sans torsion $P_{\mathbb{O},k}$ muni d'une filtration

$$\text{Fil}^0(P_{\mathbb{O},k}) \subset \text{Fil}^1(P_{\mathbb{O},k}) \subset \cdots \subset \text{Fil}^d(P_{\mathbb{O},k}) = P_{\mathbb{O},k}$$

telle que :

- pour tout $k = 0, \dots, d$, la construction fournit un isomorphisme $P_{\mathbb{O}} \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K} \simeq P_{\mathbb{O},k} \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ compatible aux filtrations, c'est à dire que pour tout $i = 0, \dots, d$, cet isomorphisme induit un isomorphisme entre $\text{Fil}^i(P_{\mathbb{O},k}) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ et $\text{Fill}^i(P_{\mathbb{O}}) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$;
- pour tout $i = 0, \dots, k$, le gradué $gr^i(P_{\mathbb{O},k})$ est, avec les notations du paragraphe précédent, de la forme ${}^p j_{\alpha(i),!*} \mathcal{L}_i$.

Démonstration. — Soit la suite exacte courte de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$

$$0 \rightarrow \text{Fill}^0(P_{\mathbb{O}}) \rightarrow P_{\mathbb{O}} \rightarrow / \text{Fill}_0(P_{\mathbb{O}}) \rightarrow 0,$$

où par construction, il existe un système local $\mathcal{L}(0)$ sur une strate $X_{\alpha(0)}$ tel que

$${}^p j_{\alpha(0),!*} \mathcal{L}(0) \hookrightarrow \text{Fill}^0(P_{\mathbb{O}}) \hookrightarrow {}^{p+} j_{\alpha(0),!*} \mathcal{L}(0).$$

En utilisant la remarque qui suite le lemme 2.9.1, on obtient par pushout :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Fill}^0(P_{\mathbb{O}}) & \longrightarrow & P_{\mathbb{O}} & \longrightarrow & / \text{Fill}_0(P_{\mathbb{O}}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & {}^p j_{\alpha(0),!*} \mathcal{L}(0) & \dashrightarrow & P_{\mathbb{O},0} & \longrightarrow & / \text{Fill}_0(P_{\mathbb{O}}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

La filtration

$$\text{Fill}^1(P_{\mathbb{O}}) / \text{Fill}^0(P_{\mathbb{O}}) \subset \cdots \subset \text{Fill}^d(P_{\mathbb{O}}) / \text{Fill}^0(P_{\mathbb{O}}) = / \text{Fill}_0(P_{\mathbb{O}})$$

de $/ \text{Fill}_0(P_{\mathbb{O}})$ donne alors par pull-back une filtration

$$\text{Fil}^0(P_{\mathbb{O},0}) \subset \text{Fil}^1(P_{\mathbb{O},0}) \subset \cdots \subset \text{Fil}^d(P_{\mathbb{O},0}) = P_{\mathbb{O},0}$$

qui vérifie les propriétés énoncées.

Supposons donc construit $P_{\mathbb{O},k}$ et soit

$$0 \rightarrow \text{Fil}^k(P_{\mathbb{O},k}) \rightarrow \text{Fil}^{k+1}(P_{\mathbb{O},k}) \rightarrow gr^{k+1}(P_{\mathbb{O},k}) \rightarrow 0,$$

où avec les notations du paragraphe précédent, il existe une strate $\alpha(k+1)$ et un système local $\mathcal{L}(k+1)$ tel que

$${}^p j_{\alpha(k+1),!*} \mathcal{L}(k+1) \hookrightarrow gr^{k+1}(P_{\mathbb{O},k}) \hookrightarrow {}^{p+} j_{\alpha(k+1),!*} \mathcal{L}(k+1).$$

Soit alors

$$0 \rightarrow \mathrm{Fil}^k(P_{\mathbb{O},k}) \longrightarrow F_{k+1} \longrightarrow {}^p j_{\alpha(k+1),!*} \mathcal{L}(k+1) \rightarrow 0$$

l'extension obtenue par pull-back à partir de $\mathrm{Fil}^{k+1}(P_{\mathbb{O},k})$. D'après le lemme précédent, on a un morphisme $\mathrm{Fil}^{k+1}(P_{\mathbb{O},k}) \longrightarrow F_{k+1}$ ce qui par pushout permet de définir $P_{\mathbb{O},k+1}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^{k+1}(P_{\mathbb{O},k}) & \longrightarrow & P_{\mathbb{O},k} & \longrightarrow & P_{\mathbb{O},k}/\mathrm{Fil}^{k+1}(P_{\mathbb{O},k}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & F_{k+1} & \dashrightarrow & P_{\mathbb{O},k+1} & \longrightarrow & P_{\mathbb{O},k}/\mathrm{Fil}^{k+1}(P_{\mathbb{O},k}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Pour tout $i \leq k+1$, on pose $\mathrm{Fil}^i(P_{\mathbb{O},k+1}) := \mathrm{Fil}^i(F_{k+1}) = \mathrm{Fil}^i(P_{\mathbb{O},k})$; comme précédemment la filtration $\mathrm{Fil}^i(P_{\mathbb{O},k})/\mathrm{Fil}^{k+1}(P_{\mathbb{O},k})$ de $P_{\mathbb{O},k}/\mathrm{Fil}^{k+1}(P_{\mathbb{O},k})$ permet par pull-back de définir les $\mathrm{Fil}^i(P_{\mathbb{O},k+1})$ pour $k+1 < i \leq d$. \square

Dualement, on a la construction suivante.

2.9.3. Proposition-Définition. — *Soit*

$$P_{\mathbb{O}} \twoheadrightarrow \mathrm{CoFill}_{-d}(P_{\mathbb{O}}) \twoheadrightarrow \mathrm{CoFill}_{1-d}(P_{\mathbb{O}}) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \mathrm{CoFill}_0(P_{\mathbb{O}})$$

la cofiltration exhaustive d'un faisceau pervers $P_{\mathbb{O}}$ sans torsion. Pour tout $k = 0, \dots, d$ on peut construire un faisceau pervers sans torsion $P_{\mathbb{O},k}$ muni d'une cofiltration

$$P_{\mathbb{O},k} \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{-d}(P_{\mathbb{O},k}) \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{1-d}(P_{\mathbb{O},k}) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_0(P_{\mathbb{O},k})$$

telle que :

- pour tout $k = 0, \dots, d$, la construction fournit un isomorphisme $P_{\mathbb{O}} \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K} \simeq P_{\mathbb{O},k} \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ compatible aux cofiltrations, c'est à dire que pour tout $i = 0, \dots, d$, cet isomorphisme induit un isomorphisme entre $\mathrm{CoFil}^i(P_{\mathbb{O},k}) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ et $\mathrm{CoFill}^i(P_{\mathbb{O}}) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$;
- pour tout $i = 0, \dots, k$, le gradué $gr_{-i}(P_{\mathbb{O},k})$ est, avec les notations du paragraphe précédent, de la forme ${}^{p+} j_{\alpha(i),!*} \mathcal{L}_i$.

Remarque : il est bien entendu possible de modifier $P_{\mathbb{O}}$ afin d'obtenir pour gradués n'importe lequel des faisceaux pervers ${}^p j_{\alpha(k),!*} \mathcal{L}_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow {}^{p+} j_{\alpha(k),!*} \mathcal{L}_k$. On notera toutefois que lorsque l'on déplace ces gradués, en général on modifie aussi les réseaux \mathcal{L}_k .

3. Sur quelques classes de faisceaux pervers sans torsion

3.1. Minimalité et maximalité. — On reprend la problématique du paragraphe précédent mais en rigidifiant un peu le contexte. Par exemple pour $\mathrm{Fill}^0(P_{\mathbb{O}}) \hookrightarrow P_{\mathbb{O}}$ avec

$${}^p j_{0,!*} \mathcal{L}(0) \hookrightarrow \mathrm{Fill}^0(P_{\mathbb{O}}) \hookrightarrow F_0 \hookrightarrow {}^{p+} j_{0,!*} \mathcal{L}(0)$$

par pushout on construit $P'_\mathbb{O}$ sans modifier $\cdot \text{Fill}_0(P_\mathbb{O})$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Fill}^0(P_\mathbb{O}) & \longrightarrow & P_\mathbb{O} & \longrightarrow & / \text{Fill}_0(P_\mathbb{O}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & F_0 & \dashrightarrow & P'_\mathbb{O} & \longrightarrow & / \text{Fill}_0(P_\mathbb{O}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ainsi une question naturelle est de savoir si une extension $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$ a été obtenue par pushout (resp. pullback) à partir d'une extension $0 \rightarrow A' \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ (resp. $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C' \rightarrow 0$) via $A' \hookrightarrow A$ (resp. $C \hookrightarrow C'$).

3.1.1. Définition. — Une extension

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$ sera dite minimale (resp. maximale) si pour toute flèche $A \twoheadrightarrow T$ (resp. $T \hookrightarrow C$) de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$ (resp. ${}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$) où T est un objet de torsion de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$ (resp. ${}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$) le pushout (resp. le pullback) T'

$$\begin{array}{ccc} A \longrightarrow B & & \text{resp. } T' \dashrightarrow T \\ \downarrow & & \downarrow \\ T \hookrightarrow T' & & B \twoheadrightarrow C \end{array}$$

est tel que la flèche $T \hookrightarrow T'$ (resp. $T' \twoheadrightarrow T$) de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$ (resp. ${}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$) n'y est pas surjective (resp. injective).

Remarque : une extension $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ est minimale (resp. maximale) si et seulement si elle n'est pas obtenue par pushout (resp. pullback) à partir de $A' \hookrightarrow A$ (resp. $C \hookrightarrow C'$) :

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow C \longrightarrow 0 & \text{resp.} & \begin{array}{ccc} T \xrightarrow{=} T \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \dashrightarrow C \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 \longrightarrow A \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0 \end{array} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 \longrightarrow A \dashrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ T \xrightarrow{=} T & & \end{array}$$

3.1.2. Lemme. — Soit $\mathcal{L}_\mathbb{O}$ un système local irréductible sans torsion sur un ouvert U de X et soit $P_\mathbb{O}$ un quotient dans ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$ (resp. un sous-objet dans ${}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$) de ${}^{p+}j_!\mathcal{L}_\mathbb{O}$ (resp. ${}^p j_*\mathcal{L}_\mathbb{O}$). Alors pour tout $P_\mathbb{O} \twoheadrightarrow C$ (resp. $A \hookrightarrow P_\mathbb{O}$) dans ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$, l'extension

$$0 \rightarrow A \rightarrow P_\mathbb{O} \rightarrow C \rightarrow 0$$

est minimale (resp. maximale).

Démonstration. — Traitons tout d’abord le cas de ${}^{p+}j_! \mathcal{L}_\mathbb{O}$ qui est sans torsion. Comme ${}^{ph^0}i^*{}^{p+}j_! \mathcal{L}_\mathbb{O}$ est nul, on en déduit que ${}^{ph^0}i^*P_\mathbb{O}$ est nul aussi. Soit alors $0 \rightarrow A \rightarrow P_\mathbb{O} \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$ avec C non nul de sorte que $A \simeq i_*i^*A$ et ainsi pour tout quotient $A \twoheadrightarrow T$, $T \simeq i_*i^*T$ est à support dans $F = X - U$. Si on avait $P_\mathbb{O} \twoheadrightarrow T$ alors comme ${}^{ph^0}i^*P$ est nul, on en déduirait que ${}^{ph^0}i^*T = T$ est nul, ce qui prouve bien que l’extension est minimale.

Le cas de pj_* se traite de manière similaire en utilisant que ${}^{p+}h^0i^!P_\mathbb{O}$ est nul. \square

3.1.3. Définition. — Un système local $\mathcal{L}_\mathbb{O}$ irréductible sans torsion sur U est dit minimal (resp. maximal) si l’extension

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow {}^{p+}j_{!*} \mathcal{L}_\mathbb{O} \longrightarrow {}^pj_* \mathcal{L}_\mathbb{O} \longrightarrow i_* {}^{ph^0}h_{\text{libre}}^0 i^* j_* \mathcal{L}_\mathbb{O} \rightarrow \\ \text{resp. } 0 \rightarrow i_* {}^{ph^0}h_{\text{libre}}^{-1} i^* j_* \mathcal{L}_\mathbb{O} \longrightarrow {}^{p+}j_! \mathcal{L}_\mathbb{O} \longrightarrow {}^pj_{!*} \mathcal{L}_\mathbb{O} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

est une extension minimale (resp. maximale).

3.2. Faisceaux pervers saturés. — On rappelle qu’un faisceau pervers sans torsion est dit saturé (resp. exhaustivement saturé) si sa filtration (resp. sa filtration exhaustive) de stratification l’est, cf. les définitions 2.6.4 et 2.7.2.

3.2.1. Notation. — On reprend les notations du §2.2 que l’on complète comme suit :

- pour $1 \leq h \leq h' \leq d$, $X^{h \leq h'} := X^{=h} \amalg \dots \amalg X^{=h'}$; en particulier $X^{h \leq h}$ est égal à $X^{=h}$.
- pour $1 \leq h \leq h' \leq d$, $j^{h \leq h'} : X^{h \leq h'} \hookrightarrow X^{\geq h}$; en particulier $j^{h \leq h} = j^{\geq h}$.
- pour $1 \leq h < h' \leq d$, $j^{h < h'} : X^{=h} \hookrightarrow X^{h \leq h'}$.
- pour $1 \leq h \leq h' < \tilde{h}$, $j^{h \leq h' < \tilde{h}} : X^{h \leq h'} \hookrightarrow X^{h \leq \tilde{h}}$; en particulier on a $j^{h \leq h'} = j^{h \leq \tilde{h}} \circ j^{h \leq h' < \tilde{h}}$.
- pour $1 \leq h \leq h' \leq d$, $i_{h \leq h'} : X^{\geq h'} \hookrightarrow X^{\geq h}$; en particulier $i_{1 \leq h} = i_{\geq h}$;
- pour $1 \leq h < h' \leq d$, $i_{h < h'} : X^{=h'} \hookrightarrow X^{h \leq h'}$; en particulier $i_{=h} = i_{1 < h}$.
- pour $1 \leq h \leq h' \leq d$, $i_{1 \leq h \leq h'} : X^{h \leq h'} \hookrightarrow X^{\geq 1}$; en particulier $i_{1 \leq h \leq h} = i_{=h}$.

Remarque : dans les notations précédentes, dès que l’on a la lettre j alors le foncteur j^* associé est t -exact.

3.2.2. Proposition. — Soit $P_\mathbb{O}$ un faisceau pervers sans torsion sur X ; avec les notations précédentes, $P_\mathbb{O}$ est saturé si et seulement si pour tout $1 \leq h \leq d$, ${}^{ph^0}i_{\geq h}^* P_\mathbb{O}$ est sans torsion.

Démonstration. — On rappelle la suite exacte

$$0 \rightarrow {}^{ph^{-1}}i_{\geq 2}^* P_\mathbb{O} \longrightarrow {}^pj_!^{\geq 1} j^{\geq 1,*} P_\mathbb{O} \longrightarrow P_\mathbb{O} \longrightarrow {}^{ph^0}i_{\geq 2}^* P_\mathbb{O} \rightarrow 0$$

de sorte que $\text{Fil}_{X=1}^1(P_\mathbb{O})$ est saturé si et seulement si ${}^{ph^0}i_{\geq 2}^* P_\mathbb{O}$ est sans torsion. Le quotient $P_\mathbb{O} / \text{Fil}^0(P_\mathbb{O})$ est alors isomorphe à $P_1 := {}^{ph^0}i_{\geq 2}^* P_\mathbb{O}$ à support dans $X^{\geq 2}$. Pour tout $2 \leq h \leq$

d , on a

$${}^p h^0 i_{2 \leq h}^* P_1 = {}^p h^0 (i_{\geq 2} \circ i_{2 \leq 3})^* P_{\mathbb{O}} = {}^p h^0 i_{\geq 3}^* P_{\mathbb{O}}$$

de sorte que P_1 vérifie encore les hypothèses de l'énoncé. On conclut alors par récurrence sur la dimension du support de P . \square

Remarque : comme $X^{\geq h}$ n'est pas une strate mais une réunion de strates, il est en général difficile de tester si un faisceau pervers sur $X^{\geq h}$ est libre ou non. Par exemple même si certaines des fibres de ses faisceaux de cohomologie ont de la torsion cela ne signifie pas que le faisceau pervers n'est pas libre. En revanche pour un faisceau pervers \mathfrak{S} -constructible, ses ${}^p h^0 i_{\leq h}^*$ sont localement constants et donc libre si et seulement si la fibre en un point quelconque de $X^=h$ de son faisceau de cohomologie en la dimension de $X^=h$ est libre. Ainsi la proposition suivante sera plus facilement exploitable.

3.2.3. Proposition. — Soit $P_{\mathbb{O}}$ un faisceau pervers sans torsion sur un schéma X . Avec les notations précédentes on suppose que pour tout $1 \leq h \leq d$,

- $j^{\geq h}$ est affine ;
- ${}^p h^0 i_{=h}^* P_{\mathbb{O}}$ est sans torsion.

Alors $P_{\mathbb{O}}$ est saturé.

Avant de donner la preuve de ce résultat, commençons par le lemme technique suivant.

3.2.4. Lemme. — On considère les suites exactes dans \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow & \downarrow & & & & \\ & & C & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & C' & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Si B' et C' sont sans torsion alors, avec les notations du lemme 1.1.5, le quotient de ${}^+ h^0 C$ par l'image de ${}^+ h^0 A$ est sans torsion.

Démonstration. — Quitte à quotienter A par le noyau de $A \rightarrow B$, on peut supposer que cette application est injective. En considérant les parties libres on a

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & {}^+h^0 A & \longrightarrow & {}^+h^0 B & \longrightarrow & B' \longrightarrow 0 \\
 & & & \searrow & \downarrow & & \\
 & & & & {}^+h^0 \text{Im} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

où Im est l'image de $B \rightarrow C$. Ce diagramme est exact dans \mathcal{C} et ${}^+\mathcal{C}$ et le quotient E cherché est le push out

$$\begin{array}{ccc}
 {}^+h^0 B & \longrightarrow & B' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 {}^+h^0 \text{Im} & \dashrightarrow & E
 \end{array}$$

La flèche ${}^+h^0 B \rightarrow B'$ étant surjective dans \mathcal{C} et ${}^+\mathcal{C}$, on en déduit que ${}^+ \text{Im} \rightarrow E$ est aussi surjective dans ${}^+\mathcal{C}$ et donc que E est un objet libre de ${}^+\mathcal{C}$. Le résultat découle alors du triangle distingué

$${}^+h^0 \text{Im} / {}^+h^0 A \longrightarrow {}^+h^0 C / {}^+h^0 A \longrightarrow {}^+h^0 C / {}^+h^0 \text{Im} \rightsquigarrow$$

et du fait que les premier et dernier termes appartiennent à $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$. \square

Démonstration. — de la proposition 3.2.3 D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que pour tout $1 \leq h \leq d$, ${}^p h^0 i_{\geq h}^* P_{\mathbb{O}}$ est sans torsion. Pour cela on raisonne par récurrence sur h de d à 1. Comme $X^{\geq d} = X^{=d}$ le cas $h = d$ est immédiat. Supposons donc avoir montré que pour tout $k \geq h + 1$, ${}^p h^0 i_{\geq k}^* P_{\mathbb{O}}$ est sans torsion et traitons le cas de h . Avec les notations précédentes, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow {}^p h^{-1} i_{=h}^* P_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^p j_!^{1 \leq h-1 < h} j^{1 \leq h-1, *} P_{\mathbb{O}} \rightarrow j^{1 \leq h, *} P_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^p h^0 i_{=h}^* P_{\mathbb{O}} \rightarrow 0$$

où par hypothèses, ${}^p h^0 i_{=h}^* P_{\mathbb{O}}$ est un faisceau localement libre. Pour

$$A := \left({}^p j_!^{1 \leq h-1 < h} j^{1 \leq h-1, *} P_{\mathbb{O}} \right) / \left({}^p h^{-1} i_{=h}^* P_{\mathbb{O}} \right)$$

on a alors la suite exacte courte

$$0 \rightarrow {}^p j_!^{1 \leq h} A \rightarrow {}^p j_!^{1 \leq h} j^{1 \leq h, *} P_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^p j_!^{\geq h} {}^p h^0 i_{=h}^* P_{\mathbb{O}} \rightarrow 0$$

où le 0 à gauche est donné par la nullité de ${}^p h^{-1} j_!^{\geq h} {}^p h^0 i_{=h}^* P_{\mathbb{O}}$ car $j^{\geq h}$ est affine, ce qui implique aussi que ${}^p j_!^{\geq h} {}^p h^0 i_{=h}^* P_{\mathbb{O}}$ est libre. Par application du lemme précédent, on obtient une flèche

$${}^{p+} j_!^{1 \leq h-1} j^{1 \leq h-1, *} P_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^{p+} j_!^{1 \leq h} j^{1 \leq h, *} P_{\mathbb{O}}$$

qui est saturée, i.e. dont le conoyau B' est sans torsion. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 {}^p j_!^{1 \leq h-1} j^{1 \leq h-1,*} P_{\mathbb{O}} & \longrightarrow & {}^p j_!^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} P_{\mathbb{O}} & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0 \\
 & \dashrightarrow & \downarrow & & & & \\
 & & P_{\mathbb{O}} & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & {}^p h^0 i_{\geq h+1}^* P_{\mathbb{O}} & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

vérifie donc les hypothèses du lemme précédent de sorte que la flèche en pointillée est saturée, i.e. son conoyau ${}^p h^0 i_{\geq h}^* P_{\mathbb{O}}$ est sans torsion. \square

3.3. Systèmes locaux récurrents et récurrents. —

3.3.1. Définition. — Un système local libre $(X^{=1}, \mathcal{L}_{\Lambda})$ est dit récurrent si pour $P_{\Lambda} := i_{\geq 2,*} {}^p h^{-1} i_{\geq 2}^* {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_{\Lambda}$ et h tel que le support de P_{Λ} est dense dans $X^{=h}$, le morphisme d'adjonction

$${}^{p+} j_!^{\geq h} j^{\geq h,*} P_{\Lambda} \longrightarrow P_{\Lambda}$$

est surjectif dans \mathcal{C} .

Remarque : de manière équivalente \mathcal{L}_{Λ} est récurrent si et seulement si ${}^p h^0 i^* P_{\Lambda}$ est nul. Pour $\Lambda = \mathbb{O}$, on remarque en particulier que cette propriété ne dépend pas du réseau stable de $P_{\mathbb{O}} \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$.

Remarque : si \mathcal{L}_{Λ} est de la forme $\mathcal{L}_{\Lambda,1} \oplus \mathcal{L}_{\Lambda,2}$ où le support de $P_{\Lambda,i}$ est dense dans $X^{\geq h_1}$ avec les notations précédentes ; si $h_1 < h_2$ alors \mathcal{L}_{Λ} ne peut pas être récurrent même si $\mathcal{L}_{\Lambda,1}$ et $\mathcal{L}_{\Lambda,2}$ le sont. En revanche dans le cas $h_1 = h_2$, on peut aisément démontrer que si pour $i = 1, 2$, le support de $P_{\Lambda,i}$ est dense dans $X^{\geq h}$, alors \mathcal{L}_{Λ} est récurrent si et seulement si $\mathcal{L}_{\Lambda,1}$ et $\mathcal{L}_{\Lambda,2}$ le sont.

Remarque : l'intérêt de cette notion est le suivant : on note $\text{EFill}_{i,r}^{p,q} \Rightarrow h^{p+q} j_!^{\geq h} j^{\geq h,*} P_{\Lambda}$ la suite spectrale exhaustive dont l'aboutissement est connu, et

$$\text{EFill}_r^{p,q} \Rightarrow h^{p+q} P_{\Lambda} \simeq h^{p+q-1} {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_{\Lambda}$$

dont on cherche à déterminer l'aboutissement. Dans le cas où \mathcal{L}_{Λ} est récurrent, on a un morphisme de suites spectrales $\text{EFill}_{i,r}^{p,q} \longrightarrow \text{EFill}_r^{p,q}$ surjectif, i.e. pour tout p, q, r le diagramme

suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{EFill}_{!,r}^{p,q} & \longrightarrow & \mathrm{EFill}_{!,r}^{p+r,q-r+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{EFill}_r^{p,q} & \longrightarrow & \mathrm{EFill}_r^{p+r,q-r+1} \end{array}$$

ce qui fournit un outil pour calculer les faisceaux de cohomologie de ${}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\Gamma$ particulièrement si les flèches $\mathrm{EFill}_{!,1}^{p,q} \longrightarrow \mathrm{EFill}_1^{p,q}$ sont surjectives. On renvoie le lecteur au §5.3.

3.3.2. Lemme. — Si $(X^{=1}, \mathcal{L}_\mathbb{O})$ est récurrent alors $(X^{=1}, \mathcal{L}_\mathbb{K})$ et $(X^{=1}, \mathcal{L}_\mathbb{F})$ le sont aussi.

Démonstration. — Cela découle directement de l'isomorphisme ${}^p h^0 i^* P_\mathbb{K} \simeq {}^p h^0 i^* P_\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ et de la nullité de ${}^p h^1 i^* P_\mathbb{O}$. \square

3.3.3. Lemme. — Soit $(X^{=1}, \mathcal{L}_\mathbb{K})$ un système local libre et soit $h \geq 1$ tel que le support de $P_\mathbb{K} = i_{\geq 2,*} {}^p h^{-1} i_{\geq 2}^* {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}$ est dense dans $X^{=h}$. Alors $(X^{=1}, \mathcal{L}_\mathbb{K})$ est récurrent si et seulement si pour tout faisceau pervers $A_\mathbb{K}$ à support dans $X^{\geq h+1}$, l'une des deux propriétés équivalentes suivantes

- $\mathrm{Ext}_\mathbb{K}^1({}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}, A_\mathbb{K}) = 0$;
- $\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(P_\mathbb{K}, A_\mathbb{K}) = 0$.

Démonstration. — Supposons tout d'abord que $\mathcal{L}_\mathbb{K}$ est récurrent et soit

$$0 \rightarrow A_\mathbb{K} \rightarrow B_\mathbb{K} \rightarrow {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K} \rightarrow 0$$

la suite exacte courte associé à un élément $\xi \in \mathrm{Ext}^1({}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}, A_\mathbb{K})$. On a $j^{\geq 1,*} B_\mathbb{K} \simeq \mathcal{L}_\mathbb{K}$; soit alors $\mathrm{Fil}^1(B_\mathbb{K}) \subset B_\mathbb{K}$ l'image de

$${}^p j_{!*}^{\geq 1} j^{\geq 1,*} B_\mathbb{K} \rightarrow B_\mathbb{K}.$$

Comme $\mathcal{L}_\mathbb{K}$ est récurrent, $P_\mathbb{K}$ admet un unique quotient irréductible à savoir ${}^p j_{!*}^{\geq h} j^{\geq h,*} P_\mathbb{K}$ de sorte que $\mathrm{Fil}^1(B_\mathbb{K})$ est isomorphe à ${}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}$. On obtient ainsi un relèvement $P_\mathbb{K} \rightarrow {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}$ et donc $B_\mathbb{K} \simeq A_\mathbb{K} \oplus {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}$.

Réciproquement si $P_\mathbb{K} \rightarrow A_\mathbb{K}$ est un quotient à support dans $X^{\geq h+1}$, le pushout

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_\mathbb{K} & \longrightarrow & {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K} & \longrightarrow & {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & A_\mathbb{K} & \dashrightarrow & B_\mathbb{K} & \longrightarrow & {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K} \longrightarrow 0 \end{array}$$

définit un élément de $\xi \in \mathrm{Ext}^1({}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}, A_\mathbb{K})$. En outre la surjection ${}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K} \rightarrow B_\mathbb{K}$ et le fait que le top de ${}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}$ soit ${}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}$, impose que ξ est non trivial. \square

3.3.4. Définition. — Le faisceau localement libre irréductible $(X^{=1}, \mathcal{L}_\Lambda)$ est dit récursif s'il est récurrent et si tous les constituants simples de $j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\Lambda$ sont récurrents.

Remarque : l'intérêt des systèmes locaux récurrents est que l'on peut calculer les faisceaux de cohomologie de leur extension intermédiaire par récurrence.

4. Faisceaux pervers sur les variétés de Shimura simples

Nous allons appliquer les constructions précédentes aux faisceaux pervers étudiés dans [6] sur les variétés de Shimura simples associées à des groupes unitaires telles qu'elles sont définies dans [14].

4.1. Rappels sur les représentations de $GL_n(K)$. — Dans la suite K désigne un corps local non archimédien dont le corps résiduel est de cardinal q une puissance de p et on rappelle quelques notations de [6] sur les représentations admissibles de $GL_n(K)$ à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$ où l un nombre premier distinct de p .

4.1.1. Notation. — Une racine carrée $q^{\frac{1}{2}}$ de q dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$ étant fixée, pour $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, nous noterons $\pi\{k\}$ la représentation tordue de π de sorte que l'action d'un élément $g \in GL_n(K)$ est donnée par $\pi(g)\nu(g)^k$ avec $\nu : g \in GL_n(K) \mapsto q^{-\text{val}(\det g)}$.

4.1.2. Définitions. — — Soit $P = MN$ un parabolique de GL_n de Lévi M et de radical unipotent N . On note $\delta_P : P(K) \rightarrow R^\times$ l'application définie par

$$\delta_P(h) = |\det(\text{ad}(h)|_{\text{Lie}N})|^{-1}.$$

— Pour (π_1, V_1) et (π_2, V_2) des R -représentations de respectivement $GL_{n_1}(K)$ et $GL_{n_2}(K)$, et P un parabolique de $GL_{n_1+n_2}$ de Levi $M = GL_{n_1} \times GL_{n_2}$ et de radical unipotent N ,

$$\pi_1 \times_P \pi_2$$

désigne l'induite parabolique normalisée de $P(K)$ à $GL_{n_1+n_2}(K)$ de $\pi_1 \otimes \pi_2$ c'est à dire l'espace des fonctions $f : GL_{n_1+n_2}(K) \rightarrow V_1 \otimes V_2$ telles que

$$f(nmg) = \delta_P^{-1/2}(m)(\pi_1 \otimes \pi_2)(m)\left(f(g)\right), \quad \forall n \in N, \forall m \in M, \forall g \in GL_{n_1+n_2}(K).$$

Remarque : en particulier si P est standard alors $\pi_1 \times_P \pi_2$ est l'induite « classique » de $\pi_1\{n_2/2\} \otimes \pi_2\{-n_1/2\}$.

— Foncteurs de Jacquet : pour π une R -représentation admissible de $GL_n(K)$, l'espace des vecteurs $N(K)$ -coinvariants est stable sous l'action de $M(K) \simeq P(K)/N(K)$. On notera $J_P(\pi)$ cette représentation tordue par $\delta_P^{-1/2}$.

4.1.3. Notations. — Dans le cas où le parabolique est standard de Levi $GL_{r_1} \times GL_{r_2} \times \dots \times GL_{r_k}$, on le notera P_{r_1, \dots, r_k} et \times désignera \times_P .

4.1.4. Définitions. — Une représentation π de $GL_n(K)$ est dite cuspidale si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre.

Soient g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(K)$.
L'induite parabolique

$$\pi\left\{\frac{1-s}{2}\right\} \times \pi\left\{\frac{3-s}{2}\right\} \times \cdots \times \pi\left\{\frac{s-1}{2}\right\}$$

possède

- un unique quotient irréductible noté $St_s(\pi)$; c'est une représentation de Steinberg généralisée.
- une unique sous-représentation irréductible notée $Speh_s(\pi)$; c'est une représentation de $Speh$ généralisée.

D'après [?] 2.10, l'induite parabolique

$$St_{s-t}\left(\pi\left\{-\frac{t}{2}\right\}\right) \times Speh_t\left(\pi\left\{\frac{s-t}{2}\right\}\right)$$

admet une unique sous-représentation irréductible que l'on note $LT_\pi(s, t)$ qui s'avère être aussi l'unique sous-représentation irréductible des induites suivantes.

$$\begin{aligned} & Speh_{t+1}\left(\pi\left\{\frac{s-t-1}{2}\right\}\right) \times St_{s-t-1}\left(\pi\left\{-\frac{t+1}{2}\right\}\right), \\ & Speh_t\left(\pi\left\{\frac{s-t}{2}\right\}\right) \times_{op} St_{s-t}\left(\pi\left\{-\frac{t}{2}\right\}\right), \\ & St_{s-t-1}\left(\pi\left\{-\frac{t+1}{2}\right\}\right) \times_{op} Speh_{t+1}\left(\pi\left\{\frac{s-t-1}{2}\right\}\right) \end{aligned}$$

Afin d'éviter d'avoir à écrire systématiquement toutes ces torsions, on introduit les notations suivantes.

4.1.5. Notations. — Un entier $g \geq 1$ étant fixé, pour π_1 et π_2 des représentations de respectivement $GL_{t_1g}(K)$ et $GL_{t_2g}(K)$, on notera

$$\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2 = \pi_1\left\{-\frac{t_2}{2}\right\} \times \pi_2\left\{\frac{t_1}{2}\right\} \text{ et } \pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2 = \pi_1\left\{\frac{t_2}{2}\right\} \times \pi_2\left\{-\frac{t_1}{2}\right\}$$

Remarque : avec ces notations, $LT_\pi(s, t)$ est, par exemple, l'unique sous-représentation irréductible de $St_{s-t}(\pi) \overrightarrow{\times} Speh_t(\pi)$ et de $Speh_t(\pi) \overleftarrow{\times} St_{s-t}(\pi)$.

4.2. Variétés de Shimura unitaires simples. — Soit $F = F^+E$ un corps CM avec E/\mathbb{Q} quadratique imaginaire pure, dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$. Dans [14], les auteurs justifient l'existence d'un groupe unitaire G_τ vérifiant les points suivants :

- $G_\tau(\mathbb{R}) \simeq U(1, d-1) \times U(0, d)^{r-1}$;
- $G_\tau(\mathbb{Q}_p) \simeq (\mathbb{Q}_p)^\times \times \prod_{i=1}^r (B_{v_i}^{op})^\times$ où $v = v_1, v_2, \dots, v_r$ sont les places de F au dessus de la place u de E telle que $p = u^e u$ et où B est une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 vérifiant certaines propriétés, cf. [14], dont en particulier d'être soit décomposée soit une algèbre à division en toute place et décomposée à la place v . On notera en outre w une place de F telle que $G(F_w) \simeq D_{F_w, d}^\times$.

Pour tout sous-groupe compact U^p de $G_\tau(\mathbb{A}^{\infty,p})$ et $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, on pose

$$U^p(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=1}^r \text{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/v_i^{m_i})^\times)$$

4.2.1. Définition. — Pour $U^p \ll$ assez petit $\gg^{(1)}$ on note $X_{U^p(m)}$ « la variété de Shimura associée à $G \gg$ construite dans [14].

Remarque : $X_{U^p(m)}$ est un schéma projectif sur $\text{Spec } \mathcal{O}_v$ tel que quand U varie, les $X_{U^p(m)}$ forment un système projectif dont les morphismes de transition sont finis et plats : quand $m_1 = m'_1$ ils sont en plus étales. Le système projectif $(X_{U^p(m)})_{U^p, m}$ est naturellement muni d'une action de $G_\tau(\mathbb{A}^\infty)$.

Notons \mathcal{I} l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits » de \mathbb{G} , de la forme $U^p(m)$ et donc muni d'une application $m_1 : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{N}$.

4.2.2. Proposition. — *Le système projectif $X_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ définit un schéma de Hecke au sens de [6], où les morphismes de restriction du niveau $r_{J,I} : X_J \rightarrow X_I$ sont finis et plats.*

Remarque : si $m_1(J) = m_1(I)$ alors $r_{J,I}$ est étale.

4.3. Stratification de Newton. — Pour $I \in \mathcal{I}$, on note $X_{I,s}$ la fibre spéciale de X_I et $X_{I,\bar{s}} := X_{I,s} \times \text{Spec } \bar{\mathbb{F}}_p$ la fibre spéciale géométrique.

4.3.1. Définition. — (cf. [6] §1.3) Pour tout $1 \leq h \leq d$, $X_{I,\bar{s}}^{\geq h}$ (resp. $X_{I,\bar{s}}^{=h}$) désigne la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur h , i.e. le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang $\geq h$ (resp. égal à h).

Remarque : pour tout $1 \leq h \leq d$, la strate de Newton de hauteur h est de pure dimension $d - h$; le système projectif associé définit alors un schéma de Hecke $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h}$ (resp. $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=h}$) pour $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^\infty)$, [14] III.4.4.

Remarque : dans le cas de bonne réduction, i.e. $m_1 = 0$, $X_{I,\bar{s}}^{\geq d-h}$ est lisse.

4.3.2. Proposition. — (cf. [16]) *Pour tout $1 \leq h < d$, la strate $X_{I,\bar{s}}^{=h}$ est affine.*

4.3.3. Définition. — Pour une suite (r_1, r_2, \dots, r_k) telle que $\sum_{i=1}^k r_i = d$, on note P_{r_1, r_2, \dots, r_k} le sous-groupe parabolique standard de GL_d associé au sous-groupe de Levi $GL_{r_1} \times GL_{r_2} \times \dots \times GL_{r_k}$ et on note N_{r_1, \dots, r_k} son radical unipotent.

1. tel qu'il existe une place x pour laquelle la projection de U^p sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [14] bas de la page 90

4.3.4. Proposition. — (cf. [14] p.116) Pour tout $1 \leq h < d$, les strates $X_{I,\bar{s}}^{\leq h}$ sont géométriquement induites sous l'action du parabolique $P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)$, au sens où il existe un sous-schéma fermé $X_{I,\bar{s},1}^{\leq h}$ tel que :

$$X_{I,\bar{s}}^{\leq h} \simeq X_{I,\bar{s},1}^{\leq h} \times_{P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v/v^{m_1})} GL_d(\mathcal{O}_v/v^{m_1}).$$

4.3.5. Notation. — On notera $X_{I,\bar{s},1}^{\geq h}$ l'adhérence de $X_{I,\bar{s},1}^{\leq h}$ dans $X_{I,\bar{s}}^{\leq h}$.

Remarque : le système projectif $(X_{I,\bar{s},1}^{\leq h})_{I \in \mathcal{I}}$ définit un schéma de Hecke $X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\leq h}$ pour $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d-h}(K)$ où \mathbb{G} agit à travers son quotient $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \mathbb{Z} \times GL_{d-h}(K)$ donné par l'application $\begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix} \mapsto (v(\det g_v^c), g_v^{et})$. Par ailleurs l'action d'un élément $w_v \in W_v$ est donnée par l'action de $-\deg(w_v)$ où \deg est la composée du caractère non ramifié de W_v , qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes, avec la valuation v de K .

4.3.6. Notation. — On adoptera les notations suivantes concernant les flèches de schémas de Hecke

$$i^h : X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}} = X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq 1}, \quad j^{\geq h} : X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h}, \quad j_{\Gamma}^{\geq h} : X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\leq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\geq h}.$$

4.4. Systèmes locaux d'Harris-Taylor. — En ce qui concerne la notion de faisceau de Hecke, on renvoie le lecteur à [6] §6 ; comme dans loc. cit. §7, \mathfrak{G} désignera le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers de Hecke adapté à la situation.

4.4.1. Définition. — Soit $D_{v,d}$ l'algèbre à division centrale sur F_v d'invariant $1/d$ et d'ordre maximal $\mathcal{D}_{v,d}$.

4.4.2. Notation. — La correspondance de Jacquet-Langlands locale associée à toute $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible τ_v de $D_{v,h}^{\times}$ un diviseur g de $h = tg$ et une représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$. On notera alors $\pi_v[t]_D$ cette représentation de $D_{v,h}^{\times}$.

À toute $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible admissible $\tau_v = \pi_v[t]_D$ de $D_{v,h}^{\times}$, on associe un système local de Hecke $\mathcal{F}(\pi_v, t)_1$ sur $X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\leq h}$ pour le groupe

$$G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^{\times} \times (\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^{\times} \times D_{v,h}^{\times} / \mathcal{D}_{v,h}^{\times}$$

dont l'action, cf. [14] p.136, se factorise par $G^{(h)}(\mathbb{A}^{\infty}) / \mathcal{D}_{v,h}^{\times}$ via l'application

$$(g^{\infty,p}, g_{p,0}, c, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta) \mapsto (g^{p,\infty}, g_{p,0} q^{v(\det \delta)^{-c}}, \delta, g_v^{et}, g_{v_i}). \quad (4.4.3)$$

4.4.4. Notation. — Pour $1 \leq t < s$, on note $\mathcal{F}(\pi_v, t)$ le faisceau sur $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h}$ obtenu en induisant $\mathcal{F}(\pi_v, t)_1$ géométriquement :

$$\mathcal{F}(\pi_v, t) := \mathcal{F}(\pi_v, t)_1 \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v).$$

Par ailleurs si Γ est un réseau stable de τ_v , on notera $\mathcal{F}_{\Gamma}(\pi_v, t)$ le $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau associé.

Remarque : $\mathcal{F}(\pi_v, t)$ se présente sous la forme d'une somme directe de e_{π_v} faisceaux de Hecke irréductibles $\mathcal{F}(\pi_v, t) = \bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \mathfrak{F}_{\rho_{v,i}, \mathcal{I}}$ où $(\pi_v[t]_D)_{|\mathcal{D}_{v,h}^\times} = \bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \rho_{v,i}$ avec $\rho_{v,i}$ irréductible.

4.4.5. Définition. — (**Systemes locaux dits d'Harris-Taylor**) Pour Π_t une représentation de $GL_{tg}(F_v)$, on note $HT(\pi_v, \Pi_t)$ le W_v -faisceau pervers de Hecke sur $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{=tg}$ pour $G(\mathbb{A}^\infty)$ défini par

$$H(\pi_v, \Pi_t) := \mathcal{F}(\pi_v, t)[d - tg] \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}} \otimes \Pi_t,$$

où l'action se déduit par induction par celle de

$$(g^p, g_{p,0}, c, g_v^{et}, g_{v_i}, g_v^c, \sigma) \in$$

$$G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times (\mathbb{Z} \times GL_{d-tg}(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times GL_{tg}(F_v) \times W_v$$

sur le faisceau non induit, via

- $(g^p, g_{p,0} q^{-c+v(\det g_v^c) - \deg \sigma}, \gamma, g^{et}, g_{v_i}) \in G^{(tg)}(\mathbb{A}^\infty)/\mathcal{D}_{v,tg}^\times$ sur $\mathcal{F}(t, \pi_v)$ où $\gamma \in D_{v,tg}^\times/\mathcal{D}_{v,tg}^\times$ est tel que $v(\text{rn}\gamma) = v(\det g_v^c) - \deg \sigma$;
- g_v^c sur Π_t ,

et où comme précédemment le radical unipotent de $P_{tg,d}(F_v)$ agit trivialement.

Si Γ est un réseau stable de $\pi_v[t]_D$ et Γ_t un réseau stable de Π_t , on notera $HT_{\Gamma \otimes_t}(\pi_v, \Pi_t)$ le $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau associé.

Remarque : l'action de W_v sur ces faisceaux d'Harris-Taylor se factorise par l'application deg ; dans [6] on a choisi de les considérer comme des \mathbb{Z} -faisceaux de Hecke de sorte que l'action de $c_v \in W_v$ est donnée par celle de $(q^{-\deg c_v}, \text{deg } c_v) \in \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Z}$.

4.4.6. Proposition. — (cf. [6] proposition 4.3.1 et corollaire 5.4.1) Pour tout $1 \leq t \leq s$, on a l'égalité dans \mathfrak{G} :

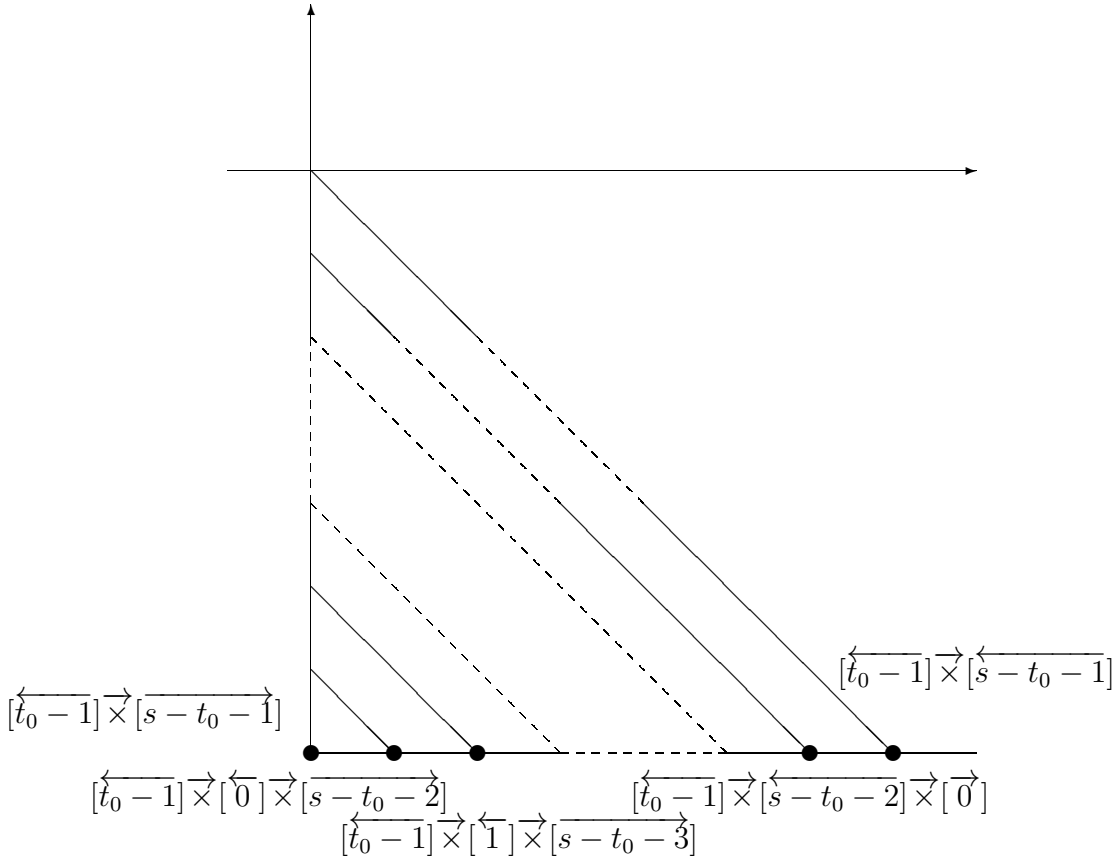
$$i_*^{tg} j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) = i_*^{tg} j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) + \sum_{i=1}^{s-t} i_*^{(t+i)g} j_!^{\geq (t+i)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{i-1}]_{\pi_v})(i/2). \quad (4.4.7)$$

Remarque : on rappelle que $j^{\geq h}$ est affine et donc $j_!^{\geq h}$ est t -exact.

4.4.8. Proposition. — Pour tout $1 \leq t \leq s$, $j_!^{\geq tg} HT_{\bar{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v, \Pi_t)$ possède une unique filtration avec gradués simples ; ces gradués gr^k sont :

- nuls pour $k > 0$;
- pour $k \leq 0$ il sont égaux à

$$j_!^{\geq (t-k)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{-k-1}]_{\pi_v}) \otimes \Xi^{k/2}$$


 FIGURE 1. Germes en un point supersingulier des $\text{EFill}_{\mathfrak{S},1}^{p,q}(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$

Démonstration. — Le cas $t = s$ étant trivial, on suppose $1 \leq t < s$. On rappelle que d'après [6], pour tout $1 \leq t \leq s$, on a l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck

$$j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) = \sum_{r=0}^{s-t} j_{!*}^{\geq (t+r)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{[\overleftarrow{r-1}]_{\pi_v}}) \otimes \Xi^{-r/2}.$$

Par ailleurs d'après loc. cit, la fibre en un point supersingulier de $h^i j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ est nulle sauf pour $i = 1 - t$. On considère alors la fibre en un point supersingulier de la suite spectrale de stratification exhaustive, cf. la notation 2.7.3

$$\text{EFill}_{\mathfrak{S},1}^{p,q}(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)) = h^{p+q} \text{gr}_r^{-p} (j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)) \Rightarrow h^{p+q} j_{\mathcal{I},!}^{\geq tg} HT_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(\pi_v, \Pi_t),$$

dont on trouvera une illustration à la figure 1. Ainsi pour tout $p \geq 0$, il existe un unique q tel que la fibre en un point supersingulier de $\text{EFill}_{\mathfrak{S},1}^{p,q}(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$ soit non nulle. Le résultat découle alors du fait que la fibre en un point supersingulier de l'aboutissement est nulle. \square

4.4.9. Corollaire. — *Les systèmes locaux d'Harris-Taylor sont récursifs au sens de de la définition 3.3.4; autrement dit si*

$$(0) = \text{Fill}_!^0(\Pi_t) \subset \text{Fill}_!^1(\Pi_t) \subset \cdots \subset \text{Fill}_!^{s+1-t}(\Pi_t) = j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$$

est la filtration de stratification exhaustive de $j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$. Pour tout $1 \leq k \leq s+1-t$, on a alors une surjection

$$j_!^{\geq (s+1-k)g} j^{\geq (s+1-k)g,*} \text{Fill}_!^k(\Pi_t) \twoheadrightarrow \text{Fill}_!^k(\Pi_t)$$

où $\text{Fill}_!^k(\Pi_t)$ est à support dans $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq (s+1-k)g}$ avec

$$j^{\geq (s+1-k)g,*} \text{Fill}_!^k(\Pi_t) \simeq HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-k-t]_{\pi_v}}) \otimes \Xi^{(k+t-s+1)/2}$$

et dont l'image dans le groupe de Grothendieck est

$$\sum_{i=1}^k j_{!*}^{\geq (s+1-i)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-i-t]_{\pi_v}}) \otimes \Xi^{(i+t-s+1)/2}.$$

Remarque : on a un énoncé dual concernant $j_*^{\geq tg} HT_{\mathbb{Q}_l}(\pi_v, \Pi_t)$ et sa cofiltration de stratification exhaustive

$$\begin{aligned} j_*^{\geq tg} HT_{\mathbb{Q}_l}(\pi_v, \Pi_t) &= \text{CoFill}_{*,t-s-1}(\Pi_t) \twoheadrightarrow \text{CoFill}_{*,t-s}(\Pi_t) \twoheadrightarrow \cdots \\ &\twoheadrightarrow \text{CoFill}_{*,-1}(\Pi_t) \twoheadrightarrow \text{CoFill}_{*,0}(\Pi_t) = 0. \end{aligned}$$

Démonstration. — On pose $P = j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$; avec les notations de la définition 2.4.2,

$$\text{Fill}_!^{s+1-t}(\Pi_t) = \text{Fil}_{X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq tg}}^1(P) = P,$$

ce qui donne donc le résultat pour $k = s+1-t$. Comme les gradués de l'unique filtration maximale de P sont rangés dans l'ordre croissant de leur dimension, nécessairement on a

$$\text{Fill}_!^{s-t}(\Pi_t) = \text{Fil}_{X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq tg}}^0(P) = \text{Fil}_{X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=(t+1)g}}^1\left(\text{Fil}_{X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq tg}}^0(P)\right),$$

ce qui donne le résultat pour $k = s-t$.

Selon le même argument, à chaque étape de la construction de la filtration de stratification exhaustive, on aura

$$\text{Fill}_!^{s-t+1-k}(\Pi_t) = \text{Fil}_{X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=(t+k)g}}^1\left(\text{Fill}_!^{s-t+1-k}(\Pi_t)\right)$$

et

$$\text{Fill}_!^{s-t+1-k-1}(\Pi_t) = \text{Fil}_{X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=(t+k)g}}^0\left(\text{Fill}_!^{s-t+1-k}(\Pi_t)\right).$$

d'où le résultat. □

4.5. Faisceau pervers de Hecke des cycles proches. —

4.5.1. Définition. — Pour tout $J \in \mathcal{I}$, les faisceaux pervers des cycles évanescents $R\Psi_{\eta_v, J}(\Lambda)[d-1](\frac{d-1}{2})$ sur $X_{J, \bar{s}}$ définissent un W_v -faisceau pervers de Hecke, au sens de la définition 1.3.6 de [6], que l'on note $\Psi_{\mathcal{I}, \Lambda}$.

Remarque : comme dans le paragraphe précédent, pour $\Lambda = \bar{\mathbb{Q}}_l$, on notera simplement $\Psi_{\mathcal{I}}$.
Remarque : dans [6] §2.2, on utilise l'action de la monodromie pour découper $\Psi_{\mathcal{I}}$ en une somme directe

$$\Psi_{\mathcal{I}} = \bigoplus_{\substack{1 \leq g \leq d \\ \pi_v \in \text{Cusp}_v(g)}} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$$

où $\text{Cusp}_v(g)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence inertielles, cf. définition 1.1.3 de [6], des représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(F_v)$ avec $1 \leq g \leq d$.

4.5.2. Définition. — (**Faisceau pervers dits d'Harris-Taylor**) On note $\mathcal{P}(t, \pi_v)$ le W_v -faisceau pervers de Hecke sur $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq 1}$ de support $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq h}$ et de poids zéro défini par

$$i_*^{tg} j_*^{\geq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathfrak{L}(\pi_v),$$

où \mathfrak{L}^\vee est la correspondance de Langlands, cf. [14].

L'action de $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_v$ sur $\mathcal{P}(t, \pi_v)$ se définit par induction en faisant agir

$$(g^p, g_{p,0}, g_v^c, g_v^{et}, g_{v_i}, \sigma) \in G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times GL_{tg}(F_v) \times GL_{d-tg}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times W_v$$

via l'action de :

- $(g^p, g_{p,0} q^{-\deg \sigma}, \gamma, g_v^{et}, g_{v_i}) \in G^{(tg)}(\mathbb{A}^\infty) / \mathcal{D}_{v, tg}^\times$ sur $\mathcal{F}(t, \pi_v)$ où $\gamma \in D_{v, tg}^\times$ est tel que $v(\text{rn} \delta) = v(\det g_v^c) - \deg \sigma$;
- (g_v^c, σ) sur $\text{St}_t(\pi_v) \otimes \mathfrak{L}(\pi_v)$.

Remarque : on notera que $\mathcal{P}(t, \pi_v)$ ne dépend, en tant que W_v -faisceau pervers de Hecke, que de la classe d'équivalence inertielle de π_v . Si Γ_D , Γ_G et Γ_W sont respectivement des réseaux stables de $\pi_v[t]_D$, $\text{St}_t(\pi_v)$ et $\mathfrak{L}(\pi_v)$, on notera

$$\mathcal{P}_{\Gamma_{\otimes t}}(t, \pi_v)$$

le $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau pervers de Hecke associé.

4.5.3. Proposition. — (cf. [6] corollaire 5.4.2) On a l'égalité suivante dans \mathfrak{G} :

$$e_{\pi_v}[\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}] = \sum_{k=1-s_g}^{s_g-1} \sum_{\substack{|k| < t \leq s_g \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} \mathcal{P}(t, \pi_v)\left(-\frac{k}{2}\right),$$

où e_{π_v} est le cardinal de la classe d'équivalence inertielle de π_v , cf. loc. cit. définition 1.1.3.

Remarque : d'après la remarque qui suit le théorème 2.4.4 de [6], les faisceaux pervers d'Harris-Taylor $\mathcal{P}(t, \pi_v)$ sont de la forme $e_{\pi_v} \mathfrak{P}(t, \pi_v)$ où $\mathfrak{P}(t, \pi_v)$ est un faisceau pervers simple.

Comme précédemment, nous allons étudier les filtrations de stratification du W_v -faisceau pervers de Hecke $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$, où π_v est une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ avec $1 \leq g \leq d$ et $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$.

4.5.4. Proposition. — *Soit*

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{G}}^0(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{G}}^1(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \cdots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{G}}^s(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) = \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$$

la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ de la proposition 2.6.2. Pour tout $1 \leq k \leq s$, la surjection

$$j_!^{\geq kg} HT(\pi_v, [\overleftarrow{k-1}]_{\pi_v}) \otimes L_g(\pi_v) \left(\frac{1-k}{2} \right) \twoheadrightarrow \text{Fil}_{\mathfrak{G}}^k(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) / \text{Fil}_{\mathfrak{G}}^{k-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}),$$

a pour image dans le groupe de Grothendieck

$$\sum_{i=k}^s \mathcal{P}(i, \pi_v) \left(\frac{k-i}{2} \right).$$

Remarque : la figure 2 illustre la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ où chaque cercle représente un faisceau pervers d'Harris-Taylor $\mathcal{P}(t, \pi_v) \left(\frac{1-t}{2} + k \right)$.

Démonstration. — L'observation de la suite spectrale de monodromie-poids faisceutique

$$E_1^{M, p, q} = h^{p+q} gr_{-p}^M(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \Rightarrow h^{p+q} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$$

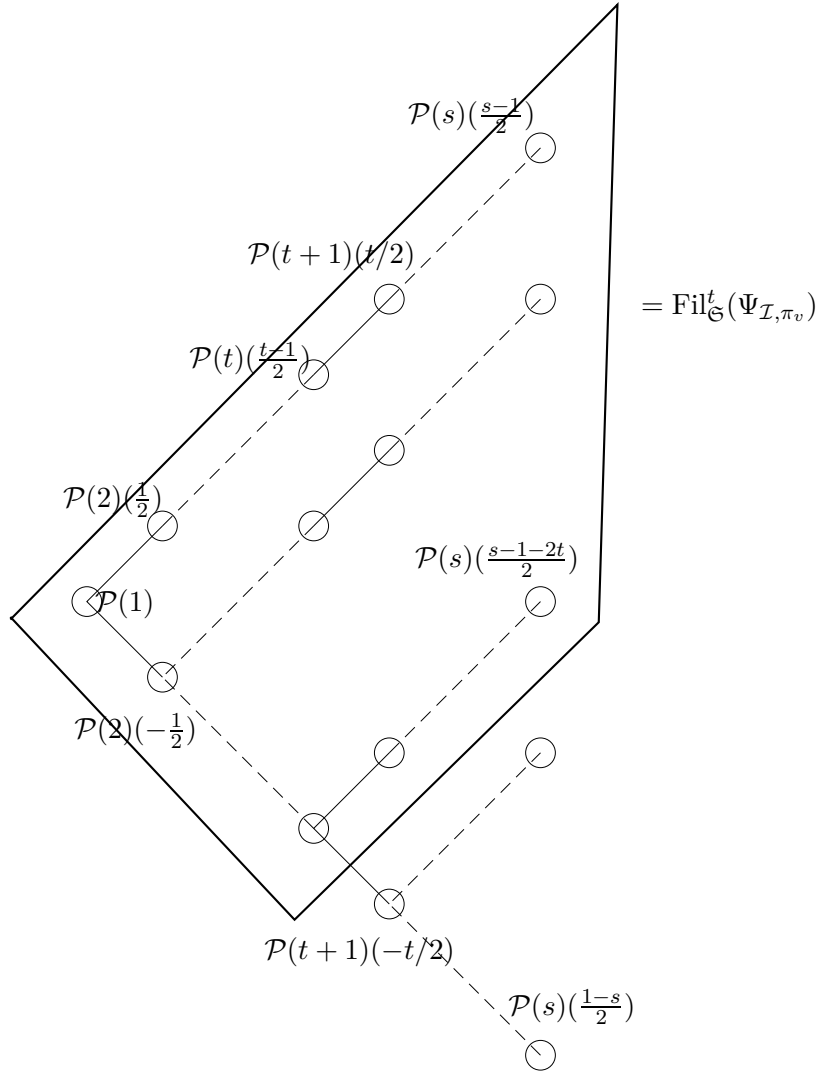
décrite par le théorème 2.2.6 de [6] impose que pour tout $1 \leq t \leq s-1$ et pour tout $0 \leq k \leq s-t-1$, dans toute filtration croissante de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ l'indice k_1 du gradué contenant $\mathcal{P}(t-k, \pi_v) \left(\frac{t-k-1}{2} \right)$ est inférieur ou égale à l'indice k_2 du gradué contenant $\mathcal{P}(t-k+1, \pi_v) \left(\frac{t-k-2}{2} \right)$.

Remarque : à la figure 3, les contraintes mentionnées ci-avant s'expriment en disant que chaque fois que deux cercles sont reliés il faut que l'indice de celui qui est le plus bas soit supérieur ou égal à l'autre.

On rappelle que $j_!^{\geq g, *}\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} \simeq HT(\pi_v, \pi_v) \otimes L_g(\pi_v)$; ainsi $\text{Fil}_{\mathfrak{G}}^1(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ qui est l'image de

$$j_!^{\geq g} HT(\pi_v, \pi_v) \otimes L_g(\pi_v) \longrightarrow \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}, \quad (4.5.5)$$

a une image nécessairement inférieure, dans \mathfrak{G} , à $\sum_{i=1}^s \mathcal{P}(i, \pi_v)(i/2)$ car d'après la proposition 4.4.6, ce sont les seuls constituants de $j_!^{\geq g} HT(\pi_v, \pi_v) \otimes L_g(\pi_v)$ qui sont des constituants de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ d'après la proposition 4.5.3. Or d'après l'observation du début de la preuve illustré par la figure 3, pour tout $i \geq 1$, l'indice d'un gradué contenant $\mathcal{P}(i, \pi_v)(i/2)$ est inférieur ou égal à celui de contenant $\mathcal{P}(1, \pi_v)$. On en déduit donc que l'image de (4.5.5) est égale à $\sum_{i=1}^s \mathcal{P}(i, \pi_v)(i/2)$.


 FIGURE 2. Illustration de la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$.

Supposons le résultat acquis jusqu'au rang t . Le quotient $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} / \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^t(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ est alors à support dans $X_{\overline{I}, \overline{s}}^{\geq (t+1)g}$ avec

$$j^{\geq (t+1)g, *} \left(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} / \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^t(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \right) \simeq HT(\pi_v, [\overleftarrow{t}]_{\pi_v}) \otimes L_g(\pi_v)(-t/2).$$

L'image de

$$j_!^{\geq (t+1)g} HT(\pi_v, [\overleftarrow{t}]_{\pi_v}) \otimes L_g(\pi_v)(-t/2) \longrightarrow \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} / \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^t(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$$

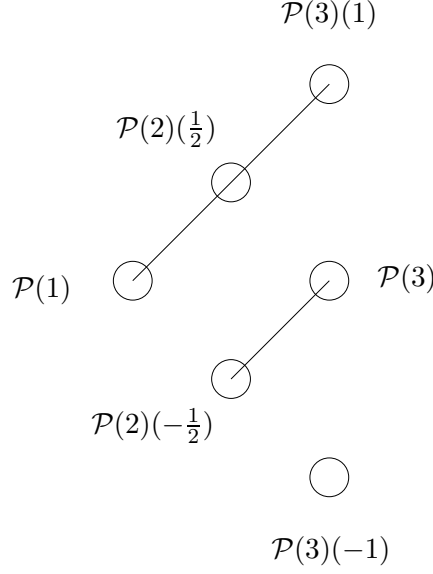


FIGURE 3. Illustration des contraintes d'une filtration de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ avec $s = 3$.

est alors, d'après les propositions 4.5.3 et 4.4.6, dans \mathfrak{G} , inférieure ou égale à

$$\sum_{i=t+1}^s \mathcal{P}(i, \pi_v) \left(\frac{i-1-2t}{2} \right)$$

et contient $\mathcal{P}(t+1, \pi_v)(-t/2)$. D'après l'observation du début de la preuve, pour tout $i > t+1$, l'indice d'un gradué contenant $\mathcal{P}(i, \pi_v) \left(\frac{i+1-2t}{2} \right)$ est inférieur ou égal à celui contenant $\mathcal{P}(t+1, \pi_v)(-t/2)$ de sorte que cette image est égale à $\sum_{i=t+1}^s \mathcal{P}(i, \pi_v) \left(\frac{i-1-2t}{2} \right)$. On conclut alors par récurrence. \square

Dualement on a la description suivante de la cofiltration de stratification.

4.5.6. Proposition. — *On note*

$$\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} = \text{CoFil}_{\mathfrak{S}, -s}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S}, 1-s}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S}, 0}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) = 0$$

la cofiltration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ de la proposition 2.6.6. Pour tout $1 \leq k \leq s$, l'injection

$$\text{Ker} \left(\text{CoFil}_{\mathfrak{S}, -k}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S}, 1-k}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \right) \hookrightarrow j_*^{\geq kg} HT(\pi_v, [\overleftarrow{k-1}]_{\pi_v}) \otimes L_g(\pi_v) \left(\frac{k-1}{2} \right),$$

a pour image dans le groupe de Grothendieck

$$\sum_{i=k}^s \mathcal{P}(i, \pi_v) \left(\frac{i-k}{2} \right).$$

Remarque : pour $s \geq 3$, on notera ainsi que les filtrations $\text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v})$ et ${}^{\vee}\text{CoFil}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v})$ ne coïncident pas, cf. par exemple l'illustration de la figure 4 où les traits relient les faisceaux pervers simples d'un même gradué et où on a centré les graduations de sorte que le gradué de plus grande dimension soit d'indice nul.

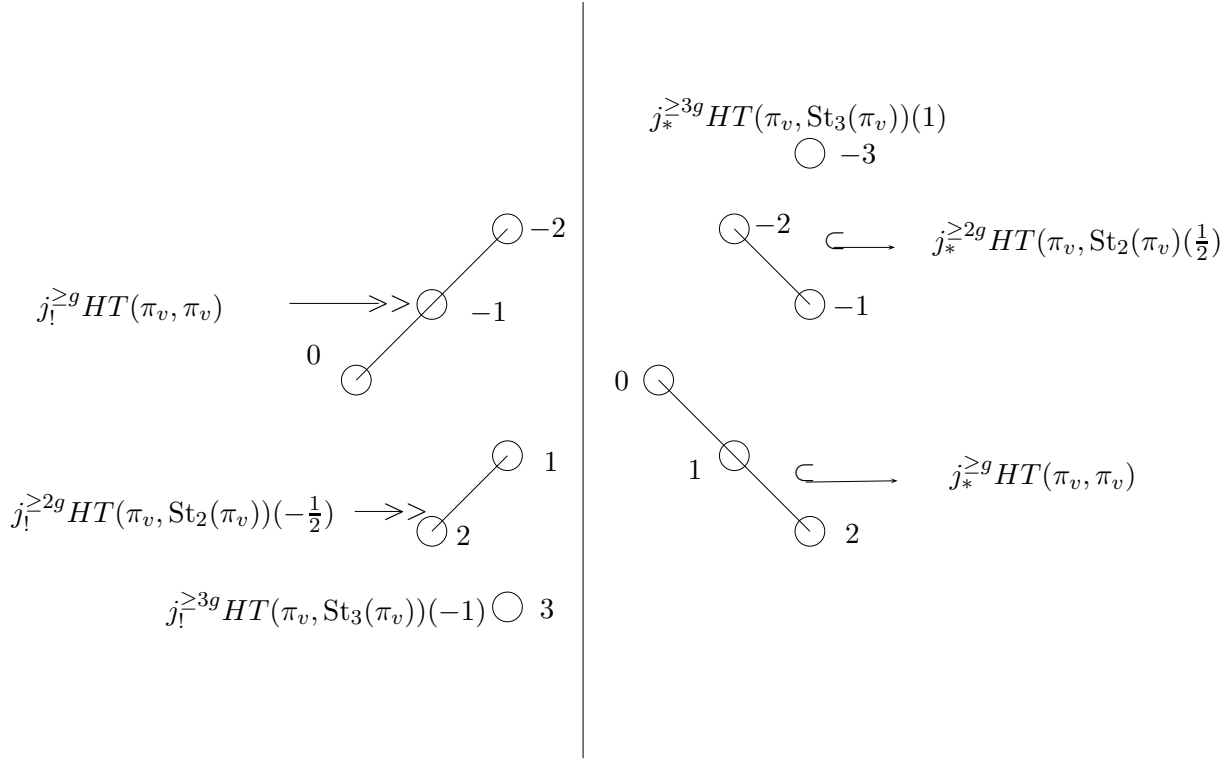


FIGURE 4. Illustration de la filtration (fig. à gauche) et de la cofiltration (fig. à droite) de stratification de $\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$ avec $s = 3$.

Remarque : les filtrations (resp. les cofiltrations) de stratification exhaustives de $j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v})$ (resp. $j_*^{\geq tg} HT(\pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v})$) fournissent alors la filtration (resp. la cofiltration) de stratification exhaustive de $\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$. On renvoie à la figure 4 pour un exemple de numérotation des gradués.

4.5.7. Corollaire. — *La suite spectrale associée à la filtration de stratification*

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^1(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) \subset \dots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^s(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) = \Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$$

dégénère en E_1 .

Démonstration. — Le résultat découle directement de la description [6] 2.2.6 des flèches de la suite spectrale de monodromie-poids faisceautique

$$E_1^{M,p,q} = h^{p+q} gr_{-p}^M(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) \Rightarrow h^{p+q} \Psi_{\mathcal{I},\pi_v}.$$

□

Remarque : autrement dit toutes les flèches de la suite spectrale de monodromie proviennent des tranches, i.e. des flèches des suites spectrales associées aux $j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v})$.

Remarque : à l'inverse les suites spectrales des tranches de la cofiltration de stratification dégènèrent en E_1 , alors que la suite spectrale associée à la cofiltration de stratification contient toutes les flèches de la suite spectrale de monodromie.

5. Retour sur les résultats faisceautiques de [6]

L'objectif de ce paragraphe est de revenir sur la preuve des principaux résultats de [6] en utilisant les filtrations de stratification, l'intérêt étant de simplifier les arguments et de dégager une future stratégie d'étude sur $\bar{\mathbb{Z}}_l$ et $\bar{\mathbb{F}}_l$. Rappelons tout d'abord la stratégie de loc. cit.

1. On utilise tout d'abord le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues afin de relier les germes des faisceaux de cohomologie du complexe des cycles évanescents à une représentation locale dite de Deligne-Carayol : cette partie est rappelée dans le paragraphe suivant.
2. Dans [14], les auteurs donnent une « recette » afin de calculer la somme alternée des groupes de cohomologie des $j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ avec les notations précédentes. Ainsi au terme du §5.4 de [6], on obtient les propositions 4.4.6 et 4.5.3 qui s'énoncent dans des groupes de Grothendieck de faisceaux pervers de Hecke.
3. Ensuite il s'agit de calculer les faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor ainsi que ceux du complexe des cycles évanescents. Pour ce faire :
 - dans [6], on utilise une propriété d'autodualité à la Zelevinski sur la cohomologie des espaces de Lubin-Tate, prouvée par Fargues ;
 - une deuxième solution est proposée dans [7] et repose sur le théorème de Lefschetz difficile et sur des calculs fastidieux de groupes de cohomologie.

Dans la suite nous proposons une troisième alternative beaucoup plus simple de l'étape 3.

5.1. Espaces de Lubin-Tate. — La lettre K désigne une extension finie de \mathbb{Q}_p , dont on note \mathcal{O}_K l'anneau des entiers, \mathcal{P}_K l'idéal maximal, ϖ_K une uniformisante et $\kappa = \mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K$ son corps résiduel de cardinal $q = p^f$. L'extension maximal non ramifiée de K sera notée K^{nr} de complété \hat{K}^{nr} , d'anneau des entiers respectifs $\mathcal{O}_{K^{nr}}$ et $\mathcal{O}_{\hat{K}^{nr}}$.

Soit $d \geq 1$ et $\Sigma_{K,d}$ le \mathcal{O}_K -module de Barsotti-Tate formel sur $\bar{\kappa}$ de hauteur d , cf. [14] §II. On considère la catégorie \mathcal{C} des \mathcal{O}_K -algèbres locales, artiniennes, de corps résiduel $\bar{\kappa}$.

5.1.1. Définition. — Le foncteur qui à un objet R de C associe l'ensemble des classes d'isomorphismes des déformations par quasi-isogénies sur R de $\Sigma_{K,d}$ munies d'une structure de niveau n est pro-représentable par un schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n} = \coprod_{h \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(h)}$ où $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(h)}$ représente le même foncteur mais en considérant des déformations par des isogénies de hauteur h .

Remarque : chacun des $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(h)}$ est non-canoniquement isomorphe au schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(0)}$ noté $\text{Spf Def}_{d,n}$ dans [6].

Remarque : on notera sans chapeau les fibres génériques au sens de Raynaud-Berkovich de ces espaces; ce sont donc des \widehat{K}^{nr} -espaces analytiques au sens de [4]. On pose

$$\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K} := \mathcal{M}_{LT,n} \widehat{\otimes}_{\widehat{K}^{nr}} \widehat{K}.$$

5.1.2. Définition. — Étant donné un anneau Λ , soit $\Psi_{K,\Lambda,d,n}^i$ le Λ -module de type fini associé, via la théorie des cycles évanescents de Berkovich, au morphisme structural $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(0)} \rightarrow \text{Spf } \widehat{\mathcal{O}}_K^{nr}$.

Remarque : on a en fait $\Psi_{K,\Lambda,d,n}^i \simeq H_c^i(\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K}, \Lambda)$.

5.1.3 — Ce module est muni d'une action de $GL_d(\mathcal{O}_K)$ qui se factorise par le morphisme surjectif naturel $GL_d(\mathcal{O}_K) \rightarrow GL_d(\mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K^n)$ et on pose $\Psi_{K,\Lambda,d}^i = \varinjlim_n \Psi_{K,\Lambda,d,n}^i$ de sorte que comme $\mathfrak{K}_n := \text{Ker}(GL_d(\mathcal{O}_K) \rightarrow GL_d(\mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K^n))$ est pro- p pour tout $n \geq 1$, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\Psi_{K,\mathbb{Q}_l,d,n}^i = (\Psi_{K,\mathbb{Q}_l,d}^i)^{\mathfrak{K}_n}.$$

5.1.4. Notations. — On notera

- $D_{K,d}$ l'algèbre à division centrale sur K d'invariant $1/d$ et $\mathcal{D}_{K,d}$ son ordre maximal;
- $GDW_K(d)$ le groupe produit $GL_d(K) \times D_{K,d}^\times \times W_K$;
- $GDW_K(d)^0$ le noyau de l'application

$$(g, \delta, c) \mapsto \text{val}(\det(g^{-1})\text{rn}(\delta) \text{Art}_K^{-1}(c)) \in \mathbb{Z};$$

on adoptera une notation similaire pour $GW_K^0(d)$.

- $GDW_K(d)^1$ le noyau de l'application $GDW_K(d) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Le groupe des automorphismes de $\Sigma_{K,d}$ s'identifie avec $D_{K,d}^\times$ lequel agit donc naturellement sur $\Psi_{K,\Lambda,d}$ tout comme le sous-groupe d'inertie I_K . On dispose ainsi d'une action « naturelle » de $GL_d(\mathcal{O}_K) \times \mathcal{D}_{K,d}^\times \times I_K$ sur $\Psi_{K,\Lambda,d}$ que l'on peut prolonger, cf. [5] par exemple, au groupe $GDW_K(d)^0$. Pour un caractère χ de K^\times d'image finie, soit $\Psi_{K,\mathbb{Q}_l,d,\chi}$ le facteur direct de $\Psi_{K,\mathbb{Q}_l,d}$ sur lequel le centre de $GL_d(\mathcal{O})$ agit via χ , l'action de $GDW_K(d)^0$ sur $\Psi_{K,\mathbb{Q}_l,d,\chi}$ se prolonger alors à $GDW_K(d)^1$.

Remarque : la construction précédente pour les espaces $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}$ fourni des $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -espaces vectoriels $\mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d,n}^i \simeq (\mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d}^i)^{\otimes n}$ où

$$\mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d,\chi}^i \simeq \text{Ind}_{GDW_K(d)^1}^{GDW_K(d)} \Psi_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d,\chi}^i$$

est une représentation de $GDW_K(d)$.

5.1.5. Notation. — Soit $\text{Cusp}_\chi(|d|)$ l'ensemble des classes d'équivalences des représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(K)$ de caractère central χ où g décrit les diviseurs de d . Pour $\pi \in \text{Cusp}_\chi(|d|)$, on notera

$$\mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d,\pi}^i = \text{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}_l[D_{K,d}^\times]}(\pi[s]_D, \mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,\chi}^i),$$

avec $\pi[s]_D := \text{JL}^{-1}(\text{St}_s(\pi)^\vee)$ où JL désigne la correspondance de Jacquet-Langlands.

Remarque : comme toute représentation irréductible τ de $D_{K,d}^\times$ de caractère central χ est de la forme $\pi[s]_D$ pour une certaine représentation irréductible cuspidale π de $GL_g(K)$ de caractère central χ , on en déduit que

$$\mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,\chi}^i \simeq \bigoplus_{\pi \in \text{Cusp}_\chi(|d|)} \mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,\pi}^i.$$

5.1.6. Théorème. — [6] Pour tout diviseur g de $d = sg$ et toute représentation irréductible cuspidale π de $GL_g(K)$, on a

$$\mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d,\pi}^{d-1-i} \simeq \begin{cases} \mathcal{L}(\pi)(-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}) \otimes [\overleftarrow{s-1-i}, \overrightarrow{i}]_\pi & 0 \leq i < s \\ 0 & i < 0 \end{cases}$$

où \mathcal{L}^\vee désigne la correspondance de Langlands locale construite dans [14].

5.2. Les systèmes locaux d'Harris-Taylor sont récurrents. — Il s'agit de prouver le corollaire 4.4.9 sans utiliser le calcul des germes aux points supersinguliers des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor. Pour cela on raisonne par récurrence sur t de s à 1. Les cas $t = s$ et $s - 1$ étant évidents, supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $t + 1$ et traitons le cas de t . On pose $P = {}^p h_{\text{libre}}^{-1} i_* j_* HT(\pi_v, \Pi_t)$ de sorte que l'on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow P \rightarrow {}^p j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow {}^p j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0.$$

Il s'agit ainsi de montrer que le morphisme d'adjonction $j_!^{\geq (t+1)g} j^{\geq (t+1)g,*} P \rightarrow P$ est surjectif ; on note P_0 l'image de ce morphisme. De la connaissance des constituants irréductibles de P et, d'après l'hypothèse de récurrence, des quotients de $j_!^{\geq (t+1)g} j^{\geq (t+1)g,*} P$, l'image de P_0 dans le groupe de Grothendieck est, en utilisant que les strates non supersingulières sont géométriquement induites, de la forme

$$[P_0] = \sum_{i=1}^{s-t-k} i_*^{(t+i)g} j_{!*}^{\geq (t+i)g} HT(\pi_v, \Pi_t \times \overrightarrow{[i-1]_{\pi_v}})(i/2)$$

pour un entier $0 \leq k \leq s - t - 1$. Par ailleurs la filtration par les poids de P fournit un quotient $P \twoheadrightarrow P'_0$ où $[P'_0] = [P_0]$ dans le groupe de Grothendieck de sorte que le composé $P_0 \hookrightarrow P \twoheadrightarrow P'_0$ est un isomorphisme. On obtient ainsi que P_0 est un facteur direct de $P \simeq P_0 \oplus Q_0$. Il nous faut alors prouver que Q_0 est nul.

Pour ce faire nous allons raisonner sur la cohomologie des systèmes locaux d'Harris-Taylor à la manière de [7], l'idée étant de montrer qu'il existe un indice $i \leq -k$ tel que $H^i(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$ est non nul de sorte que comme $j^{\geq tg}$ est affine et donc que tous les $H^i(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$ sont nuls pour $i < 0$, on doit nécessairement avoir $k = 0$ et donc Q_0 est nul. On note A le pushout

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) & \longrightarrow & {}^p j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & P_0 & \dashrightarrow & A & \longrightarrow & {}^p j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow 0 \end{array}$$

de sorte que l'on a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow Q_0 \rightarrow j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow A \rightarrow 0$$

où la flèche $A \rightarrow Q_0[1]$ se factorise par ${}^p j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow Q_0[1]$. Pour k non nul, par pureté on en déduit alors que les flèches $H^i(A) \rightarrow H^{1+i}(Q_0)$ sont nulles et donc

$$H^i(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)) \simeq H^i(A) \oplus H^i(Q_0).$$

Il suffit alors de prouver que $H^{-k}(A)$ est non nul. On reprend alors les calculs de [7] : on inverse tout d'abord les égalités (4.4.7), pour obtenir les égalités suivantes, cf. [7] proposition 2.6.1 ou [6] corollaire 5.4.1

$$i_{\mathcal{L},*}^{\geq tg} j_{\mathcal{L},!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) = \sum_{r=0}^{s-t} (-1)^r i_{\mathcal{L},*}^{(t+r)g} j_{\mathcal{L},!*}^{\geq (t+r)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [r - \hat{1}]_{\pi_v})(r/2). \quad (5.2.1)$$

Soit alors comme dans [7] §3.5, une représentation automorphe Π de $G(\mathbb{A})$ telle que $\Pi_v \simeq \overrightarrow{[s - \hat{1}]_{\pi_v}}$ et Π est cohomologique pour ξ au sens de loc. cit. D'après [7] lemme 3.5.3, en utilisant les calculs de [14] sur la somme alternée des groupes de cohomologie des $j_{\mathcal{L},!*}^{\geq (t+r)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [r - \hat{1}]_{\pi_v})$, l'égalité (5.2.1) nous donne que les parties de poids $t - s$ de $H^i({}^p j_{\mathcal{L},!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))[\Pi^{\infty, v}]$ sont nulles pour $i \neq t - s$ et $GL_d(F_v)$ -isotypiques de la forme $\Pi_t \overrightarrow{\times} [s - t - \hat{1}]_{\pi_v}$ pour $i = t - s$. On en déduit alors que dans la suite spectrale des poids calculant la cohomologie de A , la composante $\Pi_t \overrightarrow{\times} [s - t - k, k - \hat{1}]_{\pi_v}$ de poids $t - s$ de $H^{-k}({}^p j_{\mathcal{L},!*}^{\geq (s-k)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [s - t - k - \hat{1}]_{\pi_v}) \binom{s-t-k}{2})[\Pi^{\infty, v}]$ n'est pas un constituant d'un autre des termes initiaux de cette suite spectrale et en fournit donc un constituant de son aboutissement et donc un constituant de poids $t - s$ de $H^{-k}(A)[\Pi^{\infty, v}]$ qui est donc non nul.

5.3. Faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor. — Soit

$$0 \rightarrow \mathrm{Fill}_!^{s-t}(\Pi_t) \longrightarrow j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0,$$

avec d'après ce qui précède une surjection

$$j_!^{\geq (t+1)g} HT(\pi_v, \Pi_t \xrightarrow{\overrightarrow{\times}} \pi_v) \otimes \Xi^{-1/2} \twoheadrightarrow \mathrm{Fill}_!^{s-t}(\Pi_t)$$

que l'on voit comme un morphisme de faisceaux pervers filtrés. On obtient ainsi un morphisme de suites spectrales

$$\left(\mathrm{E}\mathrm{Fill}_r^{p,q} \left(j_!^{\geq (t+1)g} HT(\pi_v, \Pi_t \xrightarrow{\overrightarrow{\times}} \pi_v) \right), d_r^{p,q} \right) \longrightarrow \left(\mathrm{E}\mathrm{Fill}_r^{p,q}(\mathrm{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{s-t}(\Pi_t)), d_r^{p,q} \right). \quad (5.3.1)$$

Comme les $d_r^{p,q}$ du membre de gauche sont connues par récurrence, on en déduit les $d_r^{p,q}$ du membre de droite et donc comme les germes des faisceaux de cohomologie de $j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ sont connues, on en déduit les germes des faisceaux de cohomologie de $j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ ainsi que la description de la suite spectrale de $\left(\mathrm{E}\mathrm{Fill}_r^{p,q} \left(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \right), d_r^{p,q} \right)$.

Remarque : on trouvera à la figure 5 une illustration de l'argument précédent ; ainsi la description explicite de la suite spectrale de la figure 1 de [6] §5.8 est obtenue sans utiliser ni la propriété d'autodualité du modèle local ni le théorème de Lefschetz difficile sur la cohomologie de la variété de Shimura.

5.4. Faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I}}$. — Il s'agit à partir de la proposition 4.5.3 de prouver la proposition 4.5.4 ; le calcul des faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I}}$ procédera alors comme dans la preuve du corollaire 4.5.7.

Démonstration de la proposition 4.5.4. — Supposons par l'absurde qu'il existe un indice k pour lequel

$$j_!^{\geq kg} HT(\pi_v, \overleftarrow{[k-1]}_{\pi_v}) \otimes L_g(\pi_v) \left(\frac{1-k}{2} \right) \longrightarrow \mathrm{Fil}_S^k(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) / \mathrm{Fil}^{k-1}(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) \quad (5.4.1)$$

a une image dans le groupe de Grothendieck strictement inférieure à $\sum_{i=k}^s \mathcal{P}(i, \pi_v) \left(-\frac{2k-1-i}{2} \right)$.

Remarque : d'après 4.5.3 et 4.4.6, cette image est nécessairement inférieure ou égale à celle proposée.

D'après 4.4.9, l'image en question est de la forme $\sum_{i=k}^{k+r_k} \mathcal{P}(i, \pi_v) \left(-\frac{2k-1-i}{2} \right)$ pour un entier $0 < r_k \leq s - k$. On considère alors i minimal tel qu'il existe $1 \leq k \leq s - 1$ pour lequel $\mathcal{P}(i, \pi_v) \left(-\frac{2k-1-i}{2} \right)$ n'appartienne pas à l'image de (5.4.1). On en déduit alors que $HT(\pi_v, \overleftarrow{[i-1]}_{\pi_v}) \left(-\frac{2k-1-i}{2} \right)$ est un quotient de $j^{\geq ig,*} \Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$ et donc que le germe en un point géométrique de $X_{\mathcal{I}}^{\leftarrow ig}$ admet un constituant de poids $2k - 1 - i$, de sorte que d'après l'hypothèse de récurrence sur le modèle local, on doit nécessairement avoir $i = s$.

Ainsi soit k minimal tel que $\mathcal{P}(s, \pi_v) \left(-\frac{2k-1-s}{2} \right)$ n'appartienne pas à l'image de (5.4.1). Comme précédemment on en déduit alors que $\mathcal{P}(s, \pi_v) \left(-\frac{2k-1-s}{2} \right)$, tout comme $\mathcal{P}(s, \pi_v) \left(-\frac{s-1}{2} \right)$, est un quotient de $\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$ et donc la fibre en un point supersingulier de

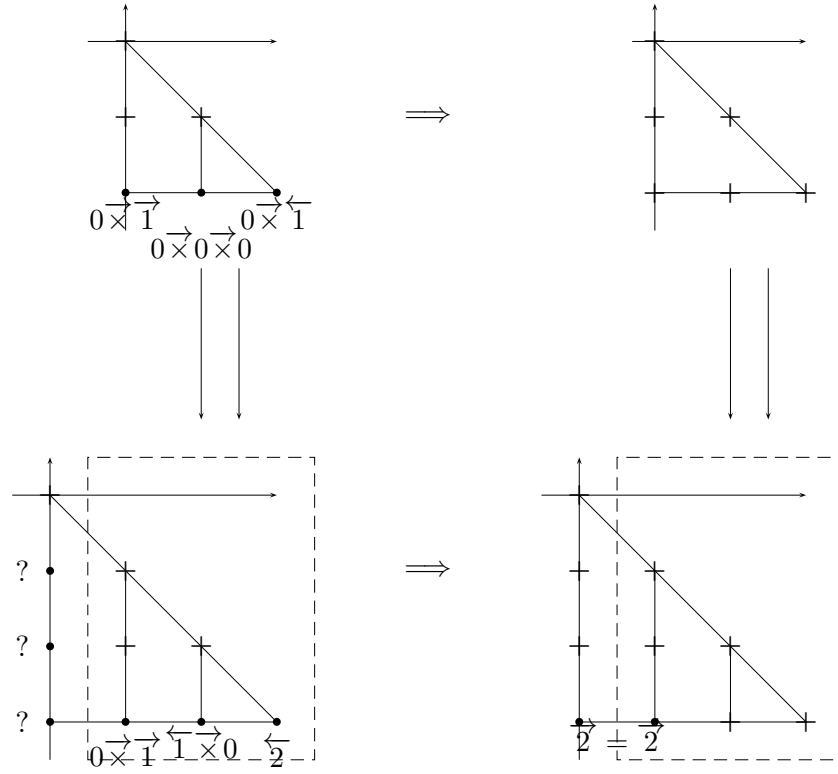


FIGURE 5. Germes en un point supersingulier du morphisme de suites spectrales (5.3.1) ; on explicite simplement l'action du groupe linéaire en « factorisant » par $\Pi_t \overrightarrow{\times}$, i.e. quand on écrit $0 \overrightarrow{\times} 1$ il faut lire avec les notations précédentes $\Pi_t \overrightarrow{\times} 0 \overleftarrow{\times} \pi_v \overrightarrow{\times} 1 \overrightarrow{\times} \pi_v$.

$h^0 \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ admet $\pi_v[s]_D \otimes \overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v} \otimes L_g(\pi_v)(\frac{k-s}{2})$ comme quotient. On considère alors la suite spectrale des cycles évanescents et plus particulièrement sa Π^∞ composante isotypique pour Π automorphe avec $\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\pi_v)$. On note alors que $H^0(h^0 \Psi_{\mathcal{I}})[\Pi^{\infty, v}]$ admet $\text{St}_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{k-s}{2})$ comme sous-quotient. En utilisant les calculs de $H^i(j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$ donné au §5.2 de [6], on remarque alors, à travers les suites spectrales de stratification, que pour tout $i > 0$, $H^i(h^{1-i} \Psi_{\mathcal{I}})[\Pi^{\infty, v}]$ n'admet pas $\text{St}_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{k-s}{2})$ comme sous-quotient de sorte que $H_\eta^0[\Pi^{\infty, v}]$ admet $\text{St}_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{k-s}{2})$ comme sous-quotient, ce qui contredit le fait que $H_\eta^0[\Pi^\infty]$ est non nul si et seulement si Π est une représentation automorphe. \square

6. Rappels sur la réduction modulo l des représentations

On rappelle que l et p désignent des nombres premiers distincts et que q est une puissance de p . On note $e_l(q)$ l'ordre de l'image de q dans \mathbb{F}_l^\times .

6.1. de $GL_d(K)$. — Afin de simplifier la lecture, dans la suite on utilisera la lettre π pour désigner une \mathbb{Q}_l -représentation entière et les lettres ϱ et ρ pour des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations.

6.1.1. Définition. — Une représentation ϱ de $GL_n(K)$ est dite cuspidale si pour tout sous-groupe parabolique propre P de $GL_n(K)$, $J_P(\varrho)$ est nul. Elle sera dite supercuspidale si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre.

6.1.2. Notation. — On notera $\epsilon(\varrho)$ le cardinal de la droite de Zelevinski de ϱ , i.e. de l'ensemble des classes d'équivalence $\{\varrho\{i\} / i \in \mathbb{Z}\}$. On pose alors cf. [20] p.51

$$m(\varrho) = \begin{cases} \epsilon(\varrho), & \text{si } \epsilon(\varrho) > 1; \\ l, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque : $\epsilon(\varrho)$ est un diviseur de $e_l(q)$.

6.1.3. Définition. — Étant donné un multi-ensemble $\underline{s} = \{\rho_1^{n_1}, \dots, \rho_r^{n_r}\}$ de représentations cuspidales, on note d'après [20] V.7, $\text{St}(\underline{s})$ l'unique représentation non dégénérée de l'induite

$$\rho(\underline{s}) := \overbrace{\rho_1 \times \dots \times \rho_1}^{n_1} \times \dots \times \overbrace{\rho_r \times \dots \times \rho_r}^{n_r}.$$

Remarque : d'après [20] V.7, toutes les représentations non dégénérées sont de cette forme.

6.1.4. Notation. — Pour ρ une représentation irréductible cuspidale et $s \geq 1$, on note $\underline{s}(\rho)$ le multi-segment $\{\rho, \rho\{1\}, \dots, \rho\{s-1\}\}$ et comme dans [20] V.4, $\text{St}_s(\rho) := \text{St}(\underline{s}(\rho))$.

6.1.5. Proposition. — [20] V.4 Soit ϱ une représentation irréductible cuspidale. La représentation non dégénérée $\text{St}_s(\varrho)$ est cuspidale si et seulement $s = 1$ ou $m(\varrho)l^k$ pour $k \geq 0$.

6.1.6. Notation. — Soit ϱ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$; on note alors $\varrho_{-1} = \varrho$ et pour tout $i \geq 0$, $\varrho_i = \text{St}_{m(\varrho)l^i}(\varrho)$.

Remarque : d'après [18] III-3.15 et 5.14, toute représentation irréductible cuspidale est de la forme $\text{St}_s(\varrho)$ pour ϱ irréductible supercuspidale et $s = 1$ ou de la forme $m(\varrho)l^k$ avec $k \geq 0$.

6.1.7. Définition. — Soit $s \geq 1$ un entier et ϱ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$. On note $\mathcal{I}_\varrho(s)$ l'ensemble des suites (m_{-1}, m_0, \dots) à valeurs dans \mathbb{N} telles que

$$s = m_{-1} + m(\varrho) \sum_{k=0}^{+\infty} m_k l^k.$$

Pour $\underline{i} = (i_{-1}, i_0, \dots) \in \mathcal{I}_\varrho(s)$, on définit

$$\mathrm{St}_{\underline{i}}(\varrho) := \mathrm{St}_{\underline{i}_{-1}}(\varrho_{-1}) \times \mathrm{St}_{\underline{i}_0}(\varrho_0) \times \cdots \times \mathrm{St}_{\underline{i}_u}(\varrho_u)$$

où $i_k = 0$ pour tout $k > u$ et où les ϱ_i sont définis en 6.1.6.

6.1.8. Proposition. — (cf. [18] III.5.10) *La réduction modulo l d'une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(K)$ est irréductible cuspidale.*

6.1.9. Théorème. — *Soit π une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(K)$ et ϱ sa réduction modulo l . Dans le groupe de Grothendieck des $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentations de $GL_{sg}(K)$, on a l'égalité suivante :*

$$r_l\left(\mathrm{St}_s(\pi)\right) = \sum_{\underline{i} \in \mathcal{I}_\varrho(s)} \mathrm{St}_{\underline{i}}(\varrho).$$

Par ailleurs pour tout $\underline{i} \in \mathcal{I}_\varrho(s)$ et pour tout parabolique P , $J_P\left(\mathrm{St}_{\underline{i}}(\varrho)\right)$ est égal à la somme des constituants irréductibles de ϱ -niveau \underline{i} de $r_l\left(J_P(\mathrm{St}_s(\pi))\right)$.

Remarque : pour $s < m(\varrho)$, la réduction modulo l de $\mathrm{St}_s(\pi)$ est irréductible.

6.1.10. Définition. — On dira que l est *banal* pour $GL_d(K)$ si $e_l(q) > d$.

Remarque : dans le cas banal toute représentation cuspidale est supercuspidale, i.e. $m(\varrho) < s$ avec les notations précédentes.

6.2. de W_K . — Soit σ une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible de dimension d de W_K qui est l -entière et soit π la représentation irréductible cuspidale de $GL_d(K)$ telle que $\sigma = L_d(\pi)$. D'après 6.1.8, la réduction modulo l de π est une représentation irréductible cuspidale qui d'après le paragraphe précédent est donc de la forme $\mathrm{St}_{m(\sigma)}(\varrho)$ pour ϱ une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale de $GL_e(K)$. On note alors ς l'image de ϱ par la correspondance de Langlands modulaire définie par M.-F. Vignéras.

6.2.1. Proposition. — (cf. [19] 1.20 et [21] 1.6) *La réduction modulo l de σ est de la forme*

$$\varsigma\left(\frac{1 - m(\sigma)}{2}\right) \oplus \cdots \oplus \varsigma\left(\frac{m(\sigma) - 1}{2}\right).$$

6.3. de $D_{K,d}^\times$. — Soit τ une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible l -entière de $D_{K,d}^\times$ dont l'image par la correspondance de Jacquet-Langlands locale est $\mathrm{St}_s(\pi)$ pour π une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$ avec $d = sg$; autrement dit $\tau = \pi[s]_D$ avec les notations précédentes. D'après 6.1.8, la réduction modulo l de π est de la forme $\mathrm{St}_{m(\tau)}(\varrho)$ pour ϱ une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale de $GL_e(K)$. On note alors ι l'image de

$\text{Speh}_s(\varrho)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands modulaire définie par J.-F. Dat au §1.2.4 de [9].

6.3.1. Proposition. — *La réduction modulo l de τ est avec les notations précédentes de la forme*

$$\iota\mathcal{W}^{-(m(\tau)-1)/2} \oplus \iota\mathcal{W}^{-(m(\tau)-3)/2} \oplus \dots \oplus \iota\mathcal{W}^{(m(\tau)-1)/2}$$

où ν désigne $g \mapsto q^{\text{val} \circ \text{Nrd}(g)}$.

6.4. Complexes d'induction des représentations de Steinberg. — Pour π une représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(K)$, comme, d'après 6.1.8, sa réduction modulo l , notée ϱ , est irréductible, on en déduit qu'à isomorphismes près, π possède un unique réseau stable, cf. par exemple [3] proposition 3.3.2 et la remarque qui suit.

6.4.1. Définition. — (cf. [8]) Étant donné un réseau de $\text{St}_t(\pi)$, la surjection (resp. l'injection)

$$\text{St}_t(\pi) \times \pi\{t\} \twoheadrightarrow \text{St}_{t+1}(\pi), \quad \text{resp. } \text{St}_{t+1}(\pi) \hookrightarrow \text{St}_t(\pi\{1\}) \times \pi$$

induit un réseau de $\text{St}_{t+1}(\pi)$ de sorte que par récurrence on dispose d'un réseau $RI_{\bar{\mathbb{Z}}_l, -}(\pi, t)$ (resp. $RI_{\bar{\mathbb{Z}}_l, +}(\pi, t)$) que l'on qualifie de *réseau d'induction*. On note alors

$$RI_{\bar{\mathbb{F}}_l, -}(\pi, t) := RI_{\bar{\mathbb{Z}}_l, -}(\pi, t) \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{F}}_l, \quad \text{resp. } RI_{\bar{\mathbb{F}}_l, +}(\pi, t) := RI_{\bar{\mathbb{Z}}_l, +}(\pi, t) \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{F}}_l.$$

6.4.2. Proposition. — (cf. [8] propositions 3.2.2 et 3.2.7) *Pour tout $0 \leq k \leq \text{lg}_\varrho(s)$, il existe une sous-représentation $V_{\varrho, \pm}(s; k)$ de longueur k de $RI_{\bar{\mathbb{F}}_l, \pm}(\overleftarrow{[s-1]}_\pi)$*

$$(0) = V_{\varrho, \pm}(s; 0) \subsetneq V_{\varrho, \pm}(s; 1) \subsetneq \dots \subsetneq V_{\varrho, \pm}(s; \text{lg}_\varrho(s)) = RI_{\bar{\mathbb{F}}_l, \pm}(\pi, s),$$

définie de sorte que l'image de $V_{\varrho, -}(s; k)$ (resp. $V_{\varrho, +}(s; k)$) dans le groupe de Grothendieck est telle que tous ses constituants irréductibles sont de ϱ -niveau strictement plus grand (resp. plus petit) que n'importe quel constituant irréductible de $W_{\varrho, -}(s; k) := V_{\varrho, -}(s; \text{lg}_\varrho(s))/V_{\varrho, -}(s; k)$ ((resp. $W_{\varrho, +}(s; k) := V_{\varrho, +}(s; \text{lg}_\varrho(s))/V_{\varrho, +}(s; k)$).

6.4.3. Notation. — *Une représentation irréductible ϱ étant fixée ainsi qu'un entier s , pour $k \geq 0$ tel que $m(\varrho)l^k \leq s$, on note :*

- $\underline{\delta}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \mathcal{I}_\varrho(s)$ et
- pour tout t tel que $m(\varrho)l^k t \leq s$, $V_{\varrho, \pm}(s, \geq t \cdot \underline{\delta}_k)$ le sous-espace $V_{\varrho, \pm}(s, i)$ défini ci-dessus tel que tous les constituants irréductibles de $V_{\varrho, -}(s, i)$ (resp. $V_{\varrho, +}(s, i)$) sont de ϱ -niveau plus grand (resp. plus petit) ou égal à $t \cdot \underline{\delta}_k$.

Pour tout $s \geq 1$, on note $K_\pi(s)^\bullet$ le complexe

$$K_\pi(s)^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq 0 \text{ ou } i < -s \\ RI_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi, s+i) \xrightarrow{\overrightarrow{[-i-1]}_\pi} & \text{pour } -s \leq i \leq 0 \end{cases}$$

et dont la cohomologie est nulle. On définit aussi

$$K_\varrho(s)^\bullet := K_\pi(s)^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$$

dont la cohomologie est nulle d'après le paragraphe précédent.

6.4.4. Définition. — Pour tout $k, t \geq 0$, tels que $m(\varrho)l^k t \leq s$, avec les notations de 6.4.3, on définit

- $K_\varrho(s, \geq t.\underline{\delta}_k)^\bullet$ le sous-complexe de $K_\varrho(s)$ défini, pour $-s \leq i \leq 0$ par

$$K_\varrho(s, \geq t.\underline{\delta}_k)^i = V_\varrho(s, \geq t.\underline{\delta}_k) \overrightarrow{\times} [-i - 1]_\pi;$$

- $K_\varrho(s, < t.\underline{\delta}_k)^\bullet$ le quotient de $K_\varrho(s)$ par $K_\varrho(s, \geq t.\underline{\delta}_k)$.

6.4.5. Proposition. — La cohomologie $h^i K_\varrho(s, < \underline{\delta}_k)^\bullet$ du complexe $K_\varrho(s, < t.\underline{\delta}_k)$ est :

- nulle si $m(\varrho)l^k$ ne divise pas s ;
- pour $s = \delta m(\varrho)l^k$, elle est nulle si $i \neq -\delta$ et pour $i = -\delta$ isomorphe à $[\overrightarrow{\delta - 1}]_{\rho_k}$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur s quelque soit ϱ ; l'initialisation étant triviale supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $s - 1$ et traitons le cas de s .

Soit u tel que $m(\varrho)l^u \leq s < m(\varrho)l^{u+1}$; pour tout $0 \leq k \leq u$, on note $t_k \geq 1$ tel que $t_k m(\varrho)l^k \leq s < (t_k + 1)m(\varrho)l^k$ et on considère la filtration suivante de $K_\varrho(s)$:

$$\begin{aligned} K_\varrho(s, > t_u \underline{\delta}_u)^\bullet &\subset K_\varrho(s, > (t_u - 1)\underline{\delta}_u)^\bullet \subset \cdots \subset K_\varrho(s, > \underline{\delta}_u)^\bullet \\ &\subset K_\varrho(s, > t_{u-1} \underline{\delta}_{u-1})^\bullet \subset \cdots \subset K_\varrho(s, > \underline{\delta}_{u-1})^\bullet \\ &\cdots \subset K_\varrho(s, > t_0 \underline{\delta}_0)^\bullet \subset \cdots \subset K_\varrho(s, > \underline{\delta}_0)^\bullet \subset K_\varrho(s) \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

On a alors les propriétés suivantes :

- pour $1 \leq k \leq u$, $K_\varrho(s, > t_{k-1}.\underline{\delta}_{k-1})^\bullet / K_\varrho(s, > \underline{\delta}_k)$ est le complexe

$$\text{St}_{t_{k-1}}(\rho_{k-1}) \overrightarrow{\times} K_\varrho(s - t_{k-1}m(\varrho)l^{k-1}, < \underline{\delta}_0),$$

dont la cohomologie est, d'après l'hypothèse de récurrence, nulle sauf si $s = t_{k-1}m(\varrho)l^{k-1}$ auquel cas h^0 est le seul h^i non nul, et alors isomorphe à $\text{St}_{t_{k-1}}(\rho_{k-1})$;

- pour $0 \leq k \leq u$ et $1 \leq t < t_k$, le complexe $K_\varrho(s, > t.\underline{\delta}_k)^\bullet / K_\varrho(s, > (t+1).\underline{\delta}_k)$ est le complexe

$$\text{St}_t(\rho_k) \overrightarrow{\times} K_\varrho(s - tm(\varrho)l^k, < \underline{\delta}_k),$$

dont la cohomologie est, d'après l'hypothèse de récurrence, nulle sauf si $s - tm(\varrho)l^k$ auquel cas h^{t-t_k} est le seul h^i non nul, et alors isomorphe à $\text{St}_t(\rho_k) \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{t_k - t - 1}]_{\rho_k}$.

Considérons alors la suite spectrale de cohomologie $E_1^{i,j} = h^{i+j} gr_{-i} \Rightarrow E_\infty^{i+j}$, associée à la filtration 6.4.5 ; d'après les propriétés précédentes les $E_1^{i,j}$ sont connus par récurrence pour tout $i > 0$ et l'aboutissement E_∞^{i+h} est nul. Par ailleurs les flèches $d_r^{i,j}$ sont déterminées par le complexe $K_\varrho(s)^\bullet$ de sorte que les $E_1^{0,j}$ s'en déduisent.

Concrètement pour $0 \leq k \leq u$ tel que $s = m(\varrho)l^k t_k$, il existe $i_1 < i_2 < \dots < i_{t_k}$ tels que pour $1 \leq r \leq t_k$,

$$E_1^{i_r, -t_k - i_r + r} = \text{St}_{\underline{\varrho}}(\rho_k) \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[t_k - r - 1]_{\rho_k}}, \quad \underline{\varrho} \in \mathcal{I}_{\rho_k}(r).$$

Par ailleurs comme les flèches $E_1^{i_r, -t_k - i_r + r} \rightarrow E_1^{i_{r+1}, -t_k - i_{r+1} + r + 1}$ sont induites par celles de $K_{\varrho}(s)^{\bullet}$, on en déduit, en utilisant l'hypothèse de récurrence, que $E_1^{0, -t_k}$ est isomorphe à $\overrightarrow{[t_k - 1]_{\rho_k}}$, d'où le résultat. \square

On renvoie le lecteur au §7.3 pour une utilisation de ces complexes dans le cadre des faisceaux de cohomologie des extensions par zéro des systèmes locaux d'Harris-Taylor modulo l .

7. Sur les filtrations de stratification entières

Le but ultime que l'on poursuit est de déterminer la cohomologie locale $\mathcal{U}_{K, \bar{\mathbb{Z}}_l, d}^i$ et globale $H_{\eta, \bar{\mathbb{Z}}_l}^i := H^i(X_{\mathcal{I}} \times_{F_v} \bar{F}_v, \bar{\mathbb{Z}}_l)$ avec les notations du §4.2. Plutôt que d'attaquer frontalement ces questions, on peut commencer par étudier les problèmes suivants :

- déterminer la cohomologie modulo l ; rappelons en effet les suites exactes courtes

$$0 \rightarrow \mathbb{F}\mathcal{U}_{K, \bar{\mathbb{Z}}_l, d}^i \longrightarrow \mathcal{U}_{K, \bar{\mathbb{F}}_l, d}^i \longrightarrow \mathcal{U}_{K, \bar{\mathbb{Z}}_l, d}^{i+1}[l] \rightarrow 0 \quad (7.0.1)$$

$$0 \rightarrow \mathbb{F}H_{\eta, \bar{\mathbb{Z}}_l}^i \longrightarrow H_{\eta, \bar{\mathbb{F}}_l}^i \longrightarrow H_{\eta, \bar{\mathbb{Z}}_l}^{i+1}[l] \rightarrow 0 \quad (7.0.2)$$

où \mathbb{F} désigne le foncteur $\otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{F}}_l$ et $[l]$ la l -torsion ;

- expliciter la torsion dans $\mathcal{U}_{K, \bar{\mathbb{Z}}_l, d}^i$ et $H_{\eta, \bar{\mathbb{Z}}_l}^i$;
- expliciter les réseaux des parties libres.

Nous reviendrons sur ces questions dans un prochain article, en attendant, nous allons proposer une mise en place de la stratégie qui sera suivie en traduisant ces questions en terme de propriétés à vérifier sur les filtrations de stratification des extensions d'un système local d'Harris-Taylor et du faisceau pervers des cycles proches pour l'anneau de coefficient $\Lambda = \bar{\mathbb{Z}}_l$. Rappelons que par rapport au cas $\Lambda = \bar{\mathbb{Q}}_l$, le phénomène de saturation engendre les indéterminations suivantes :

- on ne connaît pas la position des gradués entre les p et les $p+$ extensions intermédiaires des systèmes locaux d'Harris-Taylor ;
- les réseaux stables associés aux divers systèmes locaux d'Harris-Taylor sont à déterminer.

Convention : on écrira $HT_{\bar{\mathbb{Z}}_l}$ et $\mathcal{P}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}$ un $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau pervers d'Harris-Taylor relativement à un réseau stable que l'on ne souhaite pas préciser.

7.1. Cas supercuspidal. — Notons $GL_d(K)^0 := \text{Ker}\left(\text{val}_K \circ \det : GL_d(K) \rightarrow K^\times\right)$.

7.1.1. Définition. — (cf. [10]) Une $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -représentation lisse de $GL_d(K)$ est dite supercuspidale si aucun de ses $\bar{\mathbb{Z}}_l GL_d(K)^0$ -sous-quotients n'est un sous-quotient d'une induite parabolique propre. On note $\text{Rep}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}^\infty(GL_d(K))$ la catégorie des représentations lisse de $GL_d(K)$ et $\text{Rep}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}^{sc}(GL_d(K))$ sa sous-catégorie dont les objets sont les représentations supercuspidales.

7.1.2. Proposition. — (cf. [10] proposition 3.0.2) La sous-catégorie $\text{Rep}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}^{sc}(GL_d(K))$ de $\text{Rep}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}^\infty(GL_d(K))$ est facteur direct.

Ainsi toute représentation $V \in \text{Rep}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}^\infty(GL_d(K))$ se décompose canoniquement en $V = V_{sc} \oplus V'$ avec $V_{sc} \in \text{Rep}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}^{sc}(GL_d(K))$ et V' une représentation dont aucun $\bar{\mathbb{Z}}_l GL_d(K)^0$ -sous-quotient n'est supercuspidal au sens de la définition 7.1.1.

7.1.3. Proposition. — Pour tout $i \neq d-1$ (resp. $i = d-1$), $\mathcal{U}_{K, \bar{\mathbb{Z}}_l, d, sc}^i$ est nul (resp. sans torsion).

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour tout $i \neq d-1$, $\mathcal{U}_{K, \bar{\mathbb{F}}_l, d}^i$ en tant que $\bar{\mathbb{F}}_l GL_d(K)$ -représentation, n'admet aucun sous-quotient irréductible supercuspidal. En utilisant le théorème de comparaison de Berkovich on est ramené à montrer que pour tout $i < 0$, la fibre en un point supersingulier de $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{F}}_l}^i$ n'admet aucun sous-quotient irréductible supercuspidal. On considère alors l'image par le foncteur \mathbb{F} d'une filtration de stratification exhaustive $\text{Fill}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}^i(\Psi)$ de $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}$ et la fibre en un point supersingulier de la suite spectrale

$$E_1^{p,q} = h^{p+q} \mathbb{F} grr^{-p}(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{F}}_l}) \Rightarrow h^{p+q} \Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{F}}_l}$$

qui lui est associée. Pour tout $i < 0$, la fibre en un point supersingulier de $h^i grr^k(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})$ est induite parabolique et pour $i = 0$, la torsion de $h^0 grr^k(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})$ est induite de sorte que d'après la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbb{F} h^i grr^k(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}) \rightarrow h^i \mathbb{F} grr^k(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}) \rightarrow h^{i+1} grr^k(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}) \rightarrow 0$$

pour tout $p+q < 0$, $E_1^{p,q}$ est une induite parabolique et donc ne contient pas de sous-quotient irréductible supercuspidal; il en est donc de même pour $E_\infty^{p,q}$. \square

Remarque : pour ceux qui ne voudraient pas utiliser la définition 7.1.1 ci-dessus, on aurait tout aussi bien pu dire que pour tout $i \neq d-1$, $\mathcal{U}_{K, \bar{\mathbb{F}}_l, d}^i$ en tant que $\bar{\mathbb{F}}_l GL_d(K)$ -représentation, n'admettait aucun sous-quotient irréductible supercuspidal.

7.1.4. Proposition. — Pour tout $i \neq 0$ (resp. $i = 0$), $H_{\eta, \bar{\mathbb{Z}}_l, sc}^i$ est nul (resp. sans torsion).

Démonstration. — Comme dans le cas local, il suffit de montrer que pour tout $i \neq 0$, $H_{\eta, \bar{\mathbb{F}}_l}^i$, en tant que $\bar{\mathbb{F}}_l GL_d(K)$ -représentation, n'admet aucun sous-quotient irréductible supercuspidal. Comme précédemment on considère une filtration de stratification exhaustive

de $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}$ et la suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^{p+q} \left(\mathbb{F} g r r^{-p} (\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{F}}_l}) \right) \Rightarrow H^{p+q} \left(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{F}}_l} \right) = H_{\eta, \bar{\mathbb{F}}_l}^{p+q}$$

qui lui est associée. Pour tout $p + q \neq 0$, les sous-quotients irréductibles de $E_1^{p,q}$ sont tous induits, puisqu'ils sont associés aux $g r r^k (\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})$ d'un système local sur une strate de Newton non supersingulière. De même comme le H^0 d'un système local concentré aux points supersinguliers est sans torsion, on obtient que la torsion de $E_1^{p,-p}$ est induite parabolique et donc les sous-quotients irréductibles des $E_1^{p,q}$ pour $p + q \neq 0$ ne contiennent aucun sous-quotient irréductible supercuspidal ; il en est donc de même pour E_∞^{p+q} . \square

Remarque : comme dans le cas local, l'énoncé s'exprime de manière équivalente en disant que pour tout $i \neq 0$, $H_{\eta, \bar{\mathbb{F}}_l}^i$, en tant que $\bar{\mathbb{F}}_l GL_d(K)$ -représentation, n'admet aucun sous-quotient irréductible supercuspidal.

7.2. Deux hypothèses sur la saturation. — On a vu au corollaire 4.4.9 que, sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$, les systèmes locaux d'Harris-Taylor sont récurrents. On fait alors l'hypothèse suivante.

7.2.1. Hypothèse. — *Les $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -systèmes locaux d'Harris-Taylor sont exhaustivement saturés, i.e. leur extension par zéro l'est au sens de la définition 2.7.2.*

Remarque : par récurrence descendante sur t et par la définition des réseaux d'induction, on obtient que le réseau de $[\overleftarrow{s-t}]_{\pi_v}$ défini par $j_{\bar{l}}^{\geq tg} HT_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_v, t)$ sur son gradué supporté par les points supersinguliers, est $RI_{\bar{\mathbb{Z}}_l, -}(\pi_v, t)$.

7.2.2. Proposition. — *Les faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor sont sans torsion si et seulement si l'hypothèse 7.2.1 est vérifiée.*

Démonstration. — Fixons une représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$ et étudions les faisceaux pervers ${}^p j_{\bar{l}*}^{\geq tg} HT_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_v, \Pi_t)$. On raisonne alors par récurrence sur t de $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$ à 1. Comme ${}^p j_{\bar{l}*}^{\geq sg} HT_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_v, \Pi_t) \simeq {}^p j_{\bar{l}*}^{\geq sg} HT_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_v, \Pi_t)$, le résultat est clair pour $t = s$. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $t + 1$ et traitons le cas de t . Notons $P_{\bar{\mathbb{Z}}_l} = {}^p h^{-1} i_{\geq tg+1}^* j_{\bar{l}*}^{\geq tg} HT_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_v, \Pi_t)$ de sorte que

$$0 \rightarrow P_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \longrightarrow {}^p j_{\bar{l}*}^{\geq tg} HT_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow {}^p j_{\bar{l}*}^{\geq tg} HT_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0.$$

Comme $HT_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_v, \Pi_t)$ est récurrent, la surjection

$${}^p j_{\bar{l}*}^{\geq (t+1)g} HT_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v)(1/2) \rightarrow P_{\bar{\mathbb{Z}}_l}$$

fournit un morphisme de suites spectrales de $\mathrm{E}\mathrm{F}\mathrm{i}\mathrm{l}\mathrm{l}_r^{p,q}\left(j_!^{\geq(t+1)g}HT_{\bar{Z}_l}(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v)(1/2)\right)$ vers $\mathrm{E}\mathrm{F}\mathrm{i}\mathrm{l}\mathrm{l}_r^{p,q}(P_{\bar{Z}_l})$ i.e. des diagrammes commutatifs pour tout p, q, r :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E}\mathrm{F}\mathrm{i}\mathrm{l}\mathrm{l}_r^{p,q}\left(j_!^{\geq(t+1)g}HT_{\bar{Z}_l}(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v)(1/2)\right) & \longrightarrow & \mathrm{E}\mathrm{F}\mathrm{i}\mathrm{l}\mathrm{l}_r^{p+r,q+1-r}\left(j_!^{\geq(t+1)g}HT_{\bar{Z}_l}(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v)(1/2)\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{E}\mathrm{F}\mathrm{i}\mathrm{l}\mathrm{l}_r^{p,q} & \longrightarrow & \mathrm{E}\mathrm{F}\mathrm{i}\mathrm{l}\mathrm{l}_r^{p+r,q+1-r} \end{array}$$

En notant pour $0 \leq k \leq s - t - 1$, $gr_{!,k}$ (resp. gr_k) les gradués de la filtration de stratification de $j_!^{\geq(t+1)g}HT_{\bar{Z}_l}(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v)(1/2)$ (resp. de $P_{\bar{Z}_l}$), on a des suites exactes courtes

$$0 \rightarrow Q_k \longrightarrow gr_{!,k} \longrightarrow gr_k \rightarrow 0$$

avec $Q_k \simeq j_!^{\geq(s-k)g}HT_{\bar{Z}_l}(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [s - k - t - 1]_{\pi_v})(\frac{s-k-t}{2})$. Comme par récurrence, en tout point géométrique z il existe un unique i tel que la fibre en z du i -ème faisceau de cohomologie de Q_k (resp. de gr_k , resp. $gr_{!,k}$) est non nulle, on en déduit que pour tout (p, q) , les flèches $\mathrm{E}\mathrm{F}\mathrm{i}\mathrm{l}\mathrm{l}_{!,1}^{p,q} \longrightarrow \mathrm{E}\mathrm{F}\mathrm{i}\mathrm{l}\mathrm{l}_1^{p,q}$ sont surjectives. On remarque alors, cf. la figure 5 que $\mathrm{E}\mathrm{F}\mathrm{i}\mathrm{l}\mathrm{l}_r^{p,q}(P_{\bar{Z}_l})$ dégénère en E_2 et comme :

- les fibres en tout point géométrique de $X_{\mathcal{I},s}^{\geq(t+1)g}$ des $\mathrm{E}\mathrm{F}\mathrm{i}\mathrm{l}\mathrm{l}_2^{p,q}\left(j_!^{\geq(t+1)g}HT_{\bar{Z}_l}(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v)(1/2)\right)$ sont nulles et donc sans torsion,
 - les fibres de $\mathrm{E}\mathrm{F}\mathrm{i}\mathrm{l}\mathrm{l}_1^{p,q}(P_{\bar{Z}_l})$ sont sans torsion,
- alors, d'après le lemme suivant, les fibres de $\mathrm{E}\mathrm{F}\mathrm{i}\mathrm{l}\mathrm{l}_2^{p,q}(P_{\bar{Z}_l})$ sont sans torsion.

Réciproquement supposons qu'il existe une représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$ et $1 \leq t < s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$ pour lesquels $HT_{\Gamma}(\pi_v, t)$ ne vérifie pas l'hypothèse 7.2.1 pour un certain réseau Γ alors que pour tout $t < t' \leq s$, $HT_{\bar{Z}_l}(\pi_v, t')$ la vérifie, i.e. quel que soit le réseau considéré. En reprenant les notations précédentes, on note P'_Γ l'image de $j_!^{\geq(t+1)g}j_{\geq(t+1)g,*}P_\Gamma \longrightarrow P_\Gamma$. Le raisonnement précédent fournit les faisceaux de cohomologie de P'_Γ qui sont sans torsion. Le quotient Q_Γ de $j_!^{\geq tg}HT_{\Gamma}(\pi_v, t)$ par P'_Γ a :

- sa partie de torsion T_Γ non nulle à support dans $X_{\mathcal{I}}^{\geq(t+1)g}$ et
- sa partie libre isomorphe à $j_{!*}^{\geq tg}HT_{\Gamma}(\pi_v, t)$.

Si T_Γ est non nul, pour z un point générique de son support de dimension $-i_0$, on a

$$0 \rightarrow z^*h^{i_0-1}Q_\Gamma \longrightarrow z^*h^{i_0-1}j_{!*}^{\geq tg}HT_{\Gamma}(\pi_v, t) \longrightarrow z^*h^{i_0}T_\Gamma \rightarrow 0.$$

Or comme z se factorise par $X_{\mathcal{I}}^{\geq(t+1)g}$, d'après [6] théorème 2.2.5, la partie libre de $z^*h^{i_0-1}Q_\Gamma$ est nulle et donc nécessairement $z^*h^{i_0}j_{!*}^{\geq tg}HT_{\Gamma}(\pi_v, t)$ a de la torsion d'où le résultat. \square

7.2.3. Lemme. — Soit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

tel que

- A, B, C, A', B', C' sont des objets de $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$;
- $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$ dans ${}^+\mathcal{C}$, i.e. $\text{Ker } g / \text{Im } f$ libre.

Alors $\text{Im } f' \subset \text{Ker } g'$ dans ${}^+\mathcal{C}$ soit $\text{Ker } g' / \text{Im } f'$ est libre.

Démonstration. — De la suite exacte courte dans \mathcal{C} :

$$0 \rightarrow \text{Ker } g / \text{Im } f \rightarrow B / \text{Im } f \rightarrow B / \text{Ker } g \rightarrow 0$$

on en déduit comme :

- $\text{Ker } g / \text{Im } f$ est libre ;
- $B / \text{Ker } g \subset C$ dans \mathcal{C} est libre ;

que $B / \text{Im } f$ est libre. On a alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \twoheadrightarrow & B / \text{Im } f \\ & \searrow h & \downarrow & & \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & & \end{array}$$

de sorte que d'après le lemme 3.2.4, $B' / \text{Im } h = B' / \text{Im } f'$ est libre. Ainsi comme $\text{Ker } g' / \text{Im } f' \subset B' / \text{Im } f'$, on en déduit que $\text{Ker } g' / \text{Im } f'$ est libre. \square

Remarque sur l'hypothèse 7.2.1 : comme on le voit dans la preuve de la proposition précédente, si pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et $1 \leq t \leq s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$ tels que pour tout $t \leq t' \leq s$ $HT_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_v, t')$ est saturé quel que soit le réseau stable, alors pour tout $t \leq t' \leq s$, les faisceaux de cohomologie des ${}^p j_{!*}^{\geq tg} HT_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_v, t')$ sont sans torsion.

Afin d'étudier la torsion du modèle local, on est amené à étudier si $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}$ est saturé. On raisonne par récurrence sur d , i.e. on suppose que pour tout $1 \leq h < d$, les $\mathcal{U}_{K, \bar{\mathbb{Z}}_l, h}^i$ sont des $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -modules libres. On utilise alors le théorème de comparaison de Berkovich dans les deux sens :

- pour tout point géométrique z de $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{1 \leq d-1}$ la fibre en z de $h^i \Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}$ est libre ;
- la cohomologie du modèle local relativement à d est libre si et seulement si pour tout point supersingulier z , les fibres en z des $h^i \Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}$ sont libres.

7.2.4. Lemme. — Le faisceau pervers $j^{1 \leq d-1, *} \Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}$ est saturé.

Démonstration. — D’après la proposition 3.2.3, il suffit de vérifier que pour tout $1 \leq h < d$, ${}^p h^0 i_{=h}^* \Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}$ est sans torsion. Or ce dernier étant de la forme $\mathcal{L}[d-h]$ pour \mathcal{L} un faisceau localement constant, le résultat découle directement de l’hypothèse de récurrence sur le modèle local via le théorème de comparaison de Berkovich. \square

On fait alors l’hypothèse suivante.

7.2.5. Hypothèse. — *Le faisceau pervers $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}$ est saturé.*

7.2.6. Proposition. — *L’hypothèse 7.2.1 étant vérifiée, la torsion locale est nulle si et seulement si l’hypothèse 7.2.5 est vérifiée.*

Démonstration. — Supposons donc 7.2.1 et 7.2.5 vérifiées et soit

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^1(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \dots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^s(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) = \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$$

la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$. D’après [6], la $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -version de la suite spectrale associée à cette filtration qui calcule les faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}$, dégénère en E_1 de sorte qu’il suffit de montrer que les termes initiaux de celles-ci sont tous sans torsion.

Considérons alors un de ces gradués que l’on peut alors filtrer selon les représentations cuspidales d’un $GL_g(F_v)$; il suffit alors de montrer que ces nouveaux gradués sont sans torsion puisque sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$ il sont en somme directe. Or ces gradués, d’après 7.2.5, sont un quotient dans ${}^p \text{FPH}(X_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l})$ d’un $j_l^{\geq tg} HT_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_v, t) \otimes L_g(\pi_v)(-\frac{1-t+2k}{2})$. En raisonnant comme dans la preuve de la proposition 7.2.2, i.e. en utilisant 7.2.1, les faisceaux de cohomologie de ces gradués sont sans torsion, d’où le résultat.

Réciproquement, en suivant le même raisonnement, l’hypothèse 7.2.1 fournit la liberté des $h^i \Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}$ pour tout $i < 0$. Si 7.2.5 n’était pas vérifiée alors en raisonnant comme dans le cas respé de la proposition 7.2.2, on obtient que $h_{\text{tor}}^0 \Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}$ est non nulle. \square

7.3. Une conjecture sur les $p+$ faisceaux pervers d’Harris-Taylor. — Si l’on croit que la cohomologie du modèle local est sans torsion alors les hypothèses 7.2.1 et 7.2.5 sont vérifiées. Dans ce cas les gradués de la filtration de stratification sont les p extensions intermédiaires des systèmes locaux d’Harris-Taylor tandis que ceux de la cofiltration sont les $p+$ versions de ceux-ci. On est alors naturellement amené à la conjecture suivante.

7.3.1. Conjecture. — *Soit π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ telle que sa réduction modulo l est supercuspidale alors pour tout $1 \leq t \leq s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$, on a*

$${}^p j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_v, t)[d-tg] \simeq {}^{p+} j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_v, t)[d-tg].$$

Remarque : de manière équivalente, ${}^p h^0 i^{tg,*} j_*^{\geq tg} \mathcal{F}_{\Gamma}(\pi_v, t)[d-tg]$ est libre quelque soit le réseau stable Γ : comme la réduction modulo l de $\pi_v[t]_D$ est irréductible, l’indépendance relativement au réseau Γ considéré est immédiate.

Remarque : dans la conjecture précédente, la restriction aux π dont la réduction modulo l est supercuspidal est obligatoire comme nous allons le voir.

Soient :

- ϱ_{-1} une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale de $GL_g(F_v)$;
- π_{-1} une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ dont la réduction modulo l est isomorphe à ϱ_{-1} ;
- pour tout $u \geq 0$, soit π_u une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale de $GL_{m(\varrho_{-1})l^u g}(F_v)$ dont la réduction modulo l est isomorphe à la représentation irréductible cuspidale ϱ_u de 6.1.6.

On rappelle que pour tout $t \geq 1$ la réduction modulo l de $LJ(\text{St}_t(\pi_{-1}))$ est irréductible. Pour tout $t \geq 1$ et $u \geq 0$, on note

- $\tau_{-1,t,u}$ la réduction modulo l de $LJ(\text{St}_{tm(\varrho_{-1})l^u}(\pi_{-1}))$, qui est donc irréductible ;
- $\tau_{u,t}$ la réduction modulo l de $LJ(\text{St}_t(\pi_u))$.

D'après la proposition 6.3.1, on a l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck

$$\tau_{u,t} = l^u \sum_{i=0}^{m(\varrho_{-1})-1} \tau_{-1,u,t} l^i. \quad (7.3.2)$$

Remarque : dans le cas où, avec les notations de 6.1.1, $\epsilon(\varrho_{-1}) = 1$, (7.3.2) s'écrit $\tau_{u,t} = l^{u+1} \tau_{-1,u,t}$.

7.3.3. Notation. — Pour tout $u \geq 0$, on pose $g_u = gm(\varrho_{-1})l^u$ et pour $d \geq g$, on note $s_u = \lfloor \frac{d}{g_u} \rfloor$.

Remarque : pour compléter les notations précédentes on utilisera parfois g_{-1} pour g et s_{-1} pour $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$.

7.3.4. Proposition. — L'hypothèse 7.2.1 étant vérifiée, soient $u \geq 0$ et $1 < t' \leq s_u$. Les gradués de la filtration de stratification exhaustive de $\mathbb{F} \left({}^p j_{!*}^{\geq t' g_u} \mathcal{F}_{\pi_u[t']_D} \otimes \Pi_{t'} \right)$ sont avec les notations de la proposition 6.4.2, nuls pour $k > 0$ ou $k < s - t' m(\varrho_{-1}) l^u$ et sinon isomorphes à

$$\left(\mathbb{F}^p j_{!*}^{r g} \mathcal{L}_{\pi_{-1}[r]_D, u} \right) \otimes \left(r_l(\Pi_{t'}) \overrightarrow{\otimes} V_{\varrho_{-1}}(r - t', < \underline{\delta}_u) \right) \left(\frac{r - t'}{2} \right)$$

où :

- on a posé $r = s - k$;
- $r_l(\Pi_{t'})$ désigne la réduction modulo l de $\Pi_{t'}$;
- $\mathcal{L}_{\pi_{-1}[r]_D, u}$ est un système local sur $X_{\mathcal{I}}^{-r g}$ dont la semi-simplifiée est égale à $m(\varrho_{-1}) l^u \mathcal{F}_{\pi_{-1}[r]_D}$.

Remarque : le réseau associé à $\mathcal{L}_{\pi_{-1}[r]_D, u}$ dépend du réseau considéré pour $\mathcal{F}_{\pi_u[t']_D}$. Par ailleurs la surjection

$${}^p j_!^{\geq t' g_u} \mathbb{F} \mathcal{F}_{\pi_u[t']_D} \twoheadrightarrow \mathbb{F} {}^p j_{!*}^{\geq t' g_u} \mathcal{F}_{\pi_u[t']_D}$$

implique que la filtration de stratification est triviale.

Démonstration. — Les cas où $t g_u \geq h$ étant triviaux, on raisonne par récurrence en supposant le résultat acquis pour tout $t < t' \leq s_u$ et on traite le cas de t . On part des égalités suivantes dans le groupe de Grothendieck correspondant

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \left(j_!^{\geq t g_u} \mathcal{F}_{\pi_u[t]_D} \right) \otimes r_l(\Pi_t) \times_{P_{t g_u, d}(F_v)} GL_d(F_v) = \\ \sum_{t'=t}^{s_u} \mathbb{F} \left({}^p j_{!*}^{\geq t' g_u} \mathcal{F}_{\pi_u[t']_D} \right) \otimes \left(r_l(\Pi_u) \overrightarrow{\times} r_l(\overleftarrow{[t' - t - 1]_{\pi_u}}) \right) \left(\frac{t' - t}{2} \right) \times_{P_{t' g_u, d}(F_v)} GL_d(F_v), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \left(j_!^{\geq t(u)g} \mathcal{F}_{\pi_{-1}[t(u)]_D} \right) \otimes r_l(\Pi_t) \times_{P_{t(u)g, d}(F_v)} GL_d(F_v) = \\ \sum_{t'=t(u)}^s \mathbb{F} \left({}^p j_{!*}^{\geq t' g} \mathcal{F}_{\pi_{-1}[t']_D} \right) \otimes \left(r_l(\Pi_t) \overrightarrow{\times} r_l(\overleftarrow{[t' - t(u) - 1]_{\pi_{-1}}}) \right) \left(\frac{t' - t(u)}{2} \right), \times_{P_{t' g, d}(F_v)} GL_d(F_v) \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

où pour tout r on pose $r(u) = rm(\varrho_{-1})l^u$. D'après la proposition 1.4.7, on a

$$\mathbb{F} j_!^{\geq t g_u} \mathcal{F}_{\pi_u[t]_D} = j_!^{\geq t g_u} \mathcal{F}_{r_l(\pi_u[t]_D)} = m(\varrho_{-1})l^u \sum_{i=0}^{m(\varrho_{-1})-1} j_!^{\geq t(u)g} \mathcal{F}_{r_l(\pi_{-1} \nu^i [t(u)]_D)}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} \sum_{t'=t+1}^{s_u} \mathbb{F} \left({}^p j_{!*}^{\geq t' g_u} \mathcal{F}_{\pi_u[t']_D} \right) \otimes \left(r_l(\Pi_t) \overrightarrow{\times} r_l(\overleftarrow{[t' - t - 1]_{\pi_u}}) \right) \left(\frac{t' - t}{2} \right) \\ = \sum_{t'=t(u)+1}^s \mathbb{F} \left({}^p j_{!*}^{\geq t' g} \mathcal{F}_{\pi_{-1}[t']_D} \right) \otimes \left(r_l(\Pi_t) \overrightarrow{\times} V_{\varrho_{-1}}(t' - t(u), \geq \underline{\delta}_u) \right) \left(\frac{t' - t(u)}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

En soustrayant (7.3.6) à (7.3.5), on obtient alors le résultat sur les semi-simplifiées. La surjection

$${}^p j_!^{\geq t' g_u} \mathbb{F} \mathcal{F}_{\pi_u[t']_D} \twoheadrightarrow \mathbb{F} {}^p j_{!*}^{\geq t' g_u} \mathcal{F}_{\pi_u[t']_D}$$

nous donne en outre que :

- la suite des dimensions des gradués de la filtration de stratification exhaustive est strictement croissante ;
- comme d'après la remarque suivant l'hypothèse 7.2.1, les réseaux des représentations de Steinberg des gradués de la filtration de stratification exhaustive de $j_!^{\geq t g} HT_{\mathbb{Z}_l}(\pi_v, t)$ sont les $RI_{\mathbb{Z}_l, -}(\pi_v, a)$, le résultat sur les réseaux $V_{\varrho_{-1}}(r - t', < \underline{\delta}_u)$ découle directement de la proposition 6.4.2.

□

Pour un système local $\mathcal{L}[-\dim U]$ sur un ouvert $j : U \hookrightarrow X$, la suite exacte courte

$$0 \rightarrow {}^p h_{\text{tors}}^0 i^* j_* \mathcal{L} \mathbb{F}^p j_* \mathcal{L} \longrightarrow {}^p j_{!*} \mathbb{F} \mathcal{L} \longrightarrow h^{-1} \mathbb{F}^p i_* \mathcal{L} \rightarrow 0$$

du paragraphe 1.3, fournit alors le corollaire immédiat suivant.

7.3.7. Corollaire. — Soient $u \geq 0$ et $t_u < t' \leq s_u$. Les gradués de la filtration de stratification exhaustive de

$${}^p h^{-1} \mathbb{F} \left(\left({}^{p+} j_{!*}^{\geq t' g_u} \mathcal{F}_{\pi_u[t']_D} \otimes \Pi_{t'} \right) / \left({}^{p+} j_{!*}^{\geq t' g_u} \mathcal{F}_{\pi_u[t']_D} \otimes \Pi_{t'} \right) \right)$$

sont nuls pour $k \geq 0$ ou $k < s - t' m(\varrho_{-1}) l^u$ et sinon isomorphes à

$$\mathbb{F} \left({}^p j_{!*}^{r g} \mathcal{L}_{\pi_{-1}[r]_{D,u}} \right) \otimes \left(r_l(\Pi_{t'}) \overrightarrow{\times} V_{\varrho_{-1}}(r - t', < \underline{\delta}_u) \right) \left(\frac{r - t'}{2} \right)$$

où on a posé $r = s - k$ et où $\mathcal{L}_{\pi_{-1}[r]_{D,u}}$ est un système local sur $X_{\mathcal{I}}^{\overline{=r}g}$ dont la semi-simplifiée est égale à $m(\varrho_{-1}) l^u \mathcal{F}_{\pi_{-1}[r]_D}$.

Remarque : ainsi la l -torsion du quotient des $p+$ faisceaux pervers d'Harris-Taylor par leur p version, est complètement décrit par la combinatoire de la réduction modulo l des représentations de $GL_d(F_v)$ et de $D_{v,d}^\times$. L'étude de la torsion d'ordre supérieure découlerait selon le même schéma de démonstration, de l'étude de la réduction modulo l^n des représentations irréductibles de $GL_d(F_v)$ et $D_{v,d}^\times$.

Remarque : toujours sous 7.2.1, la suite spectrale associée à la filtration de la proposition précédente qui calcule la fibre en un point supersingulier des faisceaux de cohomologies des faisceaux pervers d'Harris-Taylor fait intervenir le complexe d'induction et la proposition 6.4.5, nous redonne l'aboutissement connu.

Remarque : on peut aussi calculer l'aboutissement de la suite spectrale associée à la cofiltration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}}$ dont les gradués sont les $p+$ faisceaux pervers d'Harris-Taylor. Alors que les gradués associés à la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}}$ font intervenir les réseaux d'induction $RI_{\bar{\mathbb{Z}}_l, -}(\pi, t)$ ceux de la cofiltration mettent en jeu les $RI_{\bar{\mathbb{Z}}_l, +}(\pi, t)$. Le quotient de ces deux réseaux devrait alors compenser exactement la torsion des faisceaux de cohomologie des $p+$ faisceaux pervers d'Harris-Taylor comme le lecteur courageux pourra le vérifier en petites dimensions.

Références

- [1] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305. Springer-Verlag, Berlin, 1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat.

- [2] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [3] J. Bellaïche. À propos d’un lemme de Ribet. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 109 :45–62, 2003.
- [4] V.G. Berkovich. Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78 :5–161, 1993.
- [5] P. Boyer. Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Invent. Math.*, 138(3) :573–629, 1999.
- [6] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [7] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. *Compositio*, 146(2) :367–403, 2010.
- [8] P. Boyer. Réseaux d’induction des représentations elliptiques de Lubin-Tate. *Journal of Algebra*, 336, issue 1 :28–52, 2011.
- [9] J.-F. Dat. Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo l . <http://people.math.jussieu.fr/~dat/recherche/publis/jlmodl.pdf>, 2010.
- [10] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne l -entière. <http://people.math.jussieu.fr/~dat/recherche/publis/ltmodl.pdf>, 2011.
- [11] P. Deligne. Théorèmes de finitude en cohomologie ℓ adique. In *SGA 4 $\frac{1}{2}$* .
- [12] L. Fargues. Dualité de Poincaré et involution de Zelevinsky dans la cohomologie étale équivariante des espaces analytiques rigides. <http://www.math.u-psud.fr/fargues/Dualite.dvi>, 2006.
- [13] Peter Freyd. Abelian categories. 2003.
- [14] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [15] L. Illusie. Autour du théorème de monodromie locale. In *Périodes p -adiques*, number 223 in *Astérisque*, 1994.
- [16] T. Ito. Hasse invariants for somme unitary Shimura varieties. *Math. Forsch. Oberwolfach report 28/2005*, pages 1565–1568, 2005.
- [17] D. Juteau. Modular Springer correspondence and decomposition matrices. *Thèse de l’Université Paris 7*, 2007.
- [18] M.-F. Vignéras. *Représentations l -modulaires d’un groupe réductif p -adique avec $l \neq p$* , volume 137 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [19] M.-F. Vignéras. À propos d’une conjecture de Langlands modulaire. In *Finite reductive groups (Luminy, 1994)*, volume 141 of *Progr. Math.*, pages 415–452. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [20] M.-F. Vignéras. Induced R -representations of p -adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.
- [21] M.-F. Vignéras. Correspondance de Langlands semi-simple pour $GL(n, F)$ modulo $l \neq p$. *Invent. Math.*, 144(1) :177–223, 2001.