

Dualité sur un corps local de caractéristique positive à corps résiduel algébriquement clos

Cédric Pépin

Soit K un corps discrètement valué complet à corps résiduel k de caractéristique $p > 0$. On dispose d'une théorie de dualité pour la cohomologie des K -schémas en groupes commutatifs finis dans les cas suivants : K est de caractéristique 0 et k fini (Tate [Ta]), K est de caractéristique p et k fini (Shatz [Sh]), K est de caractéristique 0 et k algébriquement clos (Bégueri [Beg]). On présente ici le cas où K est de caractéristique p et k algébriquement clos ; il s'agit d'un résumé du texte détaillé [P]. Une approche indépendante a été donnée récemment par Suzuki [Su] 2.7.6 (1) (a).

Mots-clés : corps local, dualité, schémas en groupes finis, groupes quasi-algébriques, modèles de Néron

DUALITY OVER A LOCAL FIELD OF POSITIVE CHARACTERISTIC WITH ALGEBRAICALLY CLOSED RESIDUE FIELD

Let K be a complete discretely valued field with residue field k of characteristic $p > 0$. There exists a duality theory for the cohomology of finite commutative K -group schemes in the following cases : K has characteristic 0 and k is finite (Tate [Ta]), K has characteristic p and k is finite (Shatz [Sh]), K has characteristic 0 and k is algebraically closed (Bégueri [Beg]). Here we present the case where K has characteristic p and k is algebraically closed ; this is a summary of the detailed text [P]. An independent approach has been given recently by Suzuki [Su] 2.7.6 (1) (a).

Key-words : local field, duality, finite group schemes, quasi-algebraic groups, Néron models

Dans la suite, K est de caractéristique p et k algébriquement clos. Tous les groupes considérés sont supposés commutatifs.

1 La catégorie des groupes \mathcal{Q} -admissibles sur k

1.1 Groupes indproalgébriques sur k

On note respectivement \mathcal{Q} et \mathcal{P} les catégories abéliennes des groupes quasi-algébriques sur k et proalgébriques sur k de Serre [Se].

1.1.1. Définition. *Un groupe indproalgébrique est un groupe G muni d'une famille non vide S de sous-groupes et, pour tout $H \in S$, d'une structure de groupe proalgébrique sur H , ces données vérifiant les axiomes suivants :*

- (IP-1) $H, H' \in S \Rightarrow \exists H'' \in S : H + H' \subset H''$.
- (IP-2) Si $H \in S$, les sous-groupes H' contenus dans H qui appartiennent à S sont les sous-groupes fermés de H (au sens de [Se] §2.4 Proposition 3).
- (IP-3) L'application canonique $\varinjlim_{H \in S} H \rightarrow G$ est un isomorphisme de groupes.

L'ensemble S est l'ensemble complet de définition du groupe indproalgébrique (G, S) , et les sous-groupes $H \in S$ sont les sous-groupes de définition de (G, S) .

Un morphisme de groupes indproalgébriques $(G_1, S_1) \rightarrow (G_2, S_2)$ est un morphisme de groupes $f : G_1 \rightarrow G_2$ vérifiant la condition suivante : pour tout $H_1 \in S_1$, on a $f(H_1) \in S_2$, et l'application $H_1 \rightarrow f(H_1)$ induite par f est un morphisme de groupes proalgébriques.

1.1.2. On note \mathcal{IP} la catégorie des groupes indproalgébriques. Elle est naturellement équivalente à une sous-catégorie épaisse de la catégorie abélienne $\text{Ind}(\mathcal{P})$, et se trouve ainsi munie d'une structure de catégorie exacte. On notera $\mathcal{I}(\mathcal{P}^{\pi_0\text{-f}})$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{IP} dont les objets sont les $(G, S) \in \mathcal{IP}$ tels que l'ensemble

$$\{H \in S \mid \pi_0(H) \text{ est fini} \}$$

soit cofinal dans S . Si (G, S) est un objet de $\mathcal{I}(\mathcal{P}^{\pi_0\text{-f}})$, le système inductif $(\pi_0(H))_{H \in S}$ se trouve dans l'image essentielle de $\mathcal{IP} \rightarrow \text{Ind}(\mathcal{P})$, et définit donc un objet $\pi_0(G, S)$ de \mathcal{IP} , le groupe des composantes connexes de (G, S) . Le sous-groupe de (G, S) engendré par les $H \in S$ connexes est alors un sous-groupe strict $(G, S)^0$ de (G, S) , noyau de la projection canonique $(G, S) \rightarrow \pi_0(G, S)$, qu'on appellera la *composante neutre* de (G, S) .

1.1.3. Définition. Soit \mathcal{T} la catégorie des extensions de corps algébriquement closes de k . La fibre générique d'un groupe indproalgébrique (G, S) est le foncteur

$$\begin{aligned} (G, S)_\eta : \mathcal{T} &\longrightarrow (\text{Groupes}) \\ \kappa/k &\longmapsto \varinjlim_{H \in S} H(\kappa). \end{aligned}$$

1.1.4. Proposition. Le foncteur fibre générique restreint à $\mathcal{I}(\mathcal{P}^{\pi_0\text{-f}})$

$$(\cdot)_\eta : \mathcal{I}(\mathcal{P}^{\pi_0\text{-f}}) \longrightarrow \widehat{\mathcal{T}}$$

est pleinement fidèle.

1.2 Groupes \mathcal{Q} -admissibles sur k

1.2.1. Définition. Un groupe \mathcal{Q} -admissible est un groupe G muni d'une famille non vide S de sous-groupes et, pour tous $H, H' \in S$ avec $H \subset H'$, d'une structure de groupe quasi-algébrique sur H'/H , ces données vérifiant les axiomes suivants :

- (\mathcal{Q} -ad-1) $H, H' \in S \Rightarrow \exists H^+ \in S : H + H' \subset H^+$ et $\exists H_- \in S : H_- \subset H \cap H'$.
- (\mathcal{Q} -ad-2) Si $H, H' \in S$ avec $H \subset H'$, alors les images réciproques des sous-groupes fermés de H'/H appartiennent à S .
- (\mathcal{Q} -ad-3) Si $H_-, H, H^+ \in S$ avec $H_- \subset H \subset H^+$, alors les applications canoniques $H/H_- \rightarrow H^+/H_-$ et $H^+/H_- \rightarrow H^+/H$ sont des morphismes de groupes quasi-algébriques.
- (\mathcal{Q} -ad-4) Pour tout $H \in S$, les applications canoniques $\varinjlim_{H \subset H^+ \in S} H^+/H \rightarrow G/H$ et $H \rightarrow \varprojlim_{S \ni H_- \subset H} H/H_-$ sont des isomorphismes de groupes.

L'ensemble S est l'ensemble complet des origines du groupe \mathcal{Q} -admissible (G, S) , et les sous-groupes $H \in S$ sont les origines de (G, S) .

Un morphisme de groupes \mathcal{Q} -admissibles $(G_1, S_1) \rightarrow (G_2, S_2)$ est un morphisme de groupes $f : G_1 \rightarrow G_2$ vérifiant les conditions suivantes :

- ($\text{Hom-}\mathcal{Q}$ -ad-1) Pour tout $H_1 \in S_1$, il existe $H_2 \in S_2$ contenant $f(H_1)$ tel que pour tout $H_{2-} \in S_2$ inclus dans H_2 , $f^{-1}(H_{2-}) \cap H_1 \in S_1$ et l'application $H_1/f^{-1}(H_{2-}) \cap H_1 \rightarrow H_2/H_{2-}$ induite par f est quasi-algébrique.
- ($\text{Hom-}\mathcal{Q}$ -ad-2) Pour tout $H_2 \in S_2$, il existe $H_1 \in S_1$ inclus dans $f^{-1}(H_2)$ tel que pour tout $H_{1+} \in S_1$ contenant H_1 , $f(H_{1+}) + H_2 \in S_2$ et l'application $H_{1+}/H_1 \rightarrow f(H_{1+}) + H_2/H_2$ induite par f est quasi-algébrique.

1.2.2. On montre que les conditions ($\text{Hom-}\mathcal{Q}$ -ad-1) et ($\text{Hom-}\mathcal{Q}$ -ad-2) sont en fait équivalentes. On note $\overrightarrow{\mathcal{Q}}$ la catégorie des groupes \mathcal{Q} -admissibles. Le plongement naturel de $\overrightarrow{\mathcal{Q}}$ dans \mathcal{IP} munit $\overrightarrow{\mathcal{Q}}$ d'une structure de catégorie exacte.

1.3 Unipotents strictement connexes et dualité de Serre

1.3.1. Définition.

- La catégorie des groupes \mathcal{Q} -admissibles unipotents est la sous-catégorie pleine $\overrightarrow{\mathcal{U}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{Q}}$ dont les objets sont les $(G, S) \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}$ tels que pour tous $H \subset H' \in S$, le groupe quasi-algébrique H'/H est unipotent.
- La catégorie des groupes \mathcal{Q} -admissibles strictement connexes est la sous-catégorie pleine $\overrightarrow{\mathcal{Q}}^{00}$ de $\overrightarrow{\mathcal{Q}}$ dont les objets sont les $(G, S) \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}$ tels qu'il existe $S' \subset S$ coinitial et cofinal avec H^+/H_- connexe pour tous $H_- \subset H^+ \in S'$.
- La catégorie des groupes \mathcal{Q} -admissibles unipotents strictement connexes est la catégorie $\overrightarrow{\mathcal{U}}^{00} := \overrightarrow{\mathcal{U}} \cap \overrightarrow{\mathcal{Q}}^{00}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera avec un (n) les sous-catégories pleines des objets annulés par p^n .

1.3.2. Proposition. *Il existe un unique foncteur dualité de Serre $(\cdot)^{\vee_S} : (\overrightarrow{\mathcal{U}}^{00}(n))^{\circ} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{U}}^{00}(n)$ de fibre générique*

$$\begin{aligned} (\cdot)_n \circ (\cdot)^{\vee_S} : (\overrightarrow{\mathcal{U}}^{00}(n))^{\circ} &\longrightarrow \widehat{\mathcal{T}} \\ (G, S) &\longmapsto \kappa/k \mapsto \text{Ext}_{\overrightarrow{\mathcal{U}}(n), \kappa}^1((G, S)_{\kappa}, \mathbb{Z}/p^n). \end{aligned}$$

Il est exact et involutif.

2 Admissibilité de la cohomologie fppf

2.1. Théorème. *Soit G_K un K -schéma en groupes fini. Il existe un unique $\mathcal{H}^0(G_K) \in \mathcal{Q}$ fini de fibre générique*

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &\longrightarrow (\text{Groupes}) \\ \kappa/k &\longmapsto H^0(K \widehat{\otimes}_k \kappa, G_K). \end{aligned}$$

Il existe un unique $\mathcal{H}^1(G_K) \in \mathcal{I}(\mathcal{P}^{\pi_0\text{-f}})$ de fibre générique

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &\longrightarrow (\text{Groupes}) \\ \kappa/k &\longmapsto H^1(K \widehat{\otimes}_k \kappa, G_K). \end{aligned}$$

Sa composante neutre est un groupe \mathcal{Q} -admissible unipotent strictement connexe, et son π_0 est un groupe fini. On a $\mathcal{H}^i(K, G_K) = 0$ pour tout $i \geq 2$.

Si $0 \rightarrow G'_K \rightarrow G_K \rightarrow G''_K \rightarrow 0$ est une suite exacte de K -schémas en groupes finis, il existe une unique suite exacte de $\overrightarrow{\mathcal{Q}}$

$$0 \rightarrow \mathcal{H}^0(G'_K) \rightarrow \mathcal{H}^0(G_K) \rightarrow \mathcal{H}^0(G''_K) \rightarrow \mathcal{H}^1(G'_K) \rightarrow \mathcal{H}^1(G_K) \rightarrow \mathcal{H}^1(G''_K) \rightarrow 0$$

ayant pour fibre générique la famille indexée par les κ/k des suites exactes longues de cohomologie.

On peut préciser la nature de $\mathcal{H}^1(G_K)$ dans certains cas : si G_K est d'ordre premier à p , $\mathcal{H}^1(G_K)$ est fini ; si G_K est unipotent, $\mathcal{H}^1(G_K)$ est connexe ; si G_K est de type multiplicatif, $\mathcal{H}^1(G_K)$ est proalgébrique ; si G_K est étale, $\mathcal{H}^1(G_K)$ est indalgébrique ; si G_K est biradiciel, $\mathcal{H}^1(G_K)$ n'est ni proalgébrique ni indalgébrique.

La construction de $\mathcal{H}^1(G_K)$ repose sur une extension de la théorie des modèles de Néron des groupes algébriques lisses sur K à ceux dont la partie unipotente n'est pas totalement ployée :

2.2. Théorème. *Soit K un corps discrètement valué complet à corps résiduel algébriquement clos. Soit L_K un K -schéma en groupes lisse de type fini. Alors il existe un ind-objet $(L_i)_{i \in \mathbb{I}}$ de la catégorie des R -schémas en groupes de fibre générique L_K ayant les propriétés suivantes :*

1. Pour tout $i \in I$, L_i est lisse et séparé sur R .
2. Pour tout $i \in I$, le groupe des composantes connexes de la fibre spéciale de L_i est de type fini.
3. Pour tout R -schéma lisse de type fini X , tout morphisme de K -schémas $X \otimes_R K \rightarrow L_K$ se prolonge de manière unique en un morphisme de ind-objets de la catégorie des R -schémas $X \rightarrow (L_i)_{i \in I}$.
4. Pour tout K -schéma en groupes lisse de type fini L'_K , et pour tout ind-objet $(L'_{i'})_{i' \in I'}$ de la catégorie des R -schémas en groupes de fibre générique L'_K ayant les propriétés 1. et 2., tout morphisme de K -schéma en groupes $L'_K \rightarrow L_K$ se prolonge de manière unique en un morphisme de ind-objets de la catégorie des R -schémas en groupes $(L'_{i'})_{i' \in I'} \rightarrow (L_i)_{i \in I}$.

Construction de $\mathcal{H}^1(G_K)$. Soit $L_K \rightarrow M_K$ une isogénie de K -schémas en groupes lisses connexes telle que $H^1(K \widehat{\otimes}_k \kappa, G_K) = 0$ pour toute extension algébriquement close κ/k (par exemple, la résolution lisse standard de [Beg] 2.2.1). Soit $(L_i)_{i \in I} \rightarrow (M_j)_{j \in J}$ son prolongement aux modèles de Néron généralisés. Notons Gr le foncteur de Greenberg de la catégorie des R -schémas en groupes dans la pro-catégorie des k -schémas en groupes, et $(\cdot)^{\text{pf}}$ le foncteur de perfectisation de la catégorie des k -schémas en groupes dans celle des k -schémas en groupes parfaits. Alors le conoyau de

$$(\text{Gr}(L_i)^{\text{pf}})_{i \in I} \rightarrow (\text{Gr}(M_j)^{\text{pf}})_{j \in J}$$

dans la ind-pro-catégorie des faisceaux abéliens sur le site des k -schémas parfaits muni de la topologie étale, est représentable par un ind-pro- k -schéma en groupes parfait $\mathcal{H}^1(G_K)$. On montre ensuite que $\mathcal{H}^1(G_K)$ se trouve dans l'image essentielle de $\mathcal{I}(\mathcal{P}^{\pi_0\text{-f}})$ et possède les propriétés requises. \square

3 Les isomorphismes de dualité discret et continu

Soit G_K un K -schéma en groupes fini annulé par p^n , $n \in \mathbb{N}$.

3.1. Le morphisme de groupes

$$\begin{array}{ccc}
H^1(K, G_K) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(\mathbb{Z}/p^n, G_K) & \xrightarrow{(\cdot)^*} & \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(G_K^*, \mu_{p^n}) \xrightarrow{\partial} \text{Hom}_{\mathbb{Z}/p^n}(H^0(K, G_K^*), H^1(K, \mu_{p^n})) \\
& & \downarrow v \\
& & \text{Hom}_{\mathbb{Z}/p^n}(H^0(K, G_K^*), \mathbb{Z}/p^n) \\
& & \parallel \\
& & H^0(K, G_K^*)^{\vee P}
\end{array}$$

s'annule sur $\mathcal{H}^1(G_K)^0(k) \subset H^1(K, G_K)$, définissant un morphisme de groupes quasi-algébriques finis

$$f_{\text{disc}}(G_K) : \pi_0(\mathcal{H}^1(G_K)) \longrightarrow \mathcal{H}^0(G_K^*)^{\vee P}. \quad (1)$$

3.2. Le morphisme de groupes

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}^1(G_K)^0(k) & & \\
\downarrow \lambda & & \\
\text{Im} \left(\mathcal{H}^1(G_K)^0(k) \hookrightarrow H^1(K, G_K) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(\mathbb{Z}/p^n, G_K) \xrightarrow{(\cdot)^*} \text{Ext}_{\mathbb{Z}/p^n}^1(G_K^*, \mu_{p^n}) \right) & & \\
& & \downarrow \iota^* \circ \bar{v}_* \circ \mathcal{H}^1 \\
& & \text{Ext}_{\mathcal{U}(n)}^1(\mathcal{H}^1(G_K^*)^0, \mathbb{Z}/p^n) \\
& & \parallel \\
& & (\mathcal{H}^1(G_K^*)^0)^{\vee S}(k)
\end{array}$$

définit, d'après 1.1.4 et 2.1, un morphisme de groupes \mathcal{Q} -admissibles unipotents strictement connexes

$$f_{\text{cont}}(G_K) : \mathcal{H}^1(G_K)^0 \longrightarrow (\mathcal{H}^1(G_K^*)^0)^{\vee s}. \quad (2)$$

3.3. Théorème. *Les flèches (1) et (2) sont des isomorphismes de $\vec{\mathcal{Q}}$.*

Démonstration. D'après 1.1.4 et les changements de base $k \rightarrow \kappa$, il suffit de montrer que les applications sous-jacentes sont bijectives. A l'aide d'un dévissage, on se ramène à montrer que (2) est bijective pour α_p , \mathbb{Z}/p et μ_p . On peut alors expliciter (2) en termes différentiels : pour α_p et \mathbb{Z}/p , on utilise la théorie de Artin-Milne [AM], et pour μ_p , celle de Trihan-Vauclair [TV], combinée à un calcul de de Jong [dJ]. Dans ces trois cas, on peut alors relier (2) à l'accouplement

$$K \times \Omega_K^1 \longrightarrow \Omega_K^1 \xrightarrow{\text{Res}} k$$

du corps de classes de K , et voir que c'est un isomorphisme. \square

Si G_K est un K -schéma en groupes fini non nécessairement p -primaire, on a encore une flèche (1), dans laquelle il suffit de remplacer p^n par un entier annihilant G_K , et qui est encore un isomorphisme par des arguments classiques. On a également une flèche (2), égale à $f_{\text{cont}}(G_K^{(p)})$, où $G_K^{(p)}$ est la partie p -primaire de G_K .

Remerciements. J'exprime toute ma gratitude à Michel Raynaud pour m'avoir introduit au sujet, et pour les échanges stimulants qui ont suivi. Je remercie Luc Illusie pour avoir attiré mon attention sur le site syntomique. Je remercie Jilong Tong pour un groupe de travail sur l'article de Lucile Bégueri [Beg] qui m'a été très utile. Je remercie enfin l'équipe d'algèbre de l'Université de Leuven pour m'avoir accueilli en post-doctorat, m'ayant ainsi permis de commencer ce travail, et la FWO (Fonds Wetenschappelijk Onderzoek - Vlaanderen) pour son financement.

Références

- [AM] M. ARTIN, J.S. MILNE, *Duality in the Flat Cohomology of Curves*, Invent. Math. **35** (1976), 111-129.
- [Beg] L. BÉGUERI, *Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos*, Mém Soc. Math. Fr. **108** (1980), fasc. 4.
- [dJ] A. J. DE JONG, *Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry*, Publ. Math. IHES **82** (1995), 5-96.
- [P] C. PÉPIN, *Dualité sur un corps local de caractéristique positive à corps résiduel algébriquement clos*, prépublication arXiv :1411.0742v1
- [Se] J.-P. SERRE, *Groupes proalgébriques*, Publ. Math. IHES (**7**) (1960), 5-67.
- [Sh] S. S. SHATZ, *Cohomology of artinian group schemes over local fields*, Ann. of Math. **79** (1964), No. 3, 411-449.
- [Su] T. SUZUKI, *Duality for local fields and sheaves on the category of fields*, prépublication arXiv :1310.4941v2
- [Ta] J. TATE, *Duality theorems in Galois cohomology over number fields*, Proceedings ICM 1962.
- [TV] F. TRIHAN, D. VAUCLAIR, *A comparison theorem for semi-abelian schemes over a proper smooth curve*, en préparation.

Email : cpepin@math.univ-paris13.fr

Address :

Département de Mathématiques

Institut Galilée

Université Paris 13

99 avenue Jean-Baptiste Clément

93 430 Villetaneuse

France