

---

# TORSION DANS LA COHOMOLOGIE D'UN SYSTÈME LOCAL D'HARRIS-TAYLOR

*par*

Boyer Pascal

---

**Résumé.** — La  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -cohomologie de certaines variétés de Shimura unitaires étudiées par Harris et Taylor dans leur livre, se décrit à partir de celle de certains systèmes locaux définis sur une strate dite de Newton de la fibre spéciale de ces variétés. Nous avons précédemment donné une « recette » combinatoire sur les représentations de  $GL_d$  d'un corps local pour calculer chacun des groupes de cohomologie de ces systèmes locaux. Dans ce texte nous explicitons ces calculs pour obtenir des congruences entre représentations automorphes dont une application est la construction de classes de  $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -cohomologie de torsion à coefficients dans ces systèmes locaux.

**Abstract (Torsion in the cohomology of Harris-Taylor local systems)**

The  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -cohomology of some simple unitary Shimura varieties studied in the book of Harris and Taylor, can be described by those of some local systems defined on a Newton's stratum of the special fiber of these varieties. We have already given a combinatorial recipe on the local representations of  $GL_d$  to calculate each of the cohomology groups of these local systems. In this paper we precise some of these calculations to obtain some congruences properties between automorphic representations and apply it to construct some torsion classes in the  $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -cohomology of these local systems.

## Introduction

Dans [8], les auteurs étudient la cohomologie d'une classe de variétés de Shimura unitaires  $X$  de dimension  $d - 1$  sur son corps reflex  $F$ , attachées à un groupe de similitudes  $G/\mathbb{Q}$ . La description de la cohomologie d'une telle variété de Shimura est donnée via la cohomologie de la fibre spéciale  $\bar{X}_v$  de  $X$  en une place  $v$  de  $F$ , à coefficients dans le complexe des cycles évanescents. Dans [8], ce complexe des cycles évanescents est décrit à l'aide de certains systèmes locaux, dits d'Harris-Taylor dans [2], associés à des représentations du groupe

---

**Classification mathématique par sujets (2000).** — 14G22, 14G35, 11G09, 11G35, 11R39, 14L05, 11G45, 11Fxx.

**Mots clefs.** — Variétés de Shimura, modules formels, correspondances de Langlands, correspondances de Jacquet-Langlands, faisceaux pervers, cycles évanescents, représentations automorphes, congruences.

des inversibles  $D_{v,h}^\times$  d'une algèbre à division centrale sur le corps local  $F_v$  et d'invariant  $1/h$  pour  $1 \leq h \leq d$ ; le système local est alors à support dans la strate de Newton de la fibre spéciale  $\bar{X}_v$  de dimension  $d - h$ .

Une façon d'étudier la cohomologie de ces variétés de Shimura est de l'identifier à la cohomologie du complexe des cycles évanescents, puis de filtrer ce complexe; la suite spectrale correspondante fournit alors une filtration aboutissement de la cohomologie de  $X$ . Sur  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ , dans [3], on prouve ainsi la conjecture de monodromie-poids. Sur  $\bar{\mathbb{Z}}_l$ , on construit dans [4] des filtrations « entières » du faisceau pervers des cycles évanescents; on est alors naturellement amené à étudier la cohomologie des systèmes locaux d'Harris-Taylor et en premier lieu leurs torsions, puisque leurs quotients libres sont explicités dans [3].

Le but premier de ce papier est ainsi de construire des classes de cohomologie de torsion à coefficients dans les systèmes locaux d'Harris-Taylor, cf. la proposition 5.5.1. Pour ce faire nous reprenons les calculs de [3] de la cohomologie de ces systèmes locaux, lesquels sont donnés en termes combinatoires sur les représentations du groupe linéaire  $GL_d(F_v)$ .

Pour ce faire nous explicitons et développons l'observation simple suivante : étant données deux représentations  $\tau_v$  et  $\tau'_v$  de  $D_{v,d}^\times$  de même réduction modulo  $l$  alors la réduction modulo  $l$  du  $H^0$  des systèmes locaux d'Harris-Taylor associés sont les mêmes. De la description des parties libres de ces groupes de cohomologie en termes de représentations automorphes, on obtient aux §4.2 et §5, des congruences automorphes.

Le cas le plus intéressant qui nous permet de construire de la torsion est celui où  $\tau_v, \tau'_v$  sont associés par la correspondance de Jacquet-Langlands locale, à des représentations de carré intégrable  $St_t(\pi_v)$  et  $St_{t'}(\pi'_v)$  où  $\pi_v$  et  $\pi'_v$  sont des représentations irréductibles cuspidales de respectivement  $GL_g(F_v)$  et  $GL_{g'}(F_v)$  avec  $g \neq g'$  et  $tg = t'g'$ , de sorte que la réduction modulo  $l$  de  $\tau_v$  restreinte à l'ordre maximal est alors un multiple de celle de  $\tau'_v$ . La cohomologie à support compact des systèmes locaux associés à  $\tau_v$  et  $\tau'_v$  fournit alors des congruences entre représentations automorphes qui du côté galoisien correspond à « augmenter l'irréductibilité », au sens où on modifie un des facteurs

- indécomposable de la représentations galoisienne en un irréductible ou
- d'un facteur semi-simple à un facteur indécomposable.

On utilise alors de telles congruences pour construire des classes de torsion dans la cohomologie de certains systèmes locaux d'Harris-Taylor, le but étant à terme d'en construire dans la cohomologie de la variété de Shimura.

## Table des matières

Introduction.....	1
1. Rappels sur les représentations.....	3
1.1. de $GL_n(K)$ à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$ .....	3
1.2. de $GL_n(K)$ à coefficients dans $\bar{\mathbb{F}}_l$ .....	5
1.3. du groupe des inversibles d'une algèbre à division.....	6
1.4. automorphes cohomologiques de $G(\mathbb{A})$ .....	7
2. Rappels sur les systèmes locaux d'Harris-Taylor.....	7
2.1. Variétés de Shimura unitaires simples.....	7

2.2. Systèmes locaux d'Harris-Taylor.....	8
2.3. Filtrations de stratification entières.....	9
3. Compléments sur la cohomologie.....	11
3.1. Notations dans les groupes de Grothendieck.....	11
3.2. des faisceaux pervers d'Harris-Taylor.....	12
3.3. des systèmes locaux d'Harris-Taylor.....	18
4. Représentations automorphes congruentes.....	20
4.1. Définitions.....	20
4.2. Énoncé du résultat.....	21
4.3. Initialisation de la récurrence.....	22
4.4. Preuve de l'induction.....	25
5. Augmentation de l'irréductibilité.....	28
5.1. locale : changement de cuspidalité.....	28
5.2. La formule fondamentale.....	28
5.3. Le cas tempéré.....	29
5.4. Augmentation de l'irréductibilité globale.....	30
5.5. Torsion dans la cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor..	31
Références.....	32

## 1. Rappels sur les représentations

Dans ce qui suit  $l$  et  $p$  désignent deux nombres premiers distincts. Pour  $q$  une puissance de  $p$ , on note  $e_l(q)$  l'ordre de  $q$  dans  $\mathbb{F}_l^\times$ . Dans la suite  $K$  désigne une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ , d'anneau des entiers  $\mathcal{O}_K$  et de corps résiduel  $\kappa$  de cardinal  $q$ . On dit que  $l$  est *banal* pour  $GL_d(K)$  si  $e_l(q) > d$ . On fixe une racine carrée de  $q$  dans  $\bar{\mathbb{Z}}_l$  et on note

$$\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_l^\times$$

le caractère défini par  $\Xi(\frac{1}{2}) = q^{1/2}$ .

**1.1. de  $GL_n(K)$  à coefficients dans  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ .** — On note  $|\cdot|$  la valeur absolue de  $K$ .

**1.1.1. Définition.** — Deux représentations  $\pi$  et  $\pi'$  de  $GL_n(K)$  sont dites *inertiellement équivalentes* et on note  $\pi \sim^i \pi'$ , s'il existe un caractère  $\xi : \mathbb{Z} \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_l^\times$  tel que

$$\pi \simeq \pi' \otimes \xi \circ \text{val} \circ \det.$$

On note  $e_\pi$  le cardinal de l'ensemble des caractères  $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_l^\times$ , tels que  $\pi \otimes \chi \circ \text{val}(\det) \simeq \pi$  et on pose

$$\pi\{n\} := \pi \otimes q^{-n \text{val} \circ \det}.$$

Pour une suite  $\underline{r} = (0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k = d)$ , on note  $P_{\underline{r}}$  le sous-groupe parabolique de  $GL_d$  standard associé au sous-groupe de Levi

$$GL_{r_1}(K) \times GL_{r_2-r_1}(K) \times \dots \times GL_{r_k-r_{k-1}}(K)$$

et  $N_{\underline{r}}$  son radical unipotent.

**1.1.2. Notation.** — Pour  $\pi_1$  et  $\pi_2$  des  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentations de respectivement  $GL_{n_1}(K)$  et  $GL_{n_2}(K)$ ,  $\pi_1 \times \pi_2$  désigne l'induite parabolique normalisée

$$\pi_1 \times \pi_2 := \text{ind}_{P_{n_1, n_1+n_2}(K)}^{GL_{n_1+n_2}(K)} \pi_1\{n_2/2\} \otimes \pi_2\{-n_1/2\}.$$

Dans le cas où  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont des représentations de  $GL_{t_1g}(K)$  et  $GL_{t_2g}(K)$ , on notera  $\pi_1 \xrightarrow{\times} \pi_2$  l'induite parabolique  $\pi_1\{-t_2/2\} \times \pi_2\{t_1/2\}$ , l'entier  $g$  étant sous-entendu.

*Remarque :* les symboles  $\times$  et  $\xrightarrow{\times}$  sont associatifs, le deuxième étant introduit afin de minimiser l'écriture des torsions.

**1.1.3. Définition.** — Soient  $g$  un diviseur de  $d = sg$  et  $\pi$  une représentation cuspidale irréductible de  $GL_g(K)$ . L'induite

$$\pi\left\{\frac{1-s}{2}\right\} \times \pi\left\{\frac{3-s}{2}\right\} \times \dots \times \pi\left\{\frac{s-1}{2}\right\} = \pi \xrightarrow{\times} \dots \xrightarrow{\times} \pi$$

possède un unique quotient (resp. sous-espace) irréductible noté habituellement  $\text{St}_s(\pi)$  (resp.  $\text{Speh}_s(\pi)$ ); c'est une représentation de Steinberg (resp. de Speh) généralisée.

*Remarque :* dans [5], la représentation  $\text{St}_s(\pi)$  (resp.  $\text{Speh}_s(\pi)$ ) est notée  $[\overleftarrow{s-1}]_{\pi}$  (resp.  $[\overrightarrow{s-1}]_{\pi}$ ). Toute représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de  $GL_d(K)$  est de la forme  $\text{St}_s(\pi)$  pour  $\pi$  irréductible cuspidale de  $GL_g(K)$  avec  $d = sg$ .

**1.1.4** — Rappelons qu'une  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation lisse de longueur finie  $\pi$  de  $GL_d(K)$  est dite *entière* s'il existe une extension finie  $E/\mathbb{Q}_l$  d'anneau des entiers  $\mathcal{O}_E$  et une  $\mathcal{O}_E$ -représentation  $L$  de  $GL_d(K)$  qui est un  $\mathcal{O}_E$ -module libre tel que  $\bar{\mathbb{Q}}_l \otimes_{\mathcal{O}_E} L \simeq \pi$  et tel que  $L$  est un  $\mathcal{O}_E GL_n(K)$ -module de type fini. Soit  $\kappa_E$  le corps résiduel de  $\mathcal{O}_E$ , on dit que  $\kappa_E \otimes_{\mathcal{O}_E} L$  est la réduction modulo  $l$  de  $L$  et que  $\bar{\mathbb{F}}_l \otimes_{\mathcal{O}_E} L$  est la réduction modulo  $l$  de  $L$ . Le *principe de Brauer-Nesbitt* affirme que la semi-simplifiée de  $\bar{\mathbb{F}}_l \otimes_{\mathcal{O}_E} L$  est une  $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation de  $GL_d(K)$  de longueur finie qui ne dépend pas du choix de  $L$ . Son image dans le groupe de Grothendieck sera notée  $r_l(\pi)$  et dite *la réduction modulo  $l$  de  $\pi$* .

*Remarque :* d'après [13] V.9.2 ou [7] §2.2.3, la réduction modulo  $l$  de  $\text{Speh}_s(\pi)$  est irréductible de sorte qu'à isomorphisme près,  $\text{Speh}_s(\pi)$  possède un unique réseau stable, cf. par exemple [1] proposition 3.3.2 et la remarque qui suit. En ce qui concerne  $\text{St}_s(\pi)$ , la situation est en général plus complexe; signalons par exemple que dans [5], nous en avons construit différents réseaux non isomorphes dits d'induction.

**1.1.5. Définition.** — Soit  $\pi$  et  $\pi'$  deux  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentations irréductibles cuspidales de  $GL_g(K)$  dont les réductions modulo  $l$  sont isomorphes. Pour  $s \geq 1$ , nous dirons que deux réseaux  $\Gamma(s, \pi)$  et  $\Gamma(s, \pi')$  de respectivement  $St_s(\pi)$  et  $St_s(\pi')$  sont  $l$ -congruents si leurs réductions modulo  $l$  sont isomorphes.

*Remarque :* d'après [5] §3.2, la réduction modulo  $l$  d'un réseau d'induction ne dépend que de sa construction combinatoire et de la réduction modulo  $l$  de  $\pi$ ; on obtient ainsi des exemples de réseaux  $l$ -congruents de  $St_s(\pi)$  et  $St_s(\pi')$ .

**1.2. de  $GL_n(K)$  à coefficients dans  $\bar{\mathbb{F}}_l$ .** — Pour  $P = MN$  un parabolique de  $GL_d$  de Lévi  $M$  et de radical unipotent  $N$ , l'espace des vecteurs  $N(K)$ -coinvariants d'une représentation admissible  $\pi$  de  $GL_d(K)$ , est stable sous l'action de  $M(K) \simeq P(K)/N(K)$ . On notera  $J_P(\pi)$  cette représentation tordue par  $\delta_P^{-1/2}$  : c'est un foncteur exact dit *foncteur de Jacquet*. Rappelons qu'une représentation  $\varrho$  de  $GL_d(K)$  est dite *cuspidale* si pour tout parabolique propre  $P$ ,  $J_P(\pi)$  est nul. Elle est dite *supercuspidale* si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre.

**1.2.1. Notation.** — Pour  $\varrho$  une  $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation cuspidale irréductible, on note  $\epsilon(\varrho)$  le cardinal de la droite de Zelevinsky de  $\varrho$ , i.e. de l'ensemble  $\{\varrho\{i\} / i \in \mathbb{Z}\}$ . On pose comme dans [13] p.51,

$$m(\varrho) = \begin{cases} \epsilon(\varrho) & \text{si } \epsilon(\varrho) > 1 \\ l & \text{sinon} \end{cases}$$

*Remarque :*  $\epsilon(\varrho)$  un diviseur de  $e_l(q)$ .

**1.2.2. Proposition.** — ([13] III.5.14) Soit  $\varrho$  une  $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(K)$ . L'induite parabolique

$$\varrho \overrightarrow{\times} \cdots \overrightarrow{\times} \varrho = \varrho\left\{\frac{1-s}{2}\right\} \times \cdots \times \varrho\left\{\frac{s-1}{2}\right\}$$

admet un unique sous-quotient non dégénéré que l'on note  $St_s(\varrho)$ . La représentation  $St_s(\varrho)$  est cuspidale si et seulement si

$$s = 1, m(\varrho), m(\varrho)l, \dots, m(\varrho)l^u, \dots$$

La réunion de ces dernières avec les supercuspidales forment l'ensemble des représentations cuspidales.

*Remarque :* en général, pour  $\pi$  une  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation cuspidale telle que  $r_l(\pi) = \varrho$ , la réduction modulo  $l$  de  $St_s(\pi)$  contient strictement  $St_s(\varrho)$ , cf. [5] §3; en revanche elle la contient exactement une fois.

**1.2.3. Notation.** — Pour  $\varrho$  une représentation irréductible supercuspidale, on notera pour tout  $u \geq 0$ ,  $\varrho_u$  la représentation cuspidale  $St_{m(\varrho)l^u}(\varrho)$  de la proposition précédente et on pose  $\varrho_{-1} := \varrho$ .

**1.2.4. Proposition.** — (cf. [12] III.5.10)

Soit  $\varrho$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(K)$  ; il existe alors un relèvement  $\pi$  irréductible cuspidal de  $\varrho$ , i.e. tel que  $r_l(\pi) = \varrho$ .

Donnons quelques précisions sur l'ensemble des relèvements d'une cuspidale donnée. Rappelons, cf. [6] §5.5, que toute  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale est, bijectivement, « attachée » à une orbite régulière de  $\Delta \backslash X_1(E)$  où :

- $E$  est une extension modérément ramifiée de  $K$  de degré  $\leq d$  ;
- $X_1(E)$  est l'ensemble des caractères modérément ramifiés de  $E^\times$  ;
- $\Delta$  est le groupe de Galois de  $E/K$ .

Si  $\chi_E$  est un représentant d'une telle orbite associé à un relèvement cuspidal  $\pi$  de  $\varrho$  alors les autres relèvements cuspidaux, à torsion par un caractère non ramifié près, seront associés à  $\chi_E \otimes \zeta_l$  où  $\zeta_l$  est un caractère de  $E^\times$  d'ordre une puissance de  $l$ .

*Remarque :* en particulier si  $l$  est banal pour  $GL_d(K)$ , toute  $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible cuspidale admet un unique relèvement sur  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ .

**1.3. du groupe des inversibles d'une algèbre à division.** —

**1.3.1. Définition.** — Soit  $D_{K,d}$  l'algèbre à division centrale sur  $K$  d'invariant  $1/d$  et d'ordre maximal  $\mathcal{D}_{K,d}$ . On identifiera

$$D_{K,h}^\times / \mathcal{D}_{K,h}^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$$

au moyen de l'opposé de la valuation de la norme réduite  $\text{rn}$ .

On rappelle que la correspondance de Jacquet-Langlands locale est une bijection JL entre les représentations irréductibles admissibles de  $D_{K,h}^\times$  et les représentations irréductibles admissibles essentiellement de carré intégrable de  $GL_h(K)$ .

**1.3.2. Définition.** — Pour  $\pi$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(K)$  et  $t \geq 1$ ,  $\pi[t]_D$  désignera la représentation  $\text{JL}^{-1}(\text{St}_t(\pi))^\vee$  de  $D_{K,tg}^\times$ .

Soit  $\tau = \pi[s]_D$  une  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible  $l$ -entière de  $D_{K,d}^\times$  ; avec les notations de 1.2.3, la réduction modulo  $l$  de  $\tau$  est de la forme  $\text{St}_{m(\tau)}(\varrho)$  pour  $\varrho$  une  $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale de  $GL_e(K)$ . On note alors  $\iota$  l'image de  $\text{Speh}_s(\varrho^\vee)$  par la correspondance de Jacquet-Langlands modulaire définie par J.-F. Dat au §1.2.4 de [7]. Autrement dit si  $\pi_\varrho$  est un relèvement cuspidal de  $\varrho$ , i.e. une  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation entière irréductible cuspidale de  $GL_e(K)$  dont la réduction modulo  $l$  est égale à  $\varrho$ , alors  $\iota = r_l(\pi_\varrho[s]_D)$ .

**1.3.3. Proposition.** — La réduction modulo  $l$  de  $\tau$  est avec les notations précédentes de la forme

$$\iota\left\{-\frac{m(\tau)-1}{2}\right\} \oplus \iota\left\{-\frac{m(\tau)-3}{2}\right\} \oplus \dots \oplus \iota\left\{\frac{m(\tau)-1}{2}\right\}$$

où  $\iota\{n\}$  désigne  $\iota \otimes q^{-n \text{ val} \circ \text{Nrd}}$ .

**1.4. automorphes cohomologiques de  $G(\mathbb{A})$ .** — Soit  $F = F^+E$  un corps CM,  $E/\mathbb{Q}$  une extension quadratique imaginaire pure, dont on fixe un plongement réel  $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$ . On peut alors définir un groupe unitaire  $G$ , noté  $G_\tau$  dans [8], tel que

- $G(\mathbb{R}) \simeq U(1, d-1) \times U(0, d)^{r-1}$  ;
- $G(\mathbb{Q}_p) \simeq (\mathbb{Q}_p^\times) \times \prod_{i=1}^r (B_{v_i}^{op})^\times$  où  $v = v_1, v_2, \dots, v_r$  sont les places de  $F$  au dessus de la place  $u$  de  $E$  telle que  $p = u^c u$  et où  $B$  est une algèbre à division centrale sur  $F$  de dimension  $d^2$  vérifiant certaines propriétés, cf. [8], dont en particulier d'être soit décomposée soit une algèbre à division en toute place et décomposée à la place  $v$ .

Pour de coupables raisons de commodité, on fixe un isomorphisme  $\iota_l : \bar{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathbb{C}$ .

**1.4.1. Définition.** — Soit  $\xi$  une  $\mathbb{C}$ -représentation irréductible algébrique de dimension finie de  $G$ . Une  $\mathbb{C}$ -représentation irréductible  $\Pi_\infty$  de  $G(\mathbb{A}_\infty)$  est dite  $\xi$ -cohomologique s'il existe un entier  $i$  tel que

$$H^i((\text{Lie}G(\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, U_\tau, \Pi_\infty \otimes \xi^\vee) \neq (0)$$

où  $U_\tau$  est un sous-groupe compact modulo le centre de  $G(\mathbb{R})$ , maximal, cf. [8] p.92. On notera  $d_\xi^i(\Pi_\infty)$  la dimension de ce groupe de cohomologie.

**1.4.2. Définition.** — Soit  $\xi$  une  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible algébrique de dimension finie de  $G$ . Une  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible  $\Pi^\infty$  de  $G(\mathbb{A}^\infty)$  sera dit automorphe  $\xi$ -cohomologique s'il existe une  $\mathbb{C}$ -représentation cohomologique  $\Pi_\infty$  de  $G(\mathbb{A}_\infty)$  telle que  $\iota_l(\Pi^\infty) \otimes \Pi_\infty$  est une  $\mathbb{C}$ -représentation automorphe de  $G(\mathbb{A})$ .

*Remarque :* d'après les calculs de [3], pour  $\Pi$  une  $\mathbb{C}$ -représentation irréductible automorphe cohomologique,  $\iota^{-1}(\Pi^\infty)$  admet un réseau stable donné par la cohomologie entière de la cohomologie de la variété de Shimura associée ; on peut donc parler de sa réduction modulo  $l$  au sens précédent.

## 2. Rappels sur les systèmes locaux d'Harris-Taylor

**2.1. Variétés de Shimura unitaires simples.** — Pour tout sous-groupe compact assez petit  $U^p$  au sens du bas de la page 90 de [8], de  $G(\mathbb{A}^{\infty, p})$  et  $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ , on pose

$$U^p(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=1}^r \text{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/v_i^{m_i})^\times) \quad (2.1.1)$$

et on note  $\mathcal{I}$  l'ensemble des sous-groupes compacts assez petits de la forme  $U^p(m)$ . À la donnée de  $G$  et  $\mathcal{I}$ , on associe un **schéma de Hecke**  $X_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$  sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_v$  au sens de [2] et on note  $\bar{X}_{\mathcal{I}}$  sa fibre spéciale géométrique sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$ .

Avec les notations de [2], pour tout  $1 \leq h \leq d$ , on dispose de sous- $\bar{\mathbb{F}}_p$ -schémas de Hecke pour  $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^\infty)$ , fermés (resp. localement fermés) notés  $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h}$  (resp.  $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{=h}$ ) de pure dimension  $d - h$  et on note

$$i_{\mathcal{I}}^h : \bar{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h} \hookrightarrow \bar{X}_{\mathcal{I}} = \bar{X}_{\mathcal{I}}^{\geq 1}, \quad j_{\mathcal{I}}^{\geq h} : \bar{X}_{\mathcal{I}}^{=h} \hookrightarrow \bar{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h}.$$

Pour tout  $1 \leq h < d$ , les strates  $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{=h}$  sont géométriquement induites sous l'action du parabolique  $P_{h,d}(F_v)$  au sens où il existe un sous-schéma fermé  $\bar{X}_{\mathcal{I},1}^{=h}$  de Hecke pour  $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d}(F_v)$  tel que :

$$\bar{X}_{\mathcal{I}}^{=h} \simeq \bar{X}_{\mathcal{I},1}^{=h} \times^{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v)$$

On note  $\bar{X}_{\mathcal{I},1}^{\geq h}$  l'adhérence de  $\bar{X}_{\mathcal{I},1}^{=h}$  dans  $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h}$ . On rappelle que  $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d}(F_v)$  agit à travers son quotient  $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v)$  donné par l'application  $\begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix} \mapsto (v(\det g_v^c), g_v^{et})$ . Par ailleurs l'action d'un élément  $w_v \in W_v$  est donnée par l'action de  $-\deg(w_v)$ .

*Remarque :* les points géométriques du  $\bar{\mathbb{F}}_p$ -schéma de Hecke  $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{=d}$  de dimension nulle sont dits supersinguliers.

**2.1.2. Définition.** — Soit  $H_0/\mathbb{Q}$  le groupe algébrique forme intérieure de  $G$  telle que  $H_0(\mathbb{R})$  est compact et  $H_0(\mathbb{A}^\infty) \simeq G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times D_{v,d}^\times \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times$ .

**2.2. Systèmes locaux d'Harris-Taylor.** — Afin de décrire les restrictions aux strates de Newton  $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{=h}$  du complexe des cycles évanescents sur  $\bar{X}_{\mathcal{I}}$ , les auteurs de [8] ont construit des systèmes locaux sur ces strates dont nous rappelons les notations suivant [2]. À toute représentation irréductible admissible  $\tau_v$  de  $D_{v,h}^\times$ , Harris et Taylor associent un système local de Hecke  $\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}, 1}$  sur  $\bar{X}_{\mathcal{I},1}^{=h}$  pour le groupe

$$G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times (\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times D_{v,h}^\times / \mathcal{D}_{v,h}^\times$$

dont l'action, cf. [8] p.136, se factorise par  $G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty) / \mathcal{D}_{F_v, h}^\times$  avec

$$(g^{\infty,p}, g_{p,0}, c, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta) \mapsto (g^{p,\infty}, g_{p,0} q^{v(\det \delta) - c}, \delta, g_v^{et}, g_{v_i}). \quad (2.2.1)$$

On note  $\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}}$  le faisceau sur  $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{=h}$  induit associé :

$$\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}} := \mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}, 1} \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v).$$

Pour  $\pi_v$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  et  $t$  un entier strictement positif tel que  $tg \leq d$ , on introduit suivant [2] la notation  $\mathcal{F}(\pi_v, t)_1$  (resp.  $\mathcal{F}(\pi_v, t)$ ) pour désigner le faisceau de Hecke sur  $\bar{X}_{\mathcal{I},1}^{=tg}$  (resp.  $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{=tg}$ ) précédemment noté  $\mathcal{F}_{\pi_v[t]_D, \mathcal{I}, 1}$  (resp.  $\mathcal{F}_{\pi_v[t]_D, \mathcal{I}}$ ). On utilisera ponctuellement la notation  $HT(\pi_v, \Pi_t)$  pour désigner le  $W_v$ -faisceau pervers de Hecke sur  $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{tg}$  pour  $G(\mathbb{A}^\infty)$  défini par

$$H(\pi_v, \Pi_t) := \mathcal{F}(\pi_v, t)[d - tg] \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}} \otimes \Pi_t,$$

où  $\Pi_t$  une représentation de  $GL_{tg}(F_v)$  et où on renvoie à [2] pour une description explicite des opérateurs de Hecke.

*Remarque* : étant donnée une tour de points géométriques  $z$  de  $\bar{X}_T^{=tg}$ , la fibre  $z^* \mathcal{F}_{\pi_v[t]_D}$  est munie d'une action du noyau  $(D_{v,tg}^\times)^0$  de la valuation de la norme réduite de sorte qu'en tant que  $D_{v,tg}^\times \times \mathbb{Z}$ -module, on a

$$\mathrm{ind}_{(D_{v,tg}^\times)^0}^{D_{v,tg}^\times} z^* \mathcal{F}_{\pi_v[t]_D} \simeq \bigoplus_{\pi'_v \sim^i \pi_v} \pi'_v[t]_D \otimes \left( (\chi'_v)^{-1} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{U}(\pi_v)} \chi^{-1} \circ \mathrm{val} \circ \det \right) \quad (2.2.2)$$

où  $\chi'_v$  désigne le caractère central de  $\pi'_v$ .

**2.2.3. Notation.** — On écrira  $HT_{\bar{\mathbb{Z}}_l}$  pour désigner un  $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -réseau du système local d'Harris-Taylor associé, que l'on ne souhaite pas préciser.

**2.3. Filtrations de stratification entières.** — Rappelons, cf. [9] §1.3.1, qu'une théorie de torsion sur une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  est un couple  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  de sous-catégories pleines tel que :

- pour tout objet  $T$  dans  $\mathcal{T}$  et  $F$  dans  $\mathcal{F}$ , on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T, F) = 0;$$

- pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ , il existe des objets  $A_{\mathcal{T}}$  et  $A_{\mathcal{F}}$  de respectivement  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{F}$ , ainsi qu'une suite exacte courte

$$0 \rightarrow A_{\mathcal{T}} \rightarrow A \rightarrow A_{\mathcal{F}} \rightarrow 0.$$

Pour  $\mathbb{O}$  un anneau local et  $\varpi$  une uniformisante, dans une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  qui est  $\mathbb{O}$ -linéaire, un objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  est dit *de torsion* (resp. *libre*, resp. *divisible*) si  $\varpi^N 1_A$  est nul pour un certain entier  $N$  (resp.  $\varpi \cdot 1_A$  est un monomorphisme, resp. un épimorphisme). On note alors  $\mathcal{T}$  (resp.  $\mathcal{F}$ , resp.  $\mathcal{Q}$ ) la sous-catégorie pleine des objets de torsion (resp. libres, resp. divisibles) de  $\mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{A}$  est noethérienne (resp. artinienne) alors  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  (resp.  $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$ ) est une théorie de torsion sur  $\mathcal{A}$ .

Pour  $X$  un  $\mathbb{F}_q$ -schéma de type fini, la catégorie dérivée  $D_c^b(X, \mathbb{O})$  est munie de sa  $t$ -structure perverse  $p$  définie par :

$$\begin{aligned} A \in {}^p D^{\leq 0}(X, \mathbb{O}) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^k i_x^* A = 0, \forall k > -\dim \overline{\{x\}} \\ A \in {}^p D^{\geq 0}(X, \mathbb{O}) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^k i_x^! A = 0, \forall k < -\dim \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

où  $i_x : \mathrm{Spec} \kappa(x) \hookrightarrow X$ . On note  ${}^p \mathrm{FP}(X, \mathbb{O})$  le cœur de cette  $t$ -structure et  ${}^p h$  les foncteurs cohomologiques : c'est une catégorie abélienne noethérienne et  $\mathbb{O}$ -linéaire munie de la théorie de torsion  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  avec les notations précédentes. On munit alors  $D_c^b(X, \mathbb{O})$  d'une

nouvelle  $t$ -structure notée  $p+$  et définie par, cf. [4] corollaire 1.1.4 et §1.4.2 :

$$A \in {}^{p+}D^{\leq 0}(X, \mathbb{O}) \Leftrightarrow \forall x \in X, \begin{cases} h^i i_x^* A = 0, & \forall i > -\dim \overline{\{x\}} + 1 \\ h^{-\dim \overline{\{x\}} + 1} i_x^* A \text{ de torsion} \end{cases}$$

$$A \in {}^{p+}D^{\geq 0}(X, \mathbb{O}) \Leftrightarrow \forall x \in X, \begin{cases} h^i i_x^! A = 0, & \forall i < -\dim \overline{\{x\}} \\ h^{-\dim \overline{\{x\}}} i_x^! A \text{ libre} \end{cases}$$

dont on notera  ${}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$  le cœur et  ${}^{p+}h^i$  les foncteurs cohomologiques. C'est une catégorie abélienne artiniennne et  $\mathbb{O}$ -linéaire. Ces constructions passent à la limite sur l'anneau  $\bar{\mathbb{Z}}_l$ . Ainsi pour une immersion ouverte  $j : U \hookrightarrow X$ , on dispose alors de deux notions de prolongements intermédiaires  ${}^p j_{!*}$  et  ${}^{p+} j_{!*}$ .

**2.3.1. Lemme.** — (cf. [4] proposition 1.4.4) Si  $j : U \hookrightarrow X$  est affine alors pour tout faisceau pervers  $P$  sans torsion, on a

$$j_* P = {}^p j_* P = {}^{p+} j_* P \quad j_! P = {}^p j_! P = {}^{p+} j_! P.$$

Dans [4], en utilisant la stratification de Newton, nous donnons l'analogie entier de 4.3.1 et 5.4.1 de [2] qui s'exprime comme suit.

**2.3.2. Proposition.** — ([4] §2)

Pour tout  $1 \leq t \leq s$ ,  $j_1^{\geq tg} HT_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_v, \Pi_t)$  possède une filtration dont les gradués  $gr_{!, \bar{\mathbb{Z}}_l}^k$  sont non nuls si et seulement si  $t - s \leq k \leq 0$ , avec

$${}^p j_{!*}^{\geq (t-k)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_{-k}(\pi_v)) \otimes \Xi^{k/2} \hookrightarrow$$

$$gr_{!, \bar{\mathbb{Z}}_l}^k \hookrightarrow {}^{p+} j_{!*}^{\geq (t-k)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_{-k}(\pi_v)) \otimes \Xi^{k/2}$$

On note  $\mathbb{F}(-)$  le foncteur de réduction modulaire  $\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} (-)$ ; ce dernier ne commute pas aux foncteurs de troncations. Ainsi d'après [9] 2.51, on a les triangles distingués suivants

$$\mathbb{F} {}^p j_1^{\geq tg} \rightarrow {}^p j_1^{\geq tg} \mathbb{F} \rightarrow h^{-1} \mathbb{F} {}^p i_*^{tg} {}^p h_{tors}^{-1} i_*^* j_*^{\geq tg} [2] \rightsquigarrow$$

$${}^p j_1^{\geq tg} \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} {}^{p+} j_1^{\geq tg} \rightarrow h^0 \mathbb{F} {}^p i_*^{tg} {}^p h_{tors}^{-1} i_*^* j_*^{\geq tg} [1] \rightsquigarrow$$

de sorte que  $j^{\geq tg}$  étant affine,  ${}^p h_{tors}^{-1} i_*^* j_*^{\geq tg}$  est nul et donc

$$\mathbb{F} {}^p j_1^{\geq tg} \simeq {}^p j_1^{\geq tg} \mathbb{F} \simeq \mathbb{F} {}^{p+} j_1^{\geq tg}. \quad (2.3.3)$$

Ainsi pour  $\Gamma(t, \pi_v)$  et  $\Gamma(t, \pi'_v)$  des réseaux  $l$ -congruents de respectivement  $\text{St}_s(\pi_v)$  et  $\text{St}_s(\pi'_v)$  au sens de la définition 1.1.5, les faisceaux pervers

$$\mathbb{F} {}^p j_1^{\geq tg} HT_{\Gamma(t, \pi_v)}(\pi_v, \Pi_t) \text{ et } \mathbb{F} {}^p j_1^{\geq tg} HT_{\Gamma(t, \pi'_v)}(\pi'_v, \Pi_t) \quad (2.3.4)$$

sont isomorphes; nous utiliserons ce fait au §5.

En ce qui concerne les extensions intermédiaires, d'après loc. cit. on a

$$\mathbb{F} {}^p j_{!*}^{\geq tg} \rightarrow {}^p j_{!*}^{\geq tg} \mathbb{F} \rightarrow h^{-1} \mathbb{F} {}^p i_*^{tg} {}^p h_{tors}^0 i_*^{tg,*} j_*^{\geq tg} [1] \rightsquigarrow \quad (2.3.5)$$

$${}^p j_{!*}^{\geq tg} \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}^{p+} j_{!*}^{\geq tg} \rightarrow h^0 \mathbb{F} {}^p i_* {}^p h_{tors}^0 i^{tg,*} j_*^{\geq tg} \rightsquigarrow \quad (2.3.6)$$

et il n'est donc pas clair qu'un énoncé analogue à (2.3.4) soit valable pour les extensions intermédiaires.

**2.3.7. Proposition.** — Soient  $\Gamma(t, \pi_v)$  et  $\Gamma(t, \pi'_v)$  des réseaux  $l$ -congruents de respectivement  $\text{St}_s(\pi_v)$  et  $\text{St}_s(\pi'_v)$  au sens de la définition 1.1.5. Les faisceaux pervers

$$\mathbb{F} {}^p j_{!*}^{\geq tg} HT_{\Gamma(t, \pi_v)}(\pi_v, \Pi_t) \quad \text{et} \quad \mathbb{F} {}^p j_{!*}^{\geq tg} HT_{\Gamma(t, \pi'_v)}(\pi'_v, \Pi_t) \quad (2.3.8)$$

sont alors isomorphes.

*Démonstration.* — D'après (2.3.5), il suffit de vérifier que

$${}^p h^0 i^{tg,*} j_*^{\geq tg} HT_{\Gamma(t, \pi_v)}(\pi_v, \Pi_t)[l] \simeq {}^p h^0 i^{tg,*} j_*^{\geq tg} HT_{\Gamma(t, \pi'_v)}(\pi'_v, \Pi_t)[l]$$

où  $[l]$  désigne ici la  $l$ -torsion. Considérons les suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{F} {}^p h^{-1} i^{tg,*} j_*^{\geq tg} HT_{\Gamma(t, \pi_v)} & \longrightarrow & {}^p h^{-1} \mathbb{F} i^{tg,*} j_*^{\geq tg} HT_{\Gamma(t, \pi_v)} & \longrightarrow & {}^p h^0 i^{tg,*} j_*^{\geq tg} HT_{\Gamma(t, \pi_v)}[l] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{F} {}^p h^{-1} i^{tg,*} j_*^{\geq tg} HT_{\Gamma(t, \pi'_v)} & \longrightarrow & {}^p h^{-1} \mathbb{F} i^{tg,*} j_*^{\geq tg} HT_{\Gamma(t, \pi'_v)} & \longrightarrow & {}^p h^0 i^{tg,*} j_*^{\geq tg} HT_{\Gamma(t, \pi'_v)}[l] \longrightarrow 0 \end{array}$$

où :

- le morphisme  $j^{\geq tg}$  étant affine, d'après le lemme 2.3.1 et (2.3.3), les faisceaux pervers  ${}^p h^{-1} i^{tg,*} j_*^{\geq tg} HT_{\Gamma(t, \pi_v)}$  et  ${}^p h^{-1} i^{tg,*} j_*^{\geq tg} HT_{\Gamma(t, \pi'_v)}$  sont libres. Ainsi le premier isomorphisme découle des résultats de [2].
- Le deuxième isomorphisme découle des propriétés générales de commutations des foncteurs dérivés  $\mathbb{F}$ ,  $i^*$  et  $j_*$  lorsque  $j$  est affine.

On en déduit donc que les deux membres les plus à droites sont isomorphes d'où le résultat.  $\square$

### 3. Compléments sur la cohomologie

**3.1. Notations dans les groupes de Grothendieck.** — Dans la suite on fixe une représentation complexe irréductible  $\xi$  de dimension finie de  $G$  ce qui d'après [8] p.96, fournit un système local  $\mathcal{L}_\xi$ .

**3.1.1. Définition.** — Étant donné un faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $\bar{X}_{\mathcal{I}}$ , on notera  $\mathcal{F}_\xi$  le faisceau  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\xi$  qui d'après [8] p.98 est pur de poids  $w(\xi)$ .

*Remarque :* d'après [8] p.98 et p.150,  $\mathcal{L}_\xi$  est un  $W_v$ -faisceau pervers de Hecke pour  $G(\mathbb{A}^\infty)$  où  $g^\infty$  agit par  $\xi(g_l)$  et  $\sigma \in W_v$  par  $\Xi^{-w(\xi)/2}$ .

Pour un  $W_v$ -faisceau pervers de Hecke  $P$  sur  $\bar{X}_{\mathcal{I}}$ ,

$$[H^*(P_\xi)]$$

désignera l'image de  $\sum_i (-1)^i H^i(\bar{X}_{\mathcal{I}}, P \otimes \mathcal{L}_{\xi})$  dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de  $G(\mathbb{A}^{\infty}) \times W_v$ . Pour Groth le groupe de Grothendieck d'un groupe de la forme  $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times \tilde{G}$ , on notera  $\text{Groth}\{\Pi^{\infty, v}\}$  le sous-groupe facteur direct de Groth engendré par les irréductibles de la forme  $\Pi^{\infty, v} \otimes \sigma$  où  $\sigma$  est une représentation irréductible quelconque de  $\tilde{G}$ . On notera alors

$$[H^*(P_{\xi})]\{\Pi^{\infty, v}\}$$

la projection de  $[H^*(P_{\xi})]$  sur ce facteur direct.

*Remarque :* on rappelle que  $G(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^{\times} \times GL_d(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^{\times}$ . Pour  $\Pi$  une représentation de  $G(\mathbb{A})$ , sa composante pour le facteur de similitude  $\mathbb{Q}_p^{\times}$ , sera notée comme dans [8],  $\Pi_{p,0}$ . Comme tous les compacts de  $\mathcal{I}$  contiennent le facteur  $\mathbb{Z}_p^{\times}$ , les représentations  $\Pi$  qui vont intervenir par la suite, dans les différents groupes de cohomologie, devront toutes vérifier que  $(\Pi_{p,0})|_{\mathbb{Z}_p^{\times}} = 1$ .

### 3.2. des faisceaux pervers d'Harris-Taylor. — Soient

- $\Pi$  une représentation automorphe irréductible de  $G(\mathbb{A})$  cohomologique pour  $\xi$ , de multiplicité  $m(\Pi)$  dans l'espace des formes automorphes et
- $\pi_v$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$ .

Nous allons rappeler d'après [3], quels sont les couples  $(r, i)$  tels que

$$[H^i(Pj_{!*}^{\geq rg} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi_v, r))]\{\Pi^{\infty, v}\} \neq (0).$$

*Remarque :* on pourrait calculer explicitement l'image correspondante dans le groupe de Grothendieck des  $GL_{d-tg}(F_v) \times \mathbb{Z}$ -représentations mais nous nous contenterons d'une description très sommaire.

D'après [3] §3.6, cette description ne dépend que de  $m(\Pi)$  et de la composante locale  $\Pi_v$  de  $\Pi$  en  $v$ , rappelons alors la forme d'une telle composante locale.

**3.2.1. Lemme.** — *La composante locale  $\Pi_v$  d'une représentation automorphe irréductible de  $G(\mathbb{A})$  qui est cohomologique est de la forme  $\text{Speh}_s(\pi)$  pour  $\pi$  une représentation essentiellement de carré intégrable.*

*Démonstration.* — D'après [10], une représentation automorphe de  $GL_d(\mathbb{A})$  est de la forme

$$\text{Speh}_{s_1}(\text{St}_{t_1}(\pi_1) \times \cdots \times \text{Speh}_{s_u}(\text{St}_{t_u}(\pi_u)))$$

où :

- les  $\pi_i$  sont des représentations irréductibles cuspidales de  $GL_{g_i}(\mathbb{A})$ ;
- $\sum_{i=1}^u s_i g_i t_i = d$ ;
- $s_1 \equiv \cdots \equiv s_u \pmod{2}$ .

La composante locale d'une telle représentation automorphe en une place  $v$  est alors

$$\text{Speh}_{s_1}(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,v}) \times \cdots \times \text{Speh}_{s_u}(\text{St}_{t_u}(\pi_{u,v})))$$

Or d'après [8] théorème VI.2.1, une représentation automorphe de  $G(\mathbb{A})$  est obtenue par changement de base à partir d'une représentation automorphe d'une algèbre à division notée  $B$  dans loc. cit. Le résultat, i.e. le fait que  $s_1 = \dots = s_u$ , découle alors de [8] théorème VI.1.1 qui n'est autre qu'une version particulière du théorème de Jacquet-Langlands global.  $\square$

*Remarque :* comme dans [3], la combinatoire des foncteurs de Jacquet sur ces représentations s'illustre comme sur la figure 1.

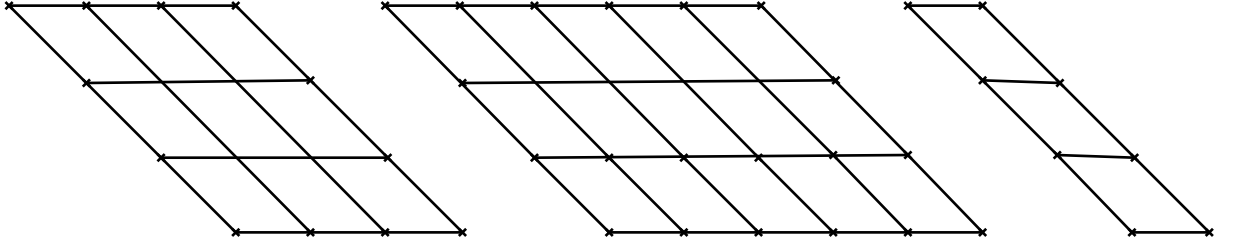


FIGURE 1. Représentation graphique de  $\text{Speh}_4(\text{St}_4) \times \text{Speh}_4(\text{St}_5) \times \text{Speh}_4(\text{St}_2)$ .

**3.2.2. Notation.** — Pour  $\pi_v$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$ , on note  $\mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)$  l'ensemble des représentations irréductibles automorphes de  $G(\mathbb{A})$   $\xi$ -cohomologique telles que :

- $(\Pi_{p,0})|_{\mathbb{Z}_p^\times} = 1$ ,
- sa composante locale en  $v$  soit de la forme

$$\text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi'_v)) \times ?$$

avec  $r = s + t - 1$ ,  $\pi'_v \sim^i \pi_v$  et ? une représentation quelconque de  $GL_{d-stg}(F_v)$ .

*Remarque :* ainsi une représentation irréductibles automorphes de  $G(\mathbb{A})$   $\xi$ -cohomologique dont la composante locale est de la forme

$$\text{Speh}_s\left(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,v}) \times \dots \times \text{St}_{t_u}(\pi_{u,v})\right) = \text{Speh}_s(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,v})) \times \dots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_u}(\pi_{u,v}))$$

appartient à  $\mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,i}}(s + t_i - 1, s)$  pour  $i = 1, \dots, u$ . En particulier ces ensembles  $\mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)$  ne sont pas disjoints.

En ce qui concerne le calcul des composantes isotypiques de la cohomologie, d'après le lemme 1.5.5 de [3], il suffit de savoir traiter le cas de  $\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi_v))$ , commençons donc par ce cas.

**3.2.3. Proposition.** — (cf. [3] proposition 3.6.1)

Soit  $\Pi$  une représentation automorphe irréductible de  $G(\mathbb{A})$   $\xi$ -cohomologique, de multiplicité  $m(\Pi)$  dans l'espace des formes automorphes, telle que sa composante  $\Pi_v$  en la

place  $v$  est isomorphe à  $\mathrm{Speh}_s(\mathrm{St}_t(\pi_v))$  pour  $\pi_v$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$ . Alors pour tout  $(r, i)$ ,  $[H^i(pj_{!*}^{\geq rg'} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi_v, r))]\{\Pi^{\infty, v}\}$  est nulle si  $g' \neq g$  et  $\pi'_v$  n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de  $\pi_v$  et sinon égale à

$$m_{s,t}(r, i) e_{\pi_v} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) R_{\pi_v}(s, t)(r, i) \otimes \left( \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1}) \otimes \Xi^{i/2} \right)$$

où :

- $mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) = \# \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G) \frac{1}{d} \sum_{\Pi' \in \mathcal{U}_G(\Pi^{\infty, v})} d_\xi^i(\Pi'_\infty)$  où  $\mathcal{U}_G$  désigne l'ensemble des représentations irréductibles automorphes  $\Pi'$  de  $G(\mathbb{A})$  telles que  $(\Pi')^{\infty, v} \simeq \Pi^{\infty, v}$  ;
- $R_{\pi_v}(s, t)(r, i)$  est une représentation de  $GL_{d-rg}(F_v)$  qui s'obtient combinatoirement à partir de  $\Pi_v$  de sorte qu'en particulier sa réduction modulo  $l$  ne dépend que  $(s, t)$  et de la réduction modulo  $l$  de  $\pi_v$  ;
- $m_{s,t}(r, i) \in \{0, 1\}$  selon que le couple  $(r, i)$  est associé aux coordonnées d'un point marqué dans les figures 2 et 3.

*Remarque* : les points de coordonnées  $(r, i)$  tels que  $m_{s,t}(r, i) = 1$  sont contenus dans l'enveloppe convexe du polygone de sommets  $(s + t - 1, 0)$ ,  $(t, \pm(s - 1))$  et  $(1, \pm(s - t))$  si  $s \geq t$  (resp.  $(t - s + 1, 0)$  si  $t \geq s$ ) ; à l'intérieur de celui-ci pour  $r$  fixé, les  $i$  concernés partent du bord en vont de 2 en 2. Autrement dit  $m_{s,t}(r, i) = 1$  si et seulement si :

- $\max\{1, r - 2(s - 1)\} \leq r' \leq r$  ;
- si  $r - s + 1 \leq r' \leq r$  alors  $0 \leq i \leq r - r'$  et  $i \equiv r - r' \pmod{2}$  ;
- si  $\max\{1, r - 2(s - 1)\} \leq r' \leq r - s + 1$  alors  $0 \leq i \leq r' - (r - 2(s - 1))$  et  $i \equiv r' - r \pmod{2}$ ,

*Remarque* : il est possible de décrire  $R_{\pi_v}(s, t)(r, i)$  mais dans la suite nous n'utiliserons que le fait que sa réduction modulo  $l$  ne dépend que  $(s, t)$  et de  $r_l(\pi_v)$ . Par ailleurs pour  $\pi'_v \sim^i \pi_v$ , on posera  $R_{\pi'_v}(s, t)(r, i) = R_{\pi_v}(s, t)(r, i)$ , ce qui est cohérent avec l'écriture de la cohomologie dans la proposition précédente.

Le cas général s'en déduit en utilisant le lemme 1.5.5 de [3].

**3.2.4. Corollaire.** — Soit  $\Pi$  une représentation automorphe irréductible de  $G(\mathbb{A})$   $\xi$ -cohomologique, de multiplicité  $m(\Pi)$  dans l'espace des formes automorphes, telle que sa composante  $\Pi_v$  en la place  $v$  est isomorphe à

$$\Pi_v \simeq \mathrm{Speh}_s(\mathrm{St}_{t_1}(\pi_{1,v})) \times \cdots \times \mathrm{Speh}_s(\mathrm{St}_{t_u}(\pi_{u,v}))$$

où les  $\pi_{i,v}$  sont des représentations irréductibles cuspidales de  $GL_{g_i}(F_v)$  et donc  $s \sum_{i=1}^u g_i t_i = d$ . Alors pour tout  $(r, i)$ ,  $[H^i(pj_{!*}^{\geq rg} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi_v, r)[d - rg])]\{\Pi^{\infty, v}\}$  est nulle s'il n'existe pas  $1 \leq k \leq u$  tel que  $\pi_v$  est dans la classe inertielle de  $\pi_{k,v}$  et sinon égale à

$$\sum_{k: \pi_v \sim^i \pi_{k,v}} m_{s_k, t_k}(r, i) e_{\pi_v} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) R_{\pi_k}(s, t_k)(r, i) (\Pi_v) \otimes \left( \Pi_{p,0}(\mathrm{Art}_{F_v}^{-1}) \otimes \Xi^{i/2} \right)$$

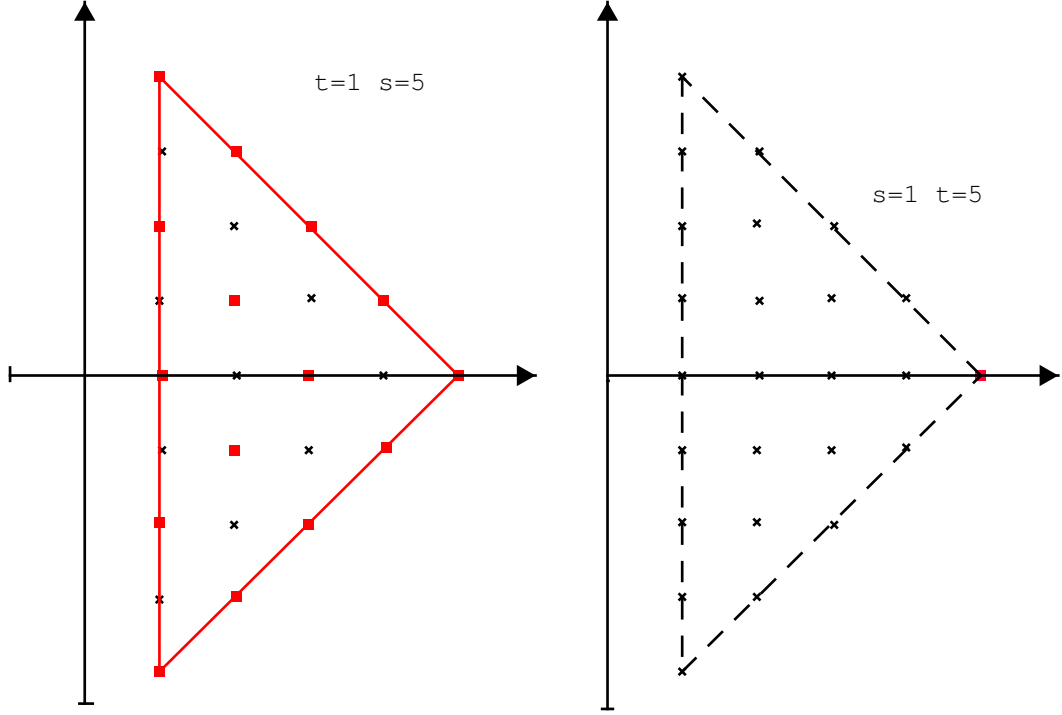


FIGURE 2. Position des  $m_{s,t}(r, i) = 1$  dans le cas d'une Spéh à gauche et d'une Steinberg à droite

où

$$\begin{aligned}
 R_{\pi_k}(s, t_k)(r, i)(\Pi_v) &:= \text{Speh}_s(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_{k-1}}(\pi_{k-1,v})) \\
 &\quad \times R_{\pi_k}(s, t_k)(r, i) \times \\
 &\quad \text{Speh}_s(\text{St}_{t_{k+1}}(\pi_{k+1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_u}(\pi_{u,v})). \quad (3.2.4)
 \end{aligned}$$

*Remarque :* autrement dit pour toute représentation

$$\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_u}(\pi_{u,v}))$$

l'ensemble des couples  $(r, i)$  tels que  $[H^i(pj_{!*}^{\geq rg} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi_v, r)[d - rg])]\{\Pi^{\infty, v}\}$  est obtenu en superposant les  $u$  diagrammes précédents comme sur la figure 4; pour  $(r, i)$  donné la contribution du diagramme d'indice  $k$  s'obtient en remontant à la source, i.e. à  $(s + t_k - 1, 0)$  et en remplaçant  $\text{Speh}_s(\text{St}_{t_k}(\pi_{k,v}))$  par  $R_{\pi_k}(s, t_k)(r, i)$ . Ainsi :

- pour tout  $i \neq 0$  et pour tout  $r$  tel que  $[H^i(pj_{!*}^{\geq rg} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi_v, r)[d - rg])]\{\Pi^{\infty, v}\}$  est non nulle alors il existe  $r' > r$  tel que  $[H^0(pj_{!*}^{\geq r'g} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi_v, r')[d - rg])]\{\Pi^{\infty, v}\}$  est non nulle.

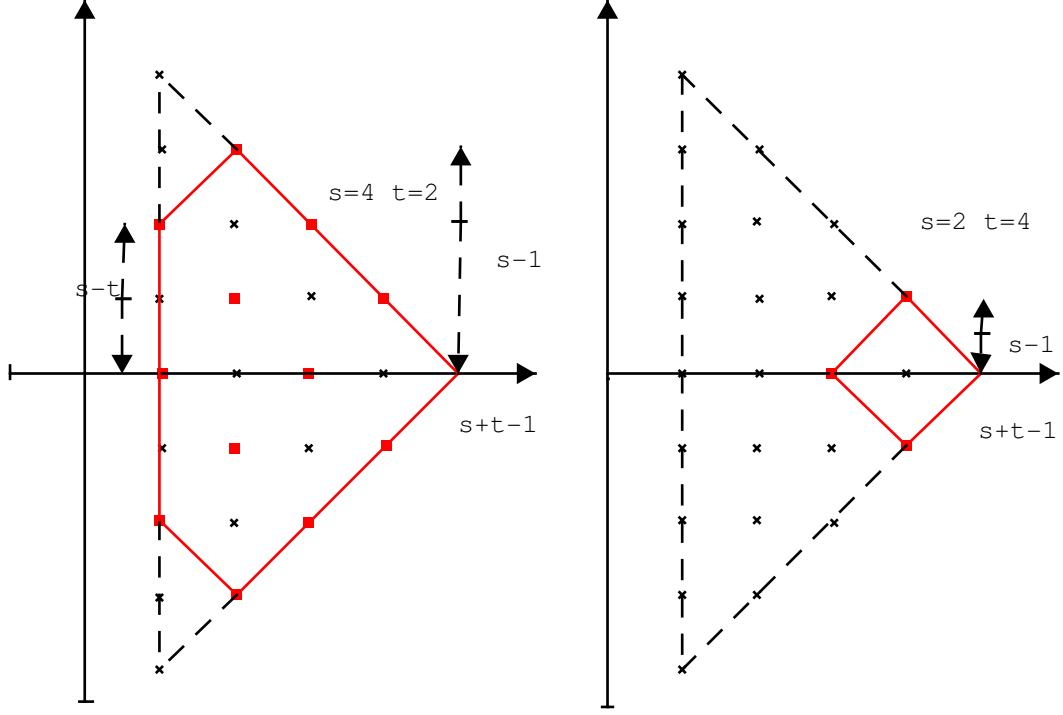


FIGURE 3. Position des  $m_{s,t}(r, i) = 1$  dans le cas  $s \geq t$  à gauche et  $t \geq s$  à droite

Plus précisément pour tout sous-quotient irréductible  $\Pi_v(k, r, i) \otimes \left( \Pi_{p,0}(\text{Art}_{F_v}^{-1}) \otimes \Xi^{i/2} \right)$  de  $[H^i(pj_*^{\geq rg} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi_v, r)[d - rg])]\{\Pi^{\infty, v}\}$ , où  $\Pi_v(k, r, i)$  est comme dans (3.2.4), alors  $\Pi_v(k, s+t_k, 0) \otimes \left( \Pi_{p,0}(\text{Art}_{F_v}^{-1}) \otimes \Xi^{i/2} \right)$  est un sous-quotient de  $[H^0(pj_*^{\geq r'g} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi_v, r')[d - r'g])]\{\Pi^{\infty, v}\}$ .

- pour  $i = 0$ , certains des constituants de  $[H^0(pj_*^{\geq rg} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi_v, r)[d - rg])]\{\Pi^{\infty, v}\} \ll$  proviennent  $\gg$  des  $r' > r$  comme dans le cas précédent et d'autres non.

*Illustration sur la figure 4 pour  $r = 4$  :*

- $\text{Speh}_4(\pi_v) \times \text{Speh}_4(\text{St}_3(\pi_v)) \times R_{\pi_v}(4, 5)(4, 0)$  provient de  $(8, 0)$  ;
- $\text{Speh}_4(\pi_v) \times R_{\pi_v}(4, 3)(4, 0) \times \text{Speh}_4(\text{St}_5(\pi_v))$  provient de  $(6, 0)$  ;
- $R_{\pi_v}(4, 1)(4, 0) \times \text{Speh}_4(\text{St}_3(\pi_v)) \times \text{Speh}_4(\text{St}_5(\pi_v))$  ne provient pas d'un  $(r', 0)$  pour  $r' > 4$ .

Avec l'introduction des ensembles  $\mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)$ , l'énoncé précédent se formule comme suit.

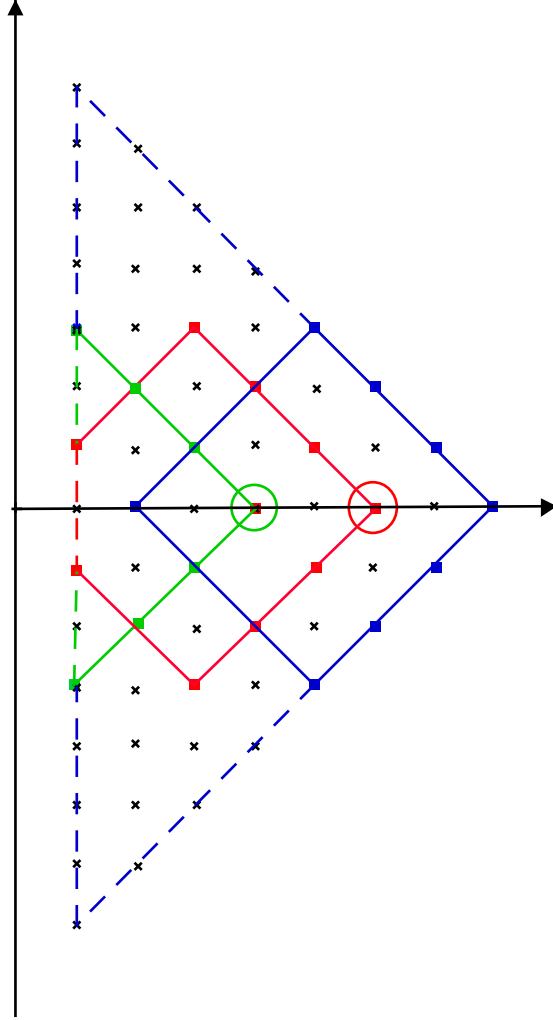


FIGURE 4. Superposition des diagrammes pour le calcul des  $m(r, i)$  dans le cas où  $\Pi_v \simeq \text{Speh}_4(\pi_v) \times \text{Speh}_4(\text{St}_3(\pi_v)) \times \text{Speh}_4(\text{St}_5(\pi_v))$

**3.2.5. Corollaire.** — Soit  $\pi_v$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  ; pour tout  $1 \leq r \leq d/g$ , on a

$$[H^i(pj_{!*}^{\geq rg} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi_v, r)[d - rg])] = \sum_{\substack{(s, t) \\ m_{s, t}(r, i) = 1}} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s+t-1, s)} e_{\pi_v} m k_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) R_{\pi_v}(s, t)(r, i)(\Pi_v) \otimes \left( \Pi_{p, 0}(\text{Art}_{F_v}^{-1}) \otimes \Xi^{i/2} \right)$$

**3.3. des systèmes locaux d'Harris-Taylor.** — On reprend les calculs du paragraphe précédent pour les  $j_!^{\geq rg} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi_v, r)$ . Dans [2] corollaire 5.4.1, on prouve l'égalité suivante

$$i_{\mathcal{I}, * }^{tg} j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) = i_*^{tg} j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) + \sum_{i=1}^{s-t} i_*^{(t+i)g} j_{!*}^{\geq (t+i)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_i(\pi_v))(i/2) \quad (3.3.1)$$

laquelle permet alors de calculer les  $H^i(j_{\mathcal{I}, !}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$ . Comme précédemment on traite tout d'abord le cas de  $\text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi_v))$ .

**3.3.2. Proposition.** — (cf. [3] §5)

Soit  $\Pi$  une représentation automorphe irréductible de  $G(\mathbb{A})$  cohomologique pour  $\xi$ , de multiplicité  $m(\Pi)$  dans l'espace des formes automorphes, telle que sa composante  $\Pi_v$  en la place  $v$  est isomorphe à  $\text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi_v))$  pour  $\pi_v$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$ . Alors pour tout  $(r, i)$ ,  $[H^i(p j_!^{\geq rg'} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi'_v, r))]\{\Pi^{\infty, v}\}$  est nul si  $g' \neq g$  et  $\pi'_v$  n'est pas dans la classe inertielle de  $\pi_v$  et sinon égal à

$$n_{s,t}(r, i) e_{\pi_v} m k_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) S_{\pi_v}(s, t)(r, i) \otimes \left( \Pi_{p, 0}(\text{Art}_{F_v}^{-1}) \otimes \Xi^{\frac{2i+r-s-t+1}{2}} \right)$$

où  $S_{\pi_v}(s, t)(r, i)$  est une représentation de  $GL_{d-tg}(F_v)$  qui s'obtient combinatoirement à partir de  $\Pi_v$  et  $n_{s,t}(r, i) \in \{0, 1\}$  selon que le couple  $(r, i)$  est associé aux coordonnées d'un point marqué dans les figures 5 et 6.

*Remarque :* les points de coordonnées  $(r, i)$  tels que  $n_{s,t}(r, i) = 1$  sont tous ceux contenus dans l'enveloppe convexe du polygone de sommets  $(s+t-1, 0)$ ,  $(s, 0)$ ,  $(1, s-1)$  et  $(t, s-1)$ .

*Remarque :* à vrai dire dans [3] on traite seulement les cas  $s = 1$  ou  $t = 1$ . Le calcul procède par analyse de la suite spectrale associée à la filtration de stratification de  $j_{\mathcal{I}, !}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  dont les gradués sont les termes du membre de droite de (3.3.1). La nullité des  $n_{s,t}(r, i)$  pour  $(r, i)$  n'appartenant pas à l'intérieur du quadrilatère de sommets  $(1, 0)$ ,  $(1, s-1)$ ,  $(t, s-1)$  et  $(s+t-1, 0)$  est alors immédiate (en utilisant la nullité pour  $i < 0$ ). De même on obtient  $n_{s,t}(r, i)$  pour  $(r, i)$  appartenant à la ligne polygonale joignant  $(1, s-1)$ ,  $(t, s-1)$  et  $(s+t-1, 0)$  et que ceux qui sont non nuls sont tels que  $i$  a la même parité que le  $(r, i')$  sur cette ligne polygonale. Le seul argument combinatoire réside alors dans l'étude de la nullité pour  $(r, i)$  appartenant à l'intérieur de  $(1, s-1)$ ,  $(s, 0)$ , et  $(1, 0)$ . Dans la suite nous utiliserons simplement le fait que  $S_{\pi_v}(s, t)(s+t-1, 0) = R_{\pi_v}(s, t)(s+t-1, 0)$  qui découle directement de ce que nous venons d'explicitier.

Le cas général s'en déduit en utilisant le lemme 1.5.5 de [3].

**3.3.3. Corollaire.** — Soit  $\Pi$  une représentation automorphe irréductible de  $G(\mathbb{A})$   $\xi$ -cohomologique de multiplicité  $m(\Pi)$  dans l'espace des formes automorphes, telle que sa composante  $\Pi_v$  en la place  $v$  est isomorphe à

$$\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_u}(\pi_{u,v}))$$

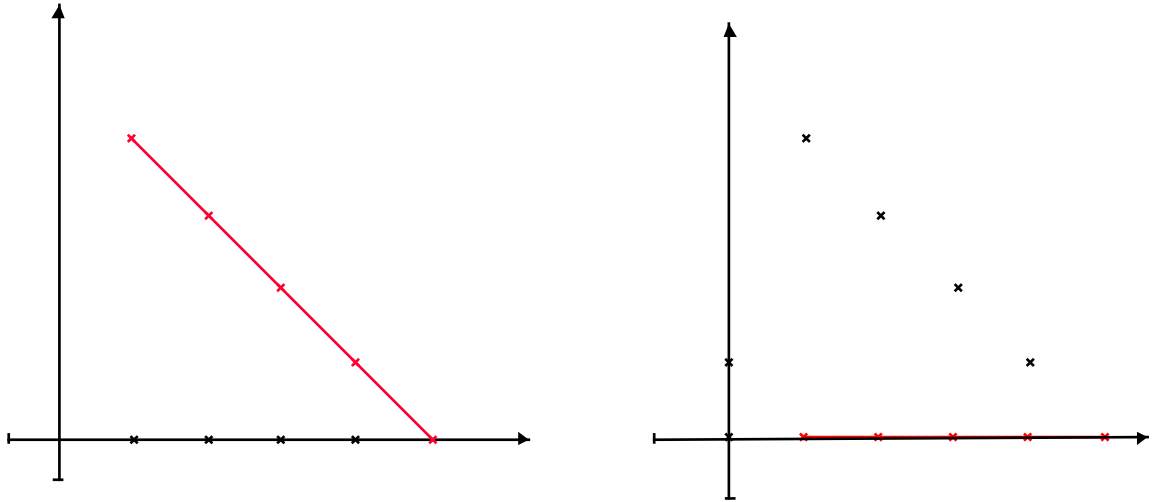


FIGURE 5. Position des  $n_{s,t}(r, i) = 1$  dans le cas d'une Sp<sub>e</sub>h à gauche et d'une Steinberg à droite

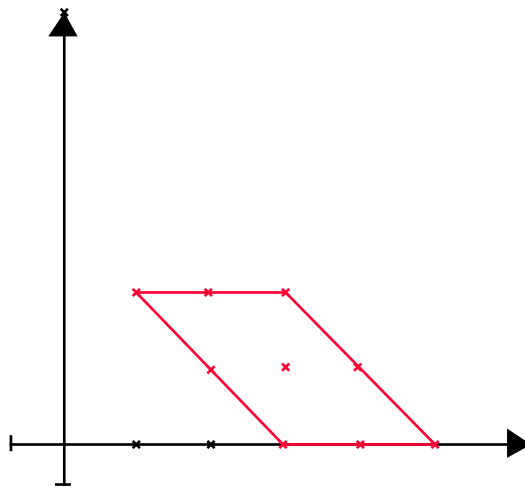


FIGURE 6. Position des  $n_{s,t}(r, i) = 1$  pour  $\text{Speh}_3(\text{St}_3(\pi_v))$

où les  $\pi_{i,v}$  sont des représentations irréductibles cuspidales de  $GL_{g_i}(K)$ . Alors pour tout  $(r, i)$ ,  $[H^i(p_j^{\geq rg} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_i, \xi}(\pi_v, r)[d - rg])]\{\Pi^{\infty, v}\}$  est nulle s'il n'existe pas  $1 \leq k \leq u$  tel que  $\pi_v$

est dans la classe inertielle de  $\pi_{k,v}$  et sinon égale à

$$\sum_{k: \pi_v \sim_i \pi_{k,v}} m_{s_k, t_k}(r, i) e_{\pi_v} m k_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) S_{\pi_k}(s, t_k)(r, i)(\Pi_v) \otimes \left( \Pi_{p,0}(\text{Art}_{F_v}^{-1}) \otimes \Xi^{\frac{2i+r-s-t+1}{2}} \right)$$

où

$$\begin{aligned} R_{\pi_k}(s, t_k)(r, i)(\Pi_v) &:= \text{Speh}_s(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,v}) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_{k-1}}(\pi_{k-1,v})) \\ &\quad \times S_{\pi_k}(s, t_k)(r, i) \times \\ &\quad \text{Speh}_s(\text{St}_{t_{k+1}}(\pi_{k+1,v}) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_u}(\pi_{u,v}))) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

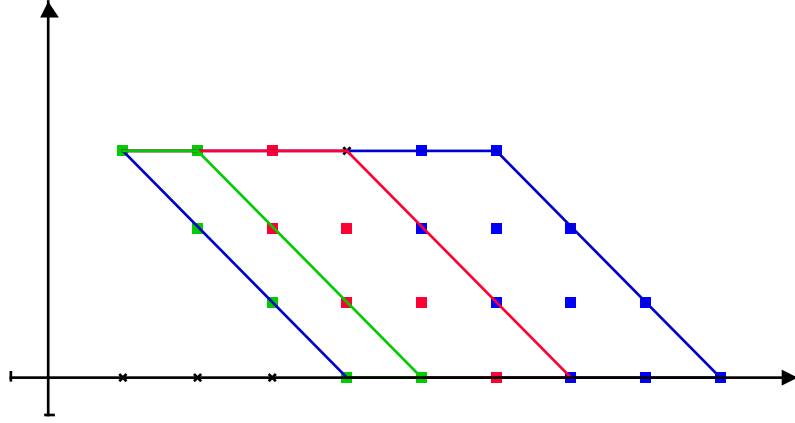


FIGURE 7. Superposition des diagrammes pour le calcul des  $n(r, i)$  dans le cas où  $\Pi_v \simeq \text{Speh}_4(\pi_v) \times \text{Speh}_4(\text{St}_3(\pi_v)) \times \text{Speh}_4(\text{St}_5(\pi_v))$

**3.3.4. Corollaire.** — Soit  $\pi_v$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  ; pour tout  $1 \leq r \leq d/g$ , on a

$$\begin{aligned} [H^i(p, j_!^{\geq rg} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi_v, r)[d - rg])] &= \sum_{\substack{(s,t) \\ n_{s,t}(r,i)=1}} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\pi_v}(s+t-1, s)} \\ &e_{\pi_v} m k_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) S_{\pi_v}(s, t)(r, i)(\Pi_v) \otimes \left( \Pi_{p,0}(\text{Art}_{F_v}^{-1}) \otimes \Xi^{\frac{2i+r-s-t+1}{2}} \right) \end{aligned}$$

## 4. Représentations automorphes congruentes

**4.1. Définitions.** — Une mesure de Haar  $\mu = \otimes'_v \mu_v$  étant fixée sur  $G(\mathbb{A}^\infty)$ , pour  $K$  décrivant l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts de  $G(\mathbb{A}^\infty)$ , les centres  $Z(\mathcal{H}_{K, \mathbb{Z}})$  des

algèbres de Hecke forment un système projectif. Pour  $\Pi$  une représentation automorphe de  $G(\mathbb{A})$ , on note

$$\eta_\Pi : \varprojlim Z(\mathcal{H}_{K,\mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

le caractère associé tel que  $\eta_\Pi = \eta_{\Pi^K} \circ pr_K$  pour tout sous-groupe compact ouvert  $K$  tel que  $\Pi^K \neq (0)$ .

**4.1.1. Définition.** — Pour  $\lambda$  une place de  $\bar{\mathbb{Q}}$ , deux représentations automorphes  $\Pi$  et  $\Pi'$  sont dites *congruentes modulo  $\lambda$*  et on écrit  $\Pi \equiv \Pi' \pmod{\lambda}$ , si leurs caractères le sont.

*Remarque :* on peut aussi définir la notion de congruence locale pour des représentations  $\Pi_v$  et  $\Pi'_v$  de  $G(F_v)$ . Dans le cas où  $\Pi_v$  et  $\Pi'_v$  sont non ramifiées, elles sont congruentes modulo  $\lambda$  si et seulement si leurs paramètres de Satake le sont.

*Remarque :*  $\Pi \equiv \Pi' \pmod{\lambda}$  si et seulement si  $\Pi_v \equiv \Pi'_v \pmod{\lambda}$  pour toute place finie  $v$  de  $F$ .

**4.1.2. Définition.** — Deux  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentations irréductibles automorphes  $\Pi$  et  $\Pi'$  de  $G(\mathbb{A})$  qui sont  $\xi$ -cohomologiques, seront dites *fortement congruentes modulo  $l$*  si :

- les réductions modulo  $l$  de  $\Pi$  et  $\Pi'$  ne sont pas disjointes ;
- $r_l(\Pi) - r_l(\Pi')$  est à support fini.

*Remarque :* des représentations fortement congruentes sont bien évidemment congruentes pour toute place  $\lambda$  de  $\bar{\mathbb{Q}}_l$  d'après la première condition.

Rappelons que selon la notation 3.2.2, pour  $\pi_v$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$ ,  $\mathcal{A}_{\xi,\pi_v}(r,s)$  désigne l'ensemble des représentations irréductibles automorphes de  $G(\mathbb{A})$   $\xi$ -cohomologiques telles qu'en particulier leur composante locale en  $v$  soit de la forme  $\text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi'_v)) \times ?$  avec  $r = s + t - 1$ ,  $\pi'_v \sim^i \pi_v$  et  $?$  une représentation quelconque de  $GL_{d-stg}(F_v)$ . On se propose alors de montrer l'existence de couples  $(\Pi, \Pi') \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_v}(r,s) \times \mathcal{A}_{\xi,\pi'_v}(r,s)$  de représentations fortement congruentes où  $r_l(\pi_v) = r_l(\pi'_v)$ .

**4.2. Énoncé du résultat.** — Afin d'alléger les notations, pour  $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_v}(r,s)$  et pour tout  $(r',i)$  tels que  $m(r',i) = 1$ , on notera

$$t_{r',i}^{r,s}(\Pi) = \Pi^{\infty,v} \otimes \left( R_{\pi_v}(s, r - s + 1)(r', i)(\Pi_v) \right).$$

**4.2.1. Proposition.** — Soient  $\pi_v$  et  $\pi'_v$  deux représentations irréductibles cuspidales de  $GL_g(F_v)$  ayant la même réduction modulo  $l$ , alors pour tout  $r \geq s$  on a

$$\sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_v}(r,s)} mk_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v}) r_l \left( t_{r,0}^{r,s}(\Pi) \right) = \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi,\pi'_v}(r,s)} mk_{G,\xi}(\Pi'^{\infty,v}) r_l \left( t_{r,0}^{r,s}(\Pi') \right).$$

*Remarque* : il faut considérer les égalités précédentes comme des tours d'égalités indexées par des sous-groupes compacts  $K^\infty$  de  $G(\mathbb{A}^\infty)$ ; pour tout tel  $K^\infty$  l'égalité correspondante s'écrit

$$\sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) r_l \left( t_{r, 0}^{r, s}(\Pi)^{K^\infty} \right) = \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(r, s)} mk_{G, \xi}(\Pi'^{\infty, v}) r_l \left( t_{r, 0}^{r, s}(\Pi')^{K^\infty} \right)$$

avec  $t_{r, 0}^{r, s}(\Pi)^{K^\infty} = (\Pi^{\infty, v})^{K^{\infty, v}} \otimes \left( R_{\pi_v}(s, r - s + 1)(r', i)(\Pi_v) \right)^{K_{v, rg}^\infty}$  où  $K_{v, rg}^\infty$  est la projection sur le deuxième facteur du Levi de  $P_{rg, d}$  de  $K_v^\infty \cap P_{rg, d}(F_v)$ . Pour chaque niveau fini  $K^\infty$ , chacun des deux côté de l'égalité correspondante est alors à support fini.

*Remarque* : sous les hypothèses de la proposition, comme la réduction modulo  $l$  de  $\text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi_v))$  est égale à celle de  $\text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi'_v))$ , on en déduit alors le corollaire suivant que l'on considère à nouveau comme une tour d'égalités.

**4.2.2. Corollaire.** — Soient  $\pi_v$  et  $\pi'_v$  deux représentations irréductibles cuspidales de  $GL_g(F_v)$  ayant la même réduction modulo  $l$ , alors pour tout  $r \geq s$  on a

$$\sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) r_l(\Pi^\infty) = \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(r, s)} mk_{G, \xi}(\Pi'^{\infty, v}) r_l(\Pi'^\infty).$$

Revenons à la problématique du début de ce paragraphe; pour  $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)$  et un sous-quotient irréductible  $\tau^\infty$  de  $r_l(\Pi^\infty)$ , d'après l'égalité du corollaire précédent, il existe  $\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(r, s)$  dont la réduction modulo  $l$  contient  $\tau^\infty$ . Par ailleurs pour toutes les places sauf un nombre fini, les composantes locales de  $\Pi$  et  $\Pi'$  sont des représentations non ramifiées de  $GL_d$  dont la réduction modulo  $l$  contient la composante locale de  $\tau$  et ont donc le même support supercuspidal. Ainsi les composantes locales de  $\Pi$  et  $\Pi'$  sont de la forme  $\text{Speh}_s(\chi_1) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\chi_g)$  et  $\text{Speh}_s(\chi'_1) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\chi'_g)$  où  $r_l(\chi_i) = r_l(\chi'_i)$  pour  $i = 1, \dots, g$ ; on en déduit donc que la réduction modulo  $l$  de ces composantes locales sont égales, et donc  $r_l(\Pi) - r_l(\Pi')$  est à support fini.

**4.3. Initialisation de la récurrence.** — Nous allons prouver la proposition 4.2.1 par récurrence sur  $r$  de  $s_g := \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$  à 1. Le cas  $r = s_g$  correspond

- soit aux  $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, s_g)$  et donc  $\Pi_v \simeq \text{Speh}_{s_g}(\pi_v) \times ?$ ,
- soit aux  $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, 1)$  et donc  $\Pi_v \simeq \text{St}_{s_g}(\pi_v) \times ?$ ,

avec ? une représentation de  $GL_k(F_v)$  avec  $k < g$ .

Avec les notations précédentes, rappelons que l'on a

$${}^p j_{!*}^{\geq s_g g} \mathcal{F}_\xi(s_g, \pi_v)[d - s_g g] = {}^j i_!^{\geq s_g g} \mathcal{F}_\xi(s_g, \pi_v)[d - s_g g]$$

la  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -cohomologie étant alors concentrée en degré médian. En outre on a

$$[H^*(j_!^{\geq s_g g} \mathcal{F}_\xi(s_g, \pi_v))] = \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, s_g)} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) \Pi^{\infty, v} + \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, 1)} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) \Pi^{\infty, v} \quad (4.3.1)$$

l'action de  $\mathbb{Z}$  étant triviale.

**4.3.2. Proposition.** — Soient  $\pi_v$  et  $\pi'_v$  deux représentations irréductibles cuspidales de  $GL_g(F_v)$  ayant la même réduction modulo  $l$ , on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, s_g) \cup \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(s_g, 1)} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) r_l(\Pi^\infty) \\ = \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(s_g, s_g) \cup \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(s_g, 1)} mk_{G, \xi}(\Pi'^{\infty, v}) r_l(\Pi'^{\infty}). \end{aligned}$$

Avant de prouver ce résultat commençons par quelques rappels élémentaires.

**4.3.3. Lemme.** — Le foncteur  $r_l : \text{Groth}_{\mathbb{Q}_l}(GL_n(\mathbb{Q}_p)) \rightarrow \text{Groth}_{\mathbb{F}_l}(GL_n(\mathbb{Q}_p))$  de réduction modulo  $l$  du groupe de Grothendieck des  $\mathbb{Q}_l$ -représentations entières de  $GL_n(\mathbb{Q}_p)$  dans celui des  $\mathbb{F}_l$ -représentations de  $GL_n(\mathbb{Q}_p)$  est tel que

$$r_l\left(\sum_i H^i(X, \mathbb{Q}_l)\right) \simeq \sum_i H^i(X, \mathbb{F}_l).$$

*Démonstration.* — On choisit une résolution équivariante plate  $P^\bullet$  (i.e. sans  $l$ -torsion) de la  $\mathbb{Z}_l$  cohomologie de sorte que la cohomologie de  $P^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$  (resp.  $P^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{F}_l$ ) calcule les  $H^\bullet(X, \mathbb{Q}_l)$  (resp.  $H^\bullet(X, \mathbb{F}_l)$ ). On rappelle alors le résultat connu suivant (cf. par exemple [4] proposition 7.1.3) :

**4.3.4. Lemme.** — Soit  $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$  une catégorie dérivée munie d'une  $t$ -structure non dégénérée : on note  $\mathcal{C}$  son coeur qui est alors une catégorie abélienne de groupe de Grothendieck  $\text{Groth}(\mathcal{C})$ . L'application qui à un objet  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{D}$  associe

$$\sum_i (-1)^i [ph^i \mathcal{F}] \in \text{Groth}(\mathcal{C})$$

induit un isomorphisme du groupe de Grothendieck  $K(\mathcal{D})$  de la catégorie triangulée  $\mathcal{D}$ , sur  $\text{Groth}(\mathcal{C})$ , où l'on rappelle qu'étant donnée une catégorie triangulée  $A$  localement petite, son groupe de Grothendieck  $K(A)$  est défini comme le groupe libre engendré par les classes d'isomorphismes d'objets de  $A$  quotienté, par les relations :  $A[1] = -A$  et  $A = B + C$  pour tout triangle distingué  $B \rightarrow A \rightarrow C \xrightarrow{+1}$ .

En considérant les  $t$ -structures triviales on en déduit alors que l'image de la somme alternée de la cohomologie de  $P^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$  (resp. de  $P^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{F}_l$ ) est égale dans le groupe de Grothendieck correspondant à  $\sum_i (-1)^i H^i(X, \mathbb{Q}_l)$  (resp.  $\sum_i (-1)^i H^i(X, \mathbb{F}_l)$ ). Ainsi le résultat découle du fait évident que l'image par le morphisme de réduction de la classe de  $P^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$  dans  $K(D^b(X, \mathbb{Q}_l))$  est égale à la classe de  $P^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{F}_l$  dans  $K(D^b(X, \mathbb{F}_l))$ .  $\square$

*Démonstration.* — de la proposition 4.3.2

Notons que l'on a

$$\mathbb{F}\mathcal{F}_\xi(s_g, \pi_v) = \mathbb{F}\mathcal{F}_\xi(s_g, \pi'_v)$$

et que le foncteur  $\mathbb{F}$  commute avec  $j_!^{\geq s_g g}$ . On en déduit alors que

$$\mathbb{F}H^*(j_!^{\geq s_g g} \mathcal{F}_\xi(s_g, \pi_v)) = H^*\left(\mathbb{F}j_!^{\geq s_g g} \mathcal{F}_\xi(s_g, \pi_v)\right).$$

Le résultat découle alors directement de (4.3.1).  $\square$

Dans l'égalité de la proposition 4.3.2 on découpe le membre de gauche selon  $\mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, s_g)$  et  $\mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, 1)$ ; il s'agit alors d'identifier chacune de ces deux sommes avec celles correspondant à  $\pi'_v$ .

**4.3.5. Lemme.** — *Avec les notations précédentes, si  $\Pi$  appartient à  $\mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, s_g)$  (resp. à  $\mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, 1)$ ) alors pour toute place  $w$  telle que  $G(F_w) \simeq GL_d(F_w)$ , la composante locale  $\Pi_w$  de  $\Pi$  en  $w$  est alors de la forme  $\text{Speh}_{s_g}(\pi_w)$  pour  $\pi_w$  une représentation irréductible tempérée (resp. est une représentation irréductible tempérée).*

*Démonstration.* — Le résultat est bien connu, donnons en une preuve en utilisant la cohomologie de la variété de Shimura. D'après [3] §4.2, en utilisant la suite spectrale de monodromie/poids en la place  $v$ , on obtient que  $[H_\eta^i]\{\Pi^\infty\}$  est non nulle de dimension  $g$  si et seulement si  $i \equiv s - 1 \pmod{2}$  avec  $|i| < s$ ; si maintenant on calcule la cohomologie de la variété de Shimura via la suite spectrale de monodromie/poids en la place  $w$ , il faut, d'après [3] §4.3, que

$$\Pi_w \simeq \text{Speh}_s(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_u}(\pi_{u,v}))$$

d'où l'affirmation.  $\square$

Soit alors  $\varrho^\infty$  un sous-quotient irréductible d'un  $r_l(\Pi^\infty)$  pour  $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, 1)$ . On choisit une place  $w$  où  $\Pi_w$  est non ramifiée et donc de la forme  $\Pi_w \simeq \chi_1 \times \cdots \times \chi_d$  où pour  $i = 1, \dots, d$ , les  $\chi_i$  sont des caractères non ramifiés unitaires de  $F_w^\times$ . On modifie alors  $\varrho$  en  $\tilde{\varrho}$  tel que  $\varrho^w \simeq \tilde{\varrho}^w$  et  $\varrho_w$  est non dégénérée.;  $\tilde{\varrho}^\infty$  est aussi un sous-quotient de  $r_l(\Pi^\infty)$  et donc d'après 4.3.2 de la réduction modulo  $l$  d'un  $\Pi'^\infty$  pour  $\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(s_g, s_g) \cup \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(s_g, 1)$ . Or comme  $\tilde{\varrho}^w$  est non dégénéré, on doit avoir  $\Pi'_w \simeq \chi'_1 \times \cdots \times \chi'_d$  et donc d'après le lemme précédent,  $\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(s_g, 1)$ . Mais alors comme la réduction modulo  $l$  de  $\Pi'_w$  est aussi égale à celle de  $\Pi_w$ , on en déduit que  $\varrho^\infty$  est aussi un sous-quotient irréductible de la réduction

modulo  $l$  de  $\Pi'$ .

On obtient ainsi l'inégalité

$$\sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, 1)} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) r_l(\Pi^{\infty}) \leq \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(s_g, 1)} mk_{G, \xi}(\Pi'^{\infty, v}) r_l(\Pi'^{\infty}),$$

et donc l'égalité par symétrie du raisonnement. En utilisant la proposition 4.3.2, on obtient ensuite

$$\sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, s_g)} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) r_l(\Pi^{\infty}) = \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(s_g, s_g)} mk_{G, \xi}(\Pi'^{\infty, v}) r_l(\Pi'^{\infty}).$$

**4.4. Preuve de l'induction.** — Commençons par le corollaire suivant de 4.2.1.

**4.4.1. Corollaire.** — Soient  $\pi_v$  et  $\pi'_v$  deux représentations irréductibles cuspidales de  $GL_g(F_v)$  ayant la même réduction modulo  $l$  et tels que

$$\sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) r_l\left(t_{r, 0}^{r, s}(\Pi)\right) = \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(r, s)} mk_{G, \xi}(\Pi'^{\infty, v}) r_l\left(t_{r, 0}^{r, s}(\Pi')\right).$$

Alors pour tout  $(r', i)$ , on a

$$\sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) r_l\left(t_{r', i}^{r, s}(\Pi)\right) = \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(r, s)} mk_{G, \xi}(\Pi'^{\infty, v}) r_l\left(t_{r', i}^{r, s}(\Pi')\right).$$

*Démonstration.* — Si  $m_{r, s}(r', i) = 0$  c'est bien entendu évident. Sinon le résultat découle du fait que la réduction modulo  $l$  de  $R_{\pi_v}(s, t)(r', i)$  est égale à celle de  $R_{\pi'_v}(s, t)(r', i)$ .  $\square$

On suppose donc, par récurrence, que pour tout  $r' > r$  et pour tout  $s$ , on a

$$\sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r', s)} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) r_l\left(t_{r', 0}^{r', s}(\Pi)\right) = \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(r', s)} mk_{G, \xi}(\Pi'^{\infty, v}) r_l\left(t_{r', 0}^{r', s}(\Pi')\right),$$

et montrons le résultat suivant.

**4.4.2. Lemme.** — L'égalité suivante est vérifiée :

$$\sum_s \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) r_l\left(t_{r, 0}^{r, s}(\Pi)\right) = \sum_s \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(r, s)} mk_{G, \xi}(\Pi'^{\infty, v}) r_l\left(t_{r, 0}^{r, s}(\Pi')\right). \quad (4.4.2)$$

*Démonstration.* — D'après 3.2.4 et le corollaire précédent, on en déduit que pour tout  $i \neq 0$ , la réduction modulo  $l$  des parties libres de  $H^i(pj_{!*}^{\geq rg} \mathcal{F}_{\xi}(\pi_v, r)[d - rg])$  et  $H^i(pj_{!*}^{\geq rg} \mathcal{F}_{\xi}(\pi'_v, r)[d - rg])$  sont égales, d'après le lemme 4.3.3, on en déduit que

$$\sum_i (-1)^i r_l\left(H_{libre}^i(pj_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}_{\xi}(\pi_v, r))\right) = \sum_i (-1)^i r_l\left(H_{libre}^i(pj_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}_{\xi}(\pi'_v, r))\right)$$

et donc que la réduction modulo  $l$  des parties libres de  $H^0(pj_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}_{\xi}(\pi_v, r)[d - rg])$  et de  $H^0(pj_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}_{\xi}(\pi'_v, r)[d - rg])$  sont égales, ce qui d'après 3.2.4 donne le résultat annoncé.  $\square$

Il s'agit alors dans l'égalité (4.4.2) de séparer les  $s$ . Pour cela commençons par le lemme suivant sur les représentations de  $GL_d(K)$ .

**4.4.3. Lemme.** — Soit  $K$  un corps local et  $\Pi$  une représentation irréductible de  $GL_n(K)$  de la forme

$$\mathrm{Speh}_{s_1}(\mathrm{St}_{t_1}(\pi_1)) \times \cdots \times \mathrm{Speh}_{s_u}(\mathrm{St}_{t_u}(\pi_u))$$

où les  $\pi_i$  pour  $i = 1, \dots, u$  sont des représentations irréductibles cuspidales de  $GL_{g_i}(K)$ . Alors le niveau de Whittaker de  $\Pi$  est déterminé par le multi-ensemble

$$\left\{ \overbrace{s_1, \dots, s_1}^{t_1}, \dots, \overbrace{s_u, \dots, s_u}^{t_u} \right\}.$$

*Remarque :* autrement dit  $\mathrm{Speh}_{s'_1}(\mathrm{St}_{t'_1}(\pi'_{g_1})) \times \cdots \times \mathrm{Speh}_{s'_{u'}}(\mathrm{St}_{t'_{u'}}(\pi'_{g_{u'}}))$  a le même niveau de Whittaker si et seulement si

$$\left\{ \overbrace{s_1, \dots, s_1}^{t_1}, \dots, \overbrace{s_u, \dots, s_u}^{t_u} \right\} = \left\{ \overbrace{s'_1, \dots, s'_1}^{t'_1}, \dots, \overbrace{s'_{u'}, \dots, s'_{u'}}^{t'_{u'}} \right\},$$

ce qui graphiquement peut s'illustrer comme sur la figure 8.

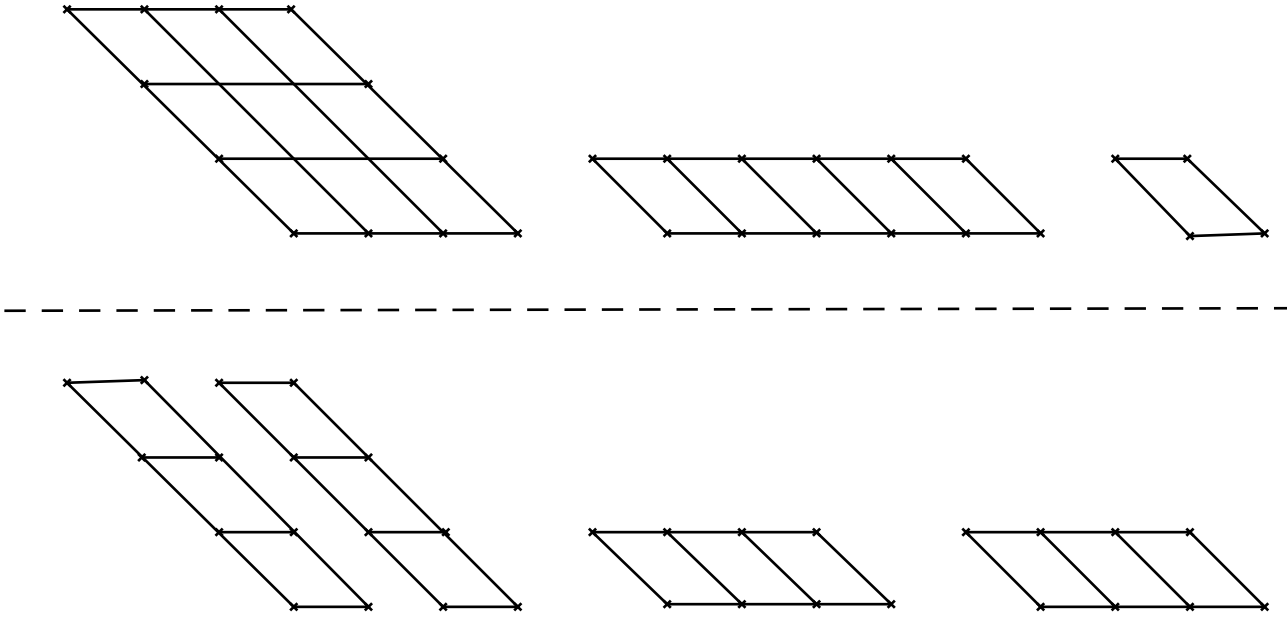


FIGURE 8. Illustration graphique du lemme 4.4.3

*Démonstration.* — Le résultat découle directement du fait que la dérivée maximal de  $\mathrm{Speh}_{s_1}(\mathrm{St}_{t_1}(\pi_1)) \times \cdots \times \mathrm{Speh}_{s_u}(\mathrm{St}_{t_u}(\pi_u))$  est  $\mathrm{Speh}_{s_1-1}(\mathrm{St}_{t_1}(\pi_1)) \times \cdots \times \mathrm{Speh}_{s_u-1}(\mathrm{St}_{t_u}(\pi_u))$ , ce qui graphiquement s'illustre comme sur la figure 9.  $\square$

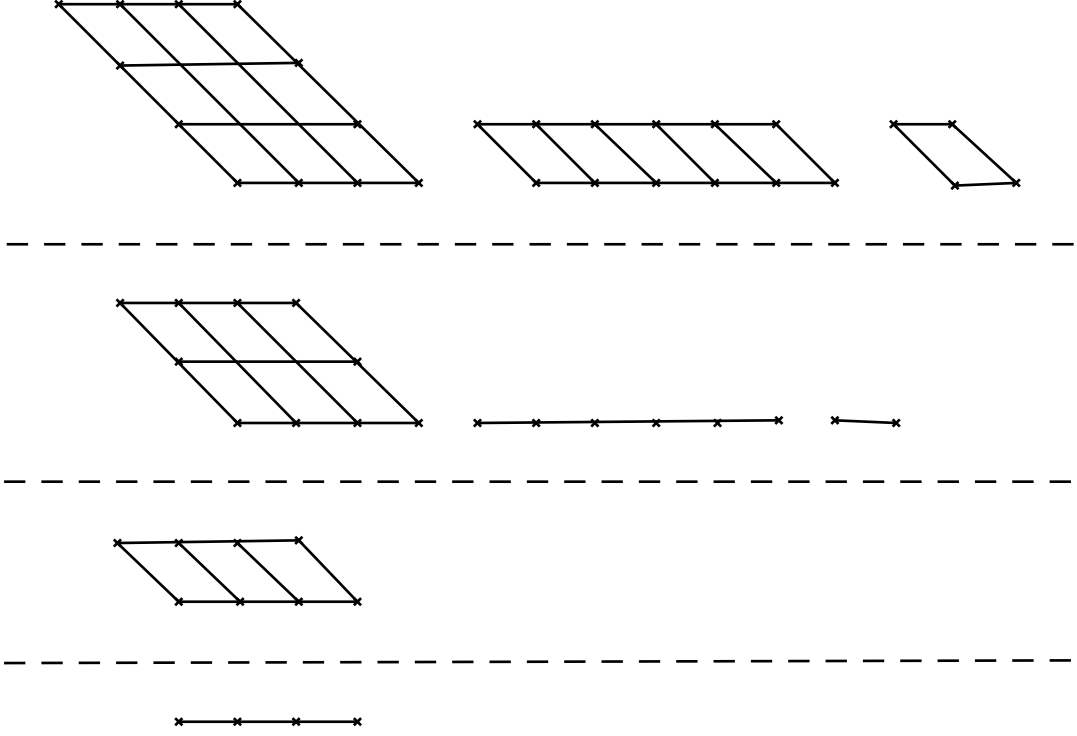


FIGURE 9. Dérivées successives

**4.4.4. Proposition.** — L'égalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) r_l \left( t_{r, 0}^{r, s}(\Pi) \right) = \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(r, s)} mk_{G, \xi}(\Pi'^{\infty, v}) r_l \left( t_{r, 0}^{r, s}(\Pi') \right).$$

*Démonstration.* — Soit donc  $\varrho^\infty$  un sous-quotient irréductible de la réduction modulo  $l$  de  $t_{r, 0}^{r, s}(\Pi)$  pour  $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)$ . D'après (4.4.2), il existe alors  $s' \geq 1$  et  $\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(r, s')$  tel que  $\varrho^\infty$  est un sous-quotient de  $r_l \left( t_{r, 0}^{r, s'}(\Pi') \right)$ . Il s'agit donc de montrer que l'on peut choisir  $s' = s$ . On modifie  $\varrho^\infty$  en  $\tilde{\varrho}^\infty = \varrho^{\infty, w} \otimes \tilde{\varrho}_w$  où  $w$  est une place telle que  $\Pi$  est non ramifiée et on choisit  $\tilde{\varrho}_w$  non dégénérée. Toujours d'après (4.4.2), il existe  $\tilde{s}$  et  $\tilde{\Pi} \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(r, \tilde{s})$  tel que  $\tilde{\varrho}^\infty$  est un sous-quotient de  $r_l \left( t_{r, 0}^{r, \tilde{s}}(\tilde{\Pi}) \right)$ . D'après le lemme précédent on a alors  $\tilde{s} = s$

et comme en  $w$  tous les  $t_i$  et  $\tilde{t}_i$  sont égaux à 1, alors  $\varrho^\infty$  est aussi un sous-quotient de  $r_l\left(t_{r,0}^{r,\tilde{s}}(\tilde{\Pi})\right)$ , d'où le résultat.  $\square$

## 5. Augmentation de l'irréductibilité

On cherche désormais à construire des congruences entre représentations automorphes de façon à modifier « l'irréductibilité locale » du côté galoisien. Explicitons de quoi il s'agit : partant d'une représentation automorphe  $\Pi$  de  $G(\mathbb{A})$  irréductible et  $\xi$ -cohomologique, dont on note  $\sigma(\Pi)$  la représentation galicienne associée par la correspondance de Langlands globale. La représentation locale  $\sigma(\Pi_v)$  est une somme directe de représentations indécomposables. On cherche alors à montrer l'existence d'une représentation automorphe  $\Pi'$  de  $G(\mathbb{A})$  irréductible et  $\xi$ -cohomologique telle que  $\Pi'$  et  $\Pi$  sont  $\lambda$ -congruentes pour  $\lambda$  une place de  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ , i.e.  $\sigma(\Pi)$  et  $\sigma(\Pi')$  sont  $\lambda$ -congruentes et que  $\sigma(\Pi'_v)$  est plus irréductible que  $\sigma(\Pi_v)$  au sens où certains des facteurs indécomposables (reps. semi-simples) de  $\sigma(\Pi_v)$  sont congrus modulo  $\lambda$  à des facteurs irréductibles (resp. indécomposables) de  $\sigma(\Pi'_v)$ .

**5.1. locale : changement de cuspidalité.** — Rappelons les notations de 1.2.3 :

- $\varrho_{-1}$  est une  $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation supercuspidale de  $GL_{g-1}(F_v)$  ;
- pour  $u \geq -1$  (resp.  $u' \geq u$ ), on choisit  $\pi_{v,u}$  (resp.  $\pi_{v,u'}$ ) une  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  (resp.  $GL_{g'}(F_v)$ ) telle que, avec les notations de 1.2.3, on ait  $r_l(\pi_{v,u}) = \varrho_u$  (resp.  $r_l(\pi_{v,u'}) = \varrho_{u'}$ ). En particulier on a  $g = g_u = g_{-1}m(\varrho)l^u$  (resp.  $g' = g_{u'} = g_{-1}m(\varrho)l^{u'}$ ).

*Remarque :* dans la suite on écrira  $l^{u'-u}$  alors que pour  $u = -1$  on devrait écrire  $m(\varrho)l^{u'}$  ; on espère gagner en clarté ce que l'on perdra en rigueur.

D'après 1.2.2,  $\varrho_{u'}$  est un sous-quotient irréductible de la réduction modulo  $l$  de  $\text{St}_{l^{u'-u}}(\pi_{v,u})$  et de  $\pi_{v,u'}$  ; on cherche alors à construire des congruences fortes ou faibles entre des représentations automorphes irréductibles  $\Pi$  et  $\Pi'$  de  $G(\mathbb{A})$ ,  $\xi$ -cohomologique avec  $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_{v,u}}(s,t)$  et  $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_{v,u'}}(s',t')$ .

**5.2. La formule fondamentale.** — Avec les notations précédentes, on choisit  $r$  et  $r'$  tels que  $rg_u = r'g_{u'}$  de sorte que d'après 1.3.3, on a

$$l^{u'-u} \left[ \mathbb{F}\mathcal{F}_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}(r, \pi_{v,u}) \right] = \left[ \mathbb{F}\mathcal{F}_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}(r', \pi_{v,u'}) \right]. \quad (5.2.1)$$

En revanche comme dans notre situation  ${}^p j_{l*}$  ne commute pas avec  $\mathbb{F}$ , cf. [4] §5, nous allons utiliser le foncteur  $j_l$  et donc l'égalité

$$\begin{aligned} l^{u'-u} \mathbb{F} j_l^{\geq rg} \mathbb{F}\mathcal{F}_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}(r, \pi_{v,u}) &= l^{u'-u} j_l^{\geq rg} \left[ \mathbb{F}\mathcal{F}_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}(r, \pi_{v,u}) \right] \\ &= j_l^{\geq r'g'} \left[ \mathbb{F}\mathcal{F}_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}(r', \pi_{v,u'}) \right] = \mathbb{F} j_l^{\geq r'g'} \mathcal{F}_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}(r', \pi_{v,u'}). \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

**5.2.3. Proposition.** — *Avec les notations précédentes, on a l'égalité*

$$\begin{aligned}
& l^{u'-u} r_l \left( \sum_i (-1)^i \sum_{\substack{(s,t) \\ n_{s,t}(r,i)=1}} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s+t-1, s)} \right. \\
& \quad \left. mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) S_{\pi_{v,u}}(s, t)(r, i)(\Pi_v) \otimes \left( \Pi_{p,0}(\text{Art}_{F_v}^{-1}) \otimes \Xi^{\frac{2i+r-s-t+1}{2}} \right) \right) \\
& \quad = \\
& \quad r_l \left( \sum_i (-1)^i \sum_{\substack{(s',t') \\ n_{s',t'}(r',i)=1}} \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(s'+t'-1, s')} \right. \\
& \quad \left. mk_{G, \xi}(\Pi'^{\infty, v}) S_{\pi_{v,u'}}(s', t')(r', i)(\Pi'_v) \otimes \left( \Pi'_{p,0}(\text{Art}_{F_v}^{-1}) \otimes \Xi^{\frac{2i+r-s-t+1}{2}} \right) \right).
\end{aligned}$$

*Démonstration.* — Le résultat découle de la description explicite du corollaire 3.3.4 et du lemme 4.3.3.  $\square$

*Remarque :* en écrivant l'égalité précédente qu'avec des signes positifs, on voit qu'à un sous-quotient d'un  $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s, t)$  correspond un sous-quotient d'un  $\Pi'$

- (i) soit de  $\mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(s', t')$  pour un couple  $(s', t')$  à déterminer
- (ii) soit de  $\mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s', t')$ , et dans ce cas on n'est pas parvenu à changer de cuspidale.

Comme dans la situation du §4.2 où l'on considérait  $\pi_v$  et  $\pi'_v$  de même réduction modulo  $l$ , on s'intéresse aux « parties primitives » avec donc  $i = 0$ . Dans ce cas si  $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s, t)$  était associé un élément de  $\mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s_1, t_1)$  avec  $s_1 + t_1 > s + t$  comme dans le cas (ii) ci dessus, en raisonnant par récurrence on lui associe alors une représentation  $\mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(s', t')$  comme dans le cas (i) ci dessus ; autrement dit on parvient toujours à changer de cuspidale. En revanche comme les chemins suivis par les parties primitives de la cohomologie ne coïncident pas pour  $\pi_{v,u}$  et  $\pi_{v,u'}$  et il n'est pas possible de faire une récurrence pour séparer les différents constituants. Il faut alors utiliser soit des arguments de poids soit de théorie des représentations. Dans les paragraphes suivants nous allons étudier les situations les plus simples de cette égalité.

### 5.3. Le cas tempéré. —

**5.3.1. Proposition.** — *Soit  $\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(t', 1)$  une représentation irréductible automorphe et donc tempérée. Il existe alors une représentation irréductible automorphe  $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(t, 1)$  et donc tempérée avec  $tg = t'g'$ , qui est fortement congruente avec  $\Pi'$ .*

*Démonstration.* — La réduction modulo  $l$  de  $\Pi'$  contient un constituant irréductible dont toutes les composantes locales sont non dégénérées, notons le  $\tau$ . D'après 4.3.5,  $\tau$  n'est alors jamais un constituant de la réduction modulo  $l$  d'un  $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(r, s)$  dès que  $s > 1$  et

ce quelque soit  $\pi'_v$  et  $r$ . L'existence d'un  $\Pi$  découle de l'égalité de la proposition 5.2.3 en prenant  $r' = t'$ .

En ce qui concerne le fait que la congruence soit forte, notons que pour toutes les places sauf un nombre fini, les composantes locales de  $\Pi$  et  $\Pi'$  sont des représentations non ramifiées de  $GL_d$  dont la réduction modulo  $l$  contient la composante locale de  $\tau$  et ont donc le même support supercuspidale. Ainsi les composantes locales de  $\Pi$  et  $\Pi'$  sont de la forme  $\chi_1 \times \cdots \times \chi_d$  et  $\chi'_1 \times \cdots \times \chi'_d$  où  $r_l(\chi_i) = r_l(\chi'_i)$  pour  $i = 1, \dots, d$ ; on en déduit donc que la réduction modulo  $l$  de ces composantes locales sont égales, d'où le résultat annoncé.  $\square$

On peut aussi formaliser le résultat précédent sous la forme suivante.

**5.3.2. Corollaire.** — Soit  $\tau$  une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible sous-quotient de la réduction modulo  $l$  d'une représentation autotrophe  $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(t, 1)$ . Il existe alors une représentation  $\tau'$  sous-quotient irréductible de la réduction modulo de  $\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(t', 1)$  et un ensemble fini  $S$  de places finies de  $F$  tel que  $\tau^S \simeq (\tau')^S$ .

**5.4. Augmentation de l'irréductibilité globale.** — Dans le cas où les faisceaux pervers dont la cohomologie donne l'égalité de 5.2.3, sont à support dans les points supersinguliers, i.e.  $rg_u = r'g_{u'} = d$ , cette égalité s'écrit comme suit.

**5.4.1. Corollaire.** — Pour  $(r, r') = (s, s')$  tels que  $sg_u = s'g_{u'} = d$ , l'égalité de 5.2.3 s'écrit

$$\begin{aligned} l^{u'-u} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s,1) \cup \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s,s)} mk_{G,\xi}(\Pi^{\infty,v}) r_l(\Pi^{\infty,v}) \\ = \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(s',1) \cup \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(s',s')} mk_{G,\xi}(\Pi'^{\infty,v}) r_l(\Pi'^{\infty,v}). \end{aligned}$$

*Remarque :* l'égalité est aussi valable dans le cas  $d < (s+1)g$ .

**5.4.2. Corollaire.** — Supposons que dans le corollaire précédent on ait  $s' = 1$  et soit  $\tau$  un sous-quotient irréductible de  $r_l(\Pi)$  où  $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s, s)$ . Il existe alors une représentation irréductible  $\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(1, 1)$  dont la réduction modulo  $l$  contient  $\tau$ .

*Remarque :* en une place  $w$  où  $\Pi$  et  $\Pi'$  sont non ramifiées,  $r_l(\Pi'_w)$  contient une représentation non dégénérée alors que  $rl(\Pi_w)$  n'en contient pas. Ainsi  $\Pi$  et  $\Pi'$  sont congruentes sans être fortement congruentes.

*Remarque :* le théorème 2 de [11] établit des congruences entre une représentation  $\Pi$  non ramifiée en  $v$  telle que  $r_l(\Pi_v) = 1_v$  et des représentations  $\Pi'$  ramifiées en  $v$ , par exemple une Steinberg. Le corollaire précédent pour  $g = 1$  et  $\pi_{v,u} = 1_v$  construit une telle congruence sauf que nécessairement dans notre situation, la représentation  $\Pi$  est un caractère. Notre

technique ne permet pas passer d'un  $\Pi_v \simeq \chi_1 \times \chi_2$  à une Steinberg ; en revanche elle sait traiter d'autres cas que celui de  $r_l(\Pi_v) = 1_v$ .

*Remarque :* on peut voir le corollaire précédent comme *une augmentation de l'irréductibilité globale* du côté galoisien puisque, via la correspondance de Langlands globale, à  $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s, s)$  correspond une somme directe de caractères et à  $\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(1, 1)$  tel qu'en une place  $w$  quelconque  $\Pi'_w$  est cuspidale, correspond une représentation galoisienne irréductible. De ce point de vue l'égalité de la proposition 5.2.3 peut sûrement fournir d'autres résultats intéressants. Par exemple pour  $r = s - 1$  et  $r' = s'$ , elle s'écrit :

$$\begin{aligned} & l^{u'-u} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s, 1)} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) r_l(\Pi^{\infty, v} \otimes \tilde{\pi}_{v,u} \left\{ \frac{1-s}{2} \right\}) \\ & + l^{u'-u} \sum_{\pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s-1, s-1)} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) r_l(\Pi^{\infty, v} \otimes S_{\pi_{v,u}}(s-1, s-1)(s-1, 0)(\Pi_v)) \\ & + l^{u'-u} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s-1, 1)} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) r_l(\Pi^{\infty, v} \otimes S_{\pi_{v,u}}(s-1, s-1)(s-1, 0)(\Pi_v)) \\ & = \\ & \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(s', 1)} mk_{G, \xi}(\Pi'^{\infty, v}) r_l(\Pi'^{\infty, v} \otimes S_{\pi_{v,u'}}(s', 1)(s', 0)(\Pi'^{\infty, v})) \\ & + \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(s', s')} mk_{G, \xi}(\Pi'^{\infty, v}) r_l(\Pi'^{\infty, v} \otimes S_{\pi_{v,u'}}(s', 1)(s', 0)(\Pi'^{\infty, v})) \\ & + l^{u'-u} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s, s)} mk_{G, \xi}(\Pi^{\infty, v}) r_l(\Pi^{\infty, v} \otimes \tilde{\pi}_{v,u} \left\{ \frac{s-1}{2} \right\}) \end{aligned}$$

Ainsi les sous-quotients de la réduction modulo  $l$  des représentations de  $\mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s, s)$  doivent aussi apparaître dans le membre de gauche de l'égalité précédente. En regardant en  $v$ , comme  $\pi_{v,u}$  est cuspidale il ne peut pas être un sous-quotient de la réduction modulo  $l$  d'une représentation de la forme  $\text{Speh}_{s-1}(\pi')$ . Ainsi on obtient des congruences automorphes entre les  $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s, s)$  et les  $\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s, 1) \cup \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s-1, 1)$  ce qui s'interprète à nouveau en termes *d'augmentation de l'irréductibilité globale* du côté galoisien

### 5.5. Torsion dans la cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor. —

Nous reprenons les notations précédentes avec  $u' > u = -1$ .

**5.5.1. Proposition.** — *Pour tout  $r' \geq 1$  tel que  $r'g_{u'} \leq d - g_{-1}$ , la cohomologie de  $j_!^{\geq r'g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r', \pi_{v,u'})$  et de  $j_*^{\geq r'g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r', \pi_{v,u'})$  a de la torsion.*

*Démonstration.* — Rappelons que pour un  $\mathbb{F}_q$ -schéma  $X$  quelconque et un  $\mathbb{Z}_l$ -faisceau pervers sans torsion  $\mathcal{P}$ , on a la suite exacte courte suivante

$$0 \rightarrow H^n(X, \mathcal{P}) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{F}_l \rightarrow H^n(X, \mathbb{F}\mathcal{P}) \rightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{P})[l] \rightarrow 0. \quad (5.5.2)$$

On note  $r$  tel que  $rg_{-1} = r'g_{u'}$  et soit  $s = \lfloor \frac{d}{g_{-1}} \rfloor$ . D'après le cas  $t = 1$  de la proposition 3.3.2, la partie libre de  $H^{s-r}(j_!^{\geq r'g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r, \pi_{v,-1})[d - rg_{-1}])$  est non nulle de sorte que d'après (5.2.1), la suite exacte (5.5.2) fournit

$$H^{s-r} \left( \mathbb{F} \left( j_!^{\geq r'g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r', \pi_{v,u'})[d - r'g_{u'}] \right) \right) \neq (0).$$

Or d'après 3.3.2, pour  $s' = \lfloor \frac{d}{g_{u'}} \rfloor$ , le quotient libre de  $H^i(j_!^{\geq r' g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_i}(r', \pi_{v, u'})[d - r' g_{u'}])$  est nul, dès que  $i > s' - r'$ . Or comme par hypothèse  $rg_{-1} + g_{-1} \leq d$ , on a  $s - r > s' - r'$  et donc d'après (5.5.2) la torsion de  $H^{s-r}(j_!^{\geq r' g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_i}(r', \pi_{v, u'})[d - r' g_{u'}])$  est non nulle. Par dualité, la torsion de  $H^{r-s+1}(j_*^{\geq r' g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_i}(r', \pi_{v, u'})[d - r' g_{u'}])$  est aussi non nulle.  $\square$

*Remarque* : le raisonnement précédent est valide à niveau fini et infini.

*Remarque* : en ce qui concerne les faisceaux pervers de Harris-Taylor, en étudiant la suite spectrale de cohomologie associée à la filtration de stratification de  $j_!^{\geq r' g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_i}(r', \pi_{v, u'})$ , on montre aisément qu'il existe  $\tilde{r}' \geq r'$  et un faisceau pervers  $\mathcal{P}$

$${}^p j_*^{\geq \tilde{r}' g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_i}(\tilde{r}', \pi_{v, u'}) \hookrightarrow \mathcal{P} \hookrightarrow {}^{p+} j_*^{\geq \tilde{r}' g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_i}(\tilde{r}', \pi_{v, u'}),$$

tel que la torsion de  $H^{s-r}(\mathcal{P})$  est non nulle. Nous reviendrons sur cette étude dans notre prochain travail en montrant que pour tout tel  $\mathcal{P}$ , il existe un  $i$  tel que son  $H^i$  a de la torsion.

## Références

- [1] J. Bellaïche. À propos d'un lemme de Ribet. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 109 :45–62, 2003.
- [2] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [3] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. *Compositio*, 146(2) :367–403, 2010.
- [4] P. Boyer. Filtrations de stratification de quelques variétés de Shimura simples. *soumis*, 2011.
- [5] P. Boyer. Réseaux d'induction des représentations elliptiques de Lubin-Tate. *Journal of Algebra*, 336 :28–52, 2011.
- [6] C. Bushnell and G. Henniart. A congruence property of the Langlands correspondence. *à paraître*, 2011.
- [7] J.-F. Dat. Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands locale modulo 1. *Proc. London Math. Soc.*, 2012.
- [8] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [9] D. Juteau. Modular Springer correspondence and decomposition matrices. *Thèse de l'Université Paris 7*, 2007.
- [10] Colette Moeglin and Jean-Loup Waldspurger. *Spectral decomposition and Eisenstein series. (Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein. Une paraphrase de l'écriture.)*. Progress in Mathematics (Boston, Mass.). 113. Basel : Birkhäuser Verlag. xxix, 341 p. DM 148.00 ; öS 1154.40 ; sFr. 128.00 , 1994.
- [11] C. M. Sorensen. A generalization of level-raising congruences for algebraic modular forms. *Ann. Inst. Fourier*, 56, no 6 :1735–1766, 2006.

- [12] M.-F. Vignéras. *Représentations  $l$ -modulaires d'un groupe réductif  $p$ -adique avec  $l \neq p$* , volume 137 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [13] M.-F. Vignéras. Induced  $R$ -representations of  $p$ -adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.
- [14] M.-F. Vignéras. Correspondance de Langlands semi-simple pour  $GL(n, F)$  modulo  $l \neq p$ . *Invent. Math.*, 144(1) :177–223, 2001.