BOYER Pascal

Maître de conférences à l'université Paris 6

Parcours universitaire

- **1990-1995** élève à l'ENS Ulm
- **1995-1999** Agrégé préparateur (caïman) à l'ENS Cachan
- **1998** Thèse *Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands* soutenue à Orsay sous la direction de M. Laumon Gérard
- **1999-2010** Maître de conférences à l'université de Paris 6
- **2008** Habilitation à diriger des recherches : *Cohomologie de la tour de Lubin-Tate et de quelques variétés de Shimura unitaires*

Membre de :

- ACI jeunes chercheurs *Réalisations géométriques des correspondances de Langlands* 2003-2007
- ANR (projet blanc) : *Méthodes géométriques et p-adiques en théorie des formes automorphes* 2006-2010

Enseignement

- M1 : TD de cryptographie (ECC, ECPP, ECM, algorithmes MOV, de Shanks-Mestre, de Schoof) ;
- L2 COURS d'arithmétique ;
- L3 : TD Algèbre : livre écrit avec J.-J. Risler *Algèbre pour la licence 3 : Groupes, anneaux, corps* chez Dunod ;
- M1 : TD théorie des groupes, théorie des nombres ;
- M2 TD du cours de M.-F. Vignéras sur les formes modulaires ;
- encadrement du mémoire de M2 de Joris Milliner et Pranav Haridas
- 2006-2009 préparation au concours de l'agrégation externe de mathématiques ;
  - 2001 : jury d'écrit et d'oral pour le capes externe de maths.
  - 2002-2005 jury d'écrit et d'oral pour l'agrégation externe de maths ;

Site personnel

- toutes mes feuilles de travaux dirigées avec leur correction,
- une page dédiée à l'agrégation avec des leçons types traitées longuement,
- un poly pour mon cours de L2,
- des documents divers notamment plusieurs polys sur des thèmes de géométrie à l'agrégation,
- un forum où les étudiants peuvent poser des questions, ou encore suivre à distance l'avancement des séances.

Présentation des thèmes de recherche

Soient p premier et K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$
Pour tout $d \geqslant 1$ et $l \neq p$, la correspondance de Langlands locale met en relation $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations irréductibles admissibles de $GL_d(K)$ et représentations continues de dimension d de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Présentation des thèmes de recherche

Soient p premier et K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$
Pour tout $d \geqslant 1$ et $l \neq p$, la correspondance de Langlands locale met en relation $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations irréductibles admissibles de $GL_d(K)$ et représentations continues de dimension d de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.
Elle a été prouvée par :

- 1993 Laumon, Rapoport et Stuhler pour $K = \mathbb{F}_q((T))$;
- 2001 Harris et Taylor (puis Henniart) pour K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

Stratégie de la preuve

Elle consiste à bien choisir

- une extension finie $F/\mathbb{Q}$ munie d'une place v telle que $F_v \simeq K$;
- un groupe $G/\mathbb{Q}$ tel que $G(F_v) \simeq GL_d(K)$,

et de considérer la cohomologie l-adique de la variété de Shimura associée à G laquelle est alors munie d'une action de $G(\mathbb{A}) \times \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ ce qui permet alors d'associer à une représentation irréductible Π de $G(\mathbb{A})$ une représentation $\sigma(\Pi)$ de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$.

L'espace de Lubin-Tate

Il s'agit d'un analogue local (sur K) de la variété de Shimura précédente : plus précisément une tour d'espaces analytiques sur K munie d'une action de $GL_d(K)$ et du groupe des inversibles $D_{K,d}^\times$ de l'algèbre à division centrale sur K et d'invariant $1/d$.

L'espace de Lubin-Tate

Il s'agit d'un analogue local (sur K) de la variété de Shimura précédente : plus précisément une tour d'espaces analytiques sur K munie d'une action de $GL_d(K)$ et du groupe des inversibles $D_{K,d}^\times$ de l'algèbre à division centrale sur K et d'invariant $1/d$.
Leurs groupes de cohomologie l-adique

$$\mathcal{U}_{K,d}^i \qquad 0 \leqslant i \leqslant d-1$$

fournissent alors des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations de

$$GL_d(K) \times D_{K,d}^\times \times \mathrm{Gal}(\overline{K}/K).$$

Conjecture de Deligne-Carayol

Conjecture (1990)

Soit π une représentation irréductible cuspidale de $GL_d(K)$, alors

$$\mathcal{U}^i_{K,l,d}[LJ(\pi)] \simeq \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq d-1 \\ \pi \otimes r_l(\pi) \text{ pour } i = d-1 \end{cases}$$

où :

- LJ est la correspondance de Jacquet-Langlands ;
- $\pi \mapsto r_l(\pi)(\frac{d-1}{2})$ est la correspondance de Langlands locale.

Conjecture de Deligne-Carayol

Conjecture (1990)

Soit π une représentation irréductible cuspidale de $GL_d(K)$, alors

$$\mathcal{U}^i_{K,l,d}[LJ(\pi)] \simeq \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq d-1 \\ \pi \otimes r_l(\pi) \text{ pour } i = d-1 \end{cases}$$

où :

- LJ est la correspondance de Jacquet-Langlands ;
- $\pi \mapsto r_l(\pi)(\frac{d-1}{2})$ est la correspondance de Langlands locale.

- Boyer P. en 1998 pour $K = \mathbb{F}_{p^r}((T))$;
- Harris-Taylor en 2001 pour $K/\mathbb{Q}_p$ finie.

Questions posées par Harris : ICM 2002

- Déterminer chacun des $\mathcal{U}^i_{K,l,d}$ et non plus seulement leur somme alternée ; conjecture de Harris (1995)

Questions posées par Harris : ICM 2002

- Déterminer chacun des $\mathcal{U}^i_{K,l,d}$ et non plus seulement leur somme alternée ; conjecture de Harris (1995)
- Quel est l'action de l'opérateur de monodromie N sur la cohomologie de la variété de Shimura ?

Questions posées par Harris : ICM 2002

- Déterminer chacun des $\mathcal{U}^i_{K,I,d}$ et non plus seulement leur somme alternée ; conjecture de Harris (1995)
- Quel est l'action de l'opérateur de monodromie N sur la cohomologie de la variété de Shimura ?
- La conjecture de monodromie-poids est-elle vérifiée dans ce contexte ?

Questions posées par Harris : ICM 2002

- Déterminer chacun des $\mathcal{U}^i_{K,l,d}$ et non plus seulement leur somme alternée ; conjecture de Harris (1995)
- Quel est l'action de l'opérateur de monodromie N sur la cohomologie de la variété de Shimura ?
- La conjecture de monodromie-poids est-elle vérifiée dans ce contexte ?
- La version entière sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$ des $\mathcal{U}^i_{K,l,d}$ est-elle sans torsion ?

Questions posées par Harris : ICM 2002

- Déterminer chacun des $\mathcal{U}^i_{K,l,d}$ et non plus seulement leur somme alternée ; conjecture de Harris (1995)
- Quel est l'action de l'opérateur de monodromie N sur la cohomologie de la variété de Shimura ?
- La conjecture de monodromie-poids est-elle vérifiée dans ce contexte ?
- La version entière sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$ des $\mathcal{U}^i_{K,l,d}$ est-elle sans torsion ?
- Peut-on incarner géométriquement la correspondance de Langlands modulo l de Vignéras ?

Description explicite du complexe des cycles évanescents

Sur les faisceaux des cycles évanescents :

- on sait, d'après les résultats généraux de Berkovich, relier leurs germes en tout point géométrique aux $\mathcal{U}^i_{K,h}$;
- Harris et Taylor ont décrit leur restriction à toute strate de Newton.

Description explicite du complexe des cycles évanescents

Sur les faisceaux des cycles évanescents :

- on sait, d'après les résultats généraux de Berkovich, relier leurs germes en tout point géométrique aux $\mathcal{U}^i_{K,h}$;
- Harris et Taylor ont décrit leur restriction à toute strate de Newton.

En utilisant la théorie des faisceaux pervers, on peut alors reconstruire complètement le complexe des cycles évanescents et décrire l'action de la monodromie.

Conjecture de monodromie-poids faisceautique

Théorème (Boyer 05)

On a un isomorphisme de W_v-faisceaux pervers de Hecke

$$gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\pi_v}) = \begin{cases} \mathcal{P}(p+q+1,\pi_v)(-\frac{p-q}{2}) \text{ si } p,q \geqslant 0 \text{ et } p+q+1 \leqslant \lfloor \frac{d}{g} \rfloor \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

où les $\mathcal{P}(t,\pi_v)$ sont les faisceaux pervers de Harris-Taylor

Conjecture de monodromie-poids faisceautique

Théorème (Boyer 05)

On a un isomorphisme de W_v-faisceaux pervers de Hecke

$$gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\pi_v}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(p+q+1,\pi_v)(-\frac{p-q}{2}) \text{ si } p,q \geqslant 0 \text{ et } p+q+1 \leqslant \lfloor \frac{d}{g} \rfloor \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

où les $\mathcal{P}(t,\pi_v)$ sont les faisceaux pervers de Harris-Taylor

Théorème (Boyer 05)

La conjecture d'Harris est vraie ($\mathcal{U}^i_{K,d} = \cdots$).

Conjecture de monodromie-poids faisceautique

Théorème (Boyer 05)

On a un isomorphisme de W_v-faisceaux pervers de Hecke

$$gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\pi_v}) = \begin{cases} \mathcal{P}(p+q+1,\pi_v)(-\frac{p-q}{2}) \text{ si } p,q \geqslant 0 \text{ et } p+q+1 \leqslant \lfloor \frac{d}{g} \rfloor \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

où les $\mathcal{P}(t,\pi_v)$ sont les faisceaux pervers de Harris-Taylor

Théorème (Boyer 05)

La conjecture d'Harris est vraie ($\mathcal{U}^i_{K,d} = \cdots$).

Dat J.-F. : a remis de la monodromie dans le local (07)

Conjecture de monodromie-poids cohomologique

Théorème (Boyer 06)

La cohomologie de la variété de Shimura est pure.

Ce qui fournit une famille de variétés de Shimura vérifiant la conjecture de monodromie-poids.

Constituants de la réduction modulo l des représentations de Steinberg généralisées

Théorème (Boyer 08)

Ces sous-quotients irréductibles sont indexés par un ensemble explicite de niveau de cuspidalité et décrits explicitement à l'aide de l'involution de Zelevinsky-Vignéras.

Constituants de la réduction modulo l des représentations de Steinberg généralisées

Théorème (Boyer 08)

Ces sous-quotients irréductibles sont indexés par un ensemble explicite de niveau de cuspidalité et décrits explicitement à l'aide de l'involution de Zelevinsky-Vignéras.

On construit par récurrence à l'aide de l'induction parabolique des réseaux stables de $LT_t(\pi, s)$; on en décrit alors une filtration de leur réduction modulo l, filtration qui intervient dans la description de la l-torsion des $p+$ complexes d'intersection des systèmes locaux d'Harris-Taylor.

Torsion dans la cohomologie du modèle local

Théorème (Boyer 10)

Pour tout $0 \leqslant i \leqslant d-1$, $\mathcal{U}^i_{K,\overline{\mathbb{Z}}_l,d}$ est sans torsion.

Torsion dans la cohomologie du modèle local

Théorème (Boyer 10)

Pour tout $0 \leqslant i \leqslant d-1$, $\mathcal{U}^i_{K,\overline{\mathbb{Z}}_l,d}$ est sans torsion.

Théorème (Boyer 11)

Pour $l \neq 2$, la cohomologie entière des variétés de Hecke-Shimura simples unitaires est sans torsion.

Perspectives

- Contrôler le niveau où la torsion disparaît ;
- Le lemme d'Ihara ;
- généraliser (monodromie-poids, étude de la torsion) à d'autres variétés de Shimura (notamment le cas hermitien où les variétés ne sont plus compacts : application aux conjectures de Gross-Prasad et à la construction de systèmes eulériens).
- Peut-on incarner géométriquement la correspondance de Langlands modulo l de Vignéras ?

Articles

- P. Boyer *Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale*, **Invent. Math.** 1999, vol. 138 pp. 573-629
- P. Boyer *Faisceaux pervers des cycles évanescents des variétés de Drinfeld et groupes de cohomologies du modèle de Deligne-Carayol*, **Mémoires de la SMF**, 2009 vol 116, 161 pages
- P.Boyer *Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples et applications*, **Invent. Math.** 2009, vol. 177 pp. 239-280
- P. Boyer *Conjecture de monodromie-poids pour quelques variétés de Shimura unitaires*, **Compositio** 2010, vol. 146, pp. 367-403
- P. Boyer *Réseaux d'induction des représentations elliptiques de Lubin-Tate*, soumis 21 pages

Preprints

- P. Boyer *La cohomologie entière du modèle de Deligne-Carayol est sans torsion* 2010
- P. Boyer *La cohomologie entière des variétés de Hecke-Shimura simples unitaires est sans torsion* en préparation