

Méthodes des éléments finis.
De la théorie à la programmation
En cours de rédaction

Cuvelier François

28 janvier 2013

Table des matières

1	Rappels	7
1.1	Espace vectoriel	7
1.2	Espaces vectoriels normés	8
1.3	espaces $L^p(\Omega)$	9
1.4	Notations et résultats	10
1.4.1	Dérivation faible dans $L^2(\Omega)$	10
1.4.2	Espaces de Sobolev	11
1.4.3	Résultats généraux	15
2	En dimension 1	17
2.1	Définitions et résultats	17
2.1.1	Espaces de Hilbert et autres	17
2.1.2	Relèvements	17
2.1.3	Etude de l'application $\mathcal{L}_f^{\lambda_a, \lambda_b}$	18
2.1.4	Etude de l'application $\mathcal{A}_{m, p, q, c}^{\alpha_a, \alpha_b}$	19
2.2	Problème mixte Robin-Dirichlet	26
2.2.1	Formulation variationnelle	26
2.2.2	Quelques résultats préliminaires	29
2.2.3	Existence et unicité	33
2.3	Problème mixte Robin-Dirichlet	34
2.3.1	Formulation variationnelle	34
2.4	Discretisation	39
3	En dimension d	41
3.1	Problème modèle	41
3.2	Définitions et résultats	41
3.2.1	41
3.2.2	Etude de l'application \mathcal{L}_f^g	42
3.2.3	Etude de l'application $\mathcal{A}_{M, p, q, a_0}^\mu$	43
3.3	Formulation variationnelle	48
4	En dimension 2	53
4.1	Problème modèle	53
4.2	Formulation variationnelle continue	53
4.2.1	Problème homogène associé	56
4.3	Eléments finis de degré un (P^1)	57
4.3.1	Triangulation	57
4.3.2	Structure de données associée au maillage	58

4.4	Formulation variationnelle discrétisée	64
4.5	Ecriture matricielle de la formulation variationnelle discrétisée	68
4.5.1	Calcul sur un triangle	69
4.6	Assemblage de matrices du type $\int_{\Omega_h} f_{i,j}(x,y)dxdy$	70
4.6.1	Application : $f_{i,j}(x,y) = \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)$	74
4.6.2	Application : $f_{i,j}(x,y) = c(x,y)\varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)$	75
4.6.3	Application : $f_{i,j}(x,y) = \langle \nabla \varphi_i(x,y), \nabla \varphi_j(x,y) \rangle$	77
4.6.4	Application : $f_{i,j}(x,y) = \langle \nabla \varphi_i(x,y), \mathbb{M}(x,y) \nabla \varphi_j(x,y) \rangle$	78
4.6.5	Application : $f_{i,j}(x,y) = c(x,y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x,y)\varphi_j(x,y)$	81
4.6.6	Application : $f_{i,j}(x,y) = c(x,y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(x,y)\varphi_j(x,y)$	83
4.6.7	Application : $f_{i,j}(x,y) = \frac{\partial c}{\partial x}(x,y)\varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)$	85
4.6.8	Application : $f_{i,j}(x,y) = \frac{\partial c}{\partial y}(x,y)\varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)$	87
4.6.9	Application : $f_{i,j} = \langle \mathbf{p}, \nabla \varphi_i \rangle \varphi_j$	88
4.6.10	Application : $f_{i,j} = \text{div}(\mathbf{p})\varphi_i\varphi_j$	90
4.6.11	Application : $f_{i,j} = \text{div}(\mathbf{p}\varphi_i)\varphi_j$	91
4.7	composante du type $\int_{\Gamma_h} g_{i,j}(x,y)d\gamma(x,y)$	92
4.7.1	Application : $g_{i,j}(x,y) = \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)$	95
4.7.2	Application : $g_{i,j}(x,y) = w(x,y)\varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)$	97
4.8	Assemblage de vecteurs	100
4.8.1	Composantes du type $\int_{\Omega_h} f(x,y)\varphi_i(x,y)dxdy$	100
4.8.2	Composantes du type $\int_{\Gamma_h} g(x,y)\varphi_i(x,y)d\Gamma_h(x,y)$	101
4.8.3	Condition de Dirichlet	102
4.9	Validations des algorithmes	103
4.9.1	Matrices \mathcal{M} et $\mathcal{M}^e(T)$	104
4.9.2	Matrices $\mathcal{M}^{[c]}$ et $\mathcal{M}^{e,[c]}(T)$	105
4.9.3	Matrices \mathcal{R} et $\mathcal{R}^e(T)$	106
4.9.4	Matrices $\mathcal{R}^{[M]}$ et $\mathcal{R}^{[M],e}(T)$	107
4.9.5	Matrices $\mathcal{K}_x^{[c]}$ et $\mathcal{K}_x^{e,[c]}(T)$	109
4.9.6	Matrices $\mathcal{K}_y^{[c]}$ et $\mathcal{K}_y^{e,[c]}(T)$	110
4.9.7	Matrices $\mathcal{G}_x^{[c]}$ et $\mathcal{G}_x^{e,[c]}(T)$	111
4.9.8	Matrices $\mathcal{G}_y^{[c]}$ et $\mathcal{G}_y^{e,[c]}(T)$	113
4.9.9	Matrices $\mathcal{K}_{\nabla}^{[\mathbf{p}]}$ et $\mathcal{K}_{\nabla}^{e,[\mathbf{p}]}(T)$	114
4.9.10	Matrices $\mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]}$ et $\mathcal{G}_{\text{div}}^{e,[\mathbf{p}]}(T)$	115
4.9.11	Matrices $\mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]}$ et $\mathcal{D}_{\text{div}}^{e,[\mathbf{p}]}(T)$	117
4.9.12	Matrices \mathcal{B} et $\mathcal{B}^e(E)$	119
4.10	Résumé	120
4.10.1	$\mathcal{I} = \iint_{\Omega} u(x,y)v(x,y)dxdy$	120
4.10.2	$\mathcal{I} = \iint_{\Omega} c(x,y)u(x,y)v(x,y)dxdy$	121
4.10.3	$\mathcal{I} = \iint_{\Omega} \langle \nabla u(x,y), \nabla v(x,y) \rangle dxdy$	121
4.10.4	$\mathcal{I} = \iint_{\Omega} \langle \mathbb{M}(x,y) \nabla u(x,y), \nabla v(x,y) \rangle dxdy$	121
4.10.5	$\mathcal{I} = \iint_{\Omega} c(x,y) \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)v(x,y)dxdy$	122
4.10.6	$\mathcal{I} = \iint_{\Omega} c(x,y) \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)v(x,y)dxdy$	122
4.10.7	$\mathcal{I} = \iint_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial x}(x,y)u(x,y)v(x,y)dxdy$	123
4.10.8	$\mathcal{I} = \iint_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial y}(x,y)u(x,y)v(x,y)dxdy$	123
4.10.9	$\mathcal{I} = \iint_{\Omega} \langle \mathbf{p}(x,y), \nabla u(x,y) \rangle v(x,y)dxdy$	124
4.10.10	$\mathcal{I} = \iint_{\Omega} \text{div}(\mathbf{p}(x,y))u(x,y)v(x,y)dxdy$	124
4.10.11	$\mathcal{I} = \iint_{\Omega} \text{div}(\mathbf{p}(x,y)u(x,y))v(x,y)dxdy$	124

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	5
1 4.10.12 Matrices globales	125

Chapitre 1

Rappels

1.1 Espace vectoriel

Definition 1 Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . un **espace vectoriel** sur \mathbb{K} est un ensemble non vide V dont les éléments sont appelés vecteurs muni d'une opération binaire appelée addition $+$: $V \times V \rightarrow V$ et d'une multiplication scalaire $.$: $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ tel que $(V, +)$ est un groupe commutatif, i.e.,

$$\forall x, y, z \in V, \quad (x + y) + z = x + (y + z),$$

$$\exists 0 \in V \text{ tel que } \forall x \in V, \quad x + 0 = x,$$

$$\forall x \in V, \exists -x \in V \text{ tel que } x + (-x) = 0,$$

$$\forall x, y \in V, \quad x + y = y + x$$

la multiplication scalaire satisfaisant $\forall x, y \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x,$$

$$\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y,$$

$$\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x,$$

$$1.x = x.$$

Definition 2 Soient U et V deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} et une application $L : U \rightarrow V$. Le **noyau** de L noté $\ker L$ est l'ensemble $\{u \in U \text{ tel que } L(u) = 0\}$. L'**image** de L noté $\text{Im}(L)$ est l'ensemble $\{L(u) \in V \text{ tel que } u \in U\}$. Cette application est **linéaire** si

$$\forall x, y \in U, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y).$$

Definition 3 Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur un corps \mathbb{K} . Soit $\varphi : E \times F \rightarrow G$ une application. On dit que φ est **bilinéaire** si et seulement si elle est linéaire en chacune de ses variables, c'est à dire : $\forall (x, x') \in E^2, \forall (y, y') \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} :$

$$\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$$

$$\varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$$

$$\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y)$$

$$\varphi(x, \lambda y) = \lambda \varphi(x, y)$$

Definition 4 Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{K} . Nous dirons qu'un sous-ensemble W de V est un **sous-espace** de V s'il est stable pour les opérations de V , c'est à dire si $\forall x, y \in W, \forall \alpha \in \mathbb{K}$

$$x + y \in W$$

$$\alpha x \in W.$$

W est alors un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication scalaire héritée de V .

1.2 Espaces vectoriels normés

Definition 5 Une norme sur un espace vectoriel E est une application notée généralement $\|\cdot\|_E$ de E dans \mathbb{R} , possédant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \|x\|_E &\geq 0 \quad \forall x \in E \\ \|x\|_E &= 0 \iff x = 0 \\ \|\lambda x\|_E &= |\lambda| \|x\|_E \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C} \\ \|x + y\|_E &\leq \|x\|_E + \|y\|_E \end{aligned}$$

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme.

Proposition 1 Soient E et F deux espaces vectoriels normés et f une application de E vers F . Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

1. L'application f est continue.
2. L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E .
3. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E .

Proposition 2 Soient E et F deux espaces vectoriels normés et f une application **linéaire** de E vers F , f est **continue** si et seulement si $\exists C > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq C \|x\|_E$.

Remarque 1 Si E est de dimension finie et si g est une application linéaire de E dans F alors g est continue.

Definition 6 Soit E un espace vectoriel muni de la norme $\|\cdot\|_E$. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de E est une **suite de Cauchy** si elle vérifie la propriété suivante, appelée critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \geq N \text{ et } q \geq N \implies \|x_p - x_q\|_E < \varepsilon. \quad (1.2.1)$$

Definition 7 On dit qu'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est **complet** si toute suite de Cauchy de E est convergente.

Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé complet.

Théorème 1 Un sous-espace vectoriel d'un espace complet est complet si et seulement si il est fermé.

Corolaire 2 Un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace complet est complet.

Corolaire 3 Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Définition 8 Soit V un espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur V une forme bilinéaire $\langle u, v \rangle$ de $V \times V$ dans \mathbb{R} , définie positive :

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in V \quad \text{et} \quad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Théorème 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit V un espace vectoriel muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est alors vérifiée :

$$|\langle u, v \rangle_V| \leq \langle u, u \rangle_V^{1/2} \langle v, v \rangle_V^{1/2} \quad \forall u, v \in V. \quad (1.2.2)$$

Définition 9 On appelle **espace de Hilbert** un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, complet pour la norme associée.

1.3 espaces $L^p(\Omega)$

Définition 10 On définit l'espace $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$ comme étant l'espace des fonctions mesurables de puissance p -ème intégrable sur Ω .

On définit l'espace $L^\infty(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions mesurables f essentiellement bornées sur Ω (i.e. $\exists C > 0$ telle que $|f(x)| < C$ presque partout dans Ω).

Théorème 5 Muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx,$$

l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \right)^{1/p},$$

l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf(C \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } |f(x)| < C \text{ p.p. dans } \Omega),$$

l'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.

Théorème 6 Si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^d alors

$$L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega), \text{ pour } 1 \leq q \leq p \leq \infty$$

Théorème 7 (Inégalité de Hölder) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Soit $1 \leq p \leq \infty$. On désigne par p' l'exposant conjugué de p , défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}. \quad (1.3.1)$$

1.4 Notations et résultats

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d dont la frontière Γ est \mathcal{C}^1 par morceaux. Soit Γ^D et Γ^R deux parties complémentaires de Γ :

$$\Gamma = \Gamma^D \cup \Gamma^R, \quad \Gamma^D \cap \Gamma^R = \emptyset.$$

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et v une application sur $A \subset \mathbb{R}^d$. On note alors $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ et

$$D^\alpha v = \frac{\partial^\alpha v}{\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}}.$$

1.4.1 Dérivation faible dans $L^2(\Omega)$

Definition 11 On dit que deux fonctions mesurables sont égales *presque partout* s'il existe un ensemble $E \subset \Omega$ tel que la mesure de Lebesgue de E est nulle et $f(x) = g(x) \forall x \in \Omega \setminus E$.

Definition 12 On note $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ (ou $\mathcal{D}(\Omega)$) l'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω .

Théorème 8 L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$ il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (1.4.1)$$

Corolaire 9 Soit $f \in L^2(\Omega)$. Si

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \quad (1.4.2)$$

alors $f(x) = 0$ presque partout dans Ω .

Definition 13 ([?, Page 83]) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . Soit $v \in L^2(\Omega)$. On dit que v est **dérivable au sens faible** dans $L^2(\Omega)$ s'il existe d fonctions $(w_i)_{i=1}^d \in (L^2(\Omega))^d$, telles que, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $\forall i \in \{1, \dots, d\}$,

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} w_i(x) \varphi(x) dx. \quad (1.4.3)$$

Chaque w_i est appelée la i -ème dérivée faible de v et notée désormais $\frac{\partial v}{\partial x_i}$.

Lemma 1 ([?, Page 86]) Soit $v \in L^2(\Omega)$. S'il existe une constante $C > 0$ telle que, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $\forall i \in \{1, \dots, d\}$,

$$\left| \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.4.4)$$

alors v est dérivable au sens faible.

Definition 14 Soit $\sigma \in (L^2(\Omega))^d$. On dit que σ admet une **divergence au sens faible** dans $L^2(\Omega)$ s'il existe une fonction $w \in L^2(\Omega)$ telle que, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \langle \sigma(x), \nabla \varphi(x) \rangle dx = - \int_{\Omega} w(x) \varphi(x) dx. \quad (1.4.5)$$

La fonction w est appelée divergence faible de σ et notée désormais $\text{div } \sigma$.

Lemma 2 Soit $\sigma \in (L^2(\Omega))^d$. S'il existe une constante $C > 0$ telle que, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$\left| \int_{\Omega} \langle \sigma(x), \nabla \varphi(x) \rangle dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.4.6)$$

alors σ admet une divergence au sens faible.

Definition 15 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et $v \in L^2(\Omega)$. On dit que v est α -dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe une fonction $w \in L^2(\Omega)$, telles que, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} v(x) D^\alpha \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} w(x) \varphi(x) dx. \quad (1.4.7)$$

La fonction w est appelée la α -ème dérivée faible de v et notée désormais $D^\alpha v$.

Remarque 2 De la même façon, on peut définir les dérivées faibles dans $L^p(\Omega)$.

1.4.2 Espaces de Sobolev

Definition 16 Pour tout entier $m \geq 1$, on appelle espace de Sobolev d'ordre m sur Ω l'espace

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m; D^\alpha v \in L^2(\Omega) \text{ au sens faible} \right\}. \quad (1.4.8)$$

Plus généralement, on note $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace défini pour tout entier $m \geq 0$ et $p \in \llbracket 1, \infty \rrbracket$ par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p(\Omega) \text{ t.q. } \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m; D^\alpha v \in L^p(\Omega) \text{ au sens faible} \right\}. \quad (1.4.9)$$

Théorème 10 Muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx \quad (1.4.10)$$

et de la norme associée

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \langle u, u \rangle_{H^m(\Omega)}^{1/2} \quad (1.4.11)$$

l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 11 Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \quad (1.4.12)$$

l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Théorème 12 (Produit [?, Page 35]) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et $(p, q, r) \in \llbracket 1, \infty \rrbracket^3$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. L'application

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) &\rightarrow W^{1,r}(\Omega) \\ (u, v) &\mapsto uv \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

est bien définie, bilinéaire continue et on a, $\forall (u, v) \in W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ et $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}. \quad (1.4.14)$$

Résultats en dimension $d = 1$

Soit $\Omega =]a; b[$, $-\infty < a < b < \infty$.

Lemma 3 ([?, Page 87]) *Pour toute fonction $v \in H^1(a, b)$ et pour tout $x, y \in [a; b]$, on a*

$$v(y) = v(x) + \int_x^y v'(s) ds. \quad (1.4.15)$$

Plus généralement, pour tout $x \in [a; b]$, l'application $v \rightarrow v(x)$, définie de $H^1(a, b)$ dans \mathbb{R} , est une forme linéaire continue sur $H^1(a, b)$. En particulier, toute fonction $v \in H^1(a, b)$ est continue sur $[a; b]$ et il existe une constante $C(\Omega) > 0$ telle que $\forall v \in H^1(a, b)$

$$|v(x)| \leq C(\Omega) \|v\|_{H^1(a, b)}, \quad \forall x \in [a; b] \quad (1.4.16)$$

Proposition 3 (Inégalité de Poincaré) *Soit $\Omega =]a; b[$, $-\infty < a < b < \infty$ et $v \in H^1(\Omega)$ vérifiant $v(a) = 0$ ou $v(b) = 0$. Alors, il existe une constante $C_P(\Omega) > 0$ telle que*

$$\int_a^b |v(x)|^2 dx \leq C_P(\Omega) \int_a^b |v'(x)|^2 dx. \quad (1.4.17)$$

Théorème 13 (de trace) *Soit $\Omega =]a; b[$, $-\infty < a < b < \infty$. Les applications traces*

$$\begin{aligned} \gamma_a : H^1(a, b) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto v(a) \end{aligned}, \quad (1.4.18)$$

$$\begin{aligned} \gamma_b : H^1(a, b) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto v(b) \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(a, b) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto (v(a), v(b)) \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

sont des applications linéaires continues. En particulier, il existe une constante $C_c(\Omega) > 0$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$|\gamma_a(v)| \leq C_c(\Omega) \|v\|_{H^1(a, b)}, \quad (1.4.21)$$

$$|\gamma_b(v)| \leq C_c(\Omega) \|v\|_{H^1(a, b)} \quad (1.4.22)$$

et

$$|\gamma_0(v)| = (v(a)^2 + v(b)^2)^{1/2} \leq \sqrt{2} C_c(\Omega) \|v\|_{H^1(a, b)}. \quad (1.4.23)$$

Théorème 14 *Si $u, v \in H^1(a; b)$ alors*

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = - \int_a^b u(x)v'(x) dx + [u(x)v(x)]_a^b \quad (1.4.24)$$

Si $u \in H^2(a; b)$ et $v \in H^1(a; b)$ alors

$$\int_a^b u''(x)v(x) dx = - \int_a^b u'(x)v'(x) dx + [u'(x)v(x)]_a^b \quad (1.4.25)$$

Résultats en dimension d

Théorème 15 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d dont la frontière Γ est C^1 par morceaux. Alors, si $m > \frac{d}{2}$, l'espace $H^m(\Omega)$ est un sous-espace de $C_0(\bar{\Omega})$ et l'injection canonique de $H^m(\Omega)$ dans $C_0(\bar{\Omega})$ est continue.*

Théorème 16 [?, Page 90] *Si Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d de classe C^m , ou bien si $\Omega = \mathbb{R}_+^d$, alors $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$*

Théorème 17 (Théorème de trace) *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d dont la frontière Γ est C^1 par morceaux. Alors l'application trace γ_Γ définie par*

$$\begin{aligned} \gamma_\Gamma &: H^1(\Omega) &\rightarrow L^2(\Gamma) \\ v &\mapsto \gamma_\Gamma(v) = v|_\Gamma \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

est une application linéaire continue. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\|\gamma_\Gamma(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.4.27)$$

Définition 17 *Pour $\alpha \in]0, 1]$ et A partie de \mathbb{R}^d , $C^{0,\alpha}(A)$ est l'espace des fonctions α -höldériennes bornées sur A , muni de la norme*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(A)} = \sup_A |u| + \sup_{(x,y) \in A^2, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Plus généralement, on

Théorème 18 (Théorème de trace[?, Page 49]) *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d dont la frontière Γ est C^1 par morceaux. Alors les applications traces γ_Γ définies pour $p \in [1, \infty[$ par*

$$\begin{aligned} \gamma_\Gamma &: W^{1,p}(\Omega) &\rightarrow L^p(\Gamma) \\ v &\mapsto \gamma_\Gamma(v) = v|_\Gamma \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

et pour $p = \infty$ par

$$\begin{aligned} \gamma_\Gamma &: W^{1,\infty}(\Omega) &\rightarrow C^{0,1}(\Gamma) \\ v &\mapsto \gamma_\Gamma(v) = v|_\Gamma \end{aligned} \quad (1.4.29)$$

sont linéaires continues.

Théorème 19 (Théorème de trace) *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d dont la frontière Γ est C^1 par morceaux. Soit Γ^D et Γ^R deux parties complémentaires de Γ :*

$$\Gamma = \Gamma^D \cup \Gamma^R, \quad \Gamma^D \cap \Gamma^R = \emptyset,$$

avec $\text{mes}(\Gamma^D) > 0$.

Alors, l'application trace γ_{Γ^D} définie par

$$\begin{aligned} \gamma_{\Gamma^D} &: H^1(\Omega) &\rightarrow L^2(\Gamma^D) \\ v &\mapsto \gamma_{\Gamma^D}(v) = v|_{\Gamma^D} \end{aligned} \quad (1.4.30)$$

est une application linéaire continue. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\|\gamma_{\Gamma^D}(v)\|_{L^2(\Gamma^D)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.4.31)$$

Définition 18 On note $H^{k/2}(\Gamma^D)$, $k \geq 1$ l'espace défini par

$$H^{k/2}(\Gamma^D) = \{v \in L^2(\Gamma^D) \mid \exists w \in H^k(\Omega) \text{ tel que } \gamma_{\Gamma^D}(w) = v.\} \quad (1.4.32)$$

Théorème 20 ([?, Page 94]) L'espace $H^{1/2}(\Gamma^D)$ est un sous-espace dense de $L^2(\Gamma^D)$. Muni de la norme

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma^D)} = \inf \left\{ \|w\|_{H^1(\Omega)} \text{ tel que } \gamma_{\Gamma^D}(w) = v. \right\} \quad (1.4.33)$$

c'est un espace de Banach (et même un espace de Hilbert).

Théorème 21 (Inégalité de Poincaré) Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d de frontière Γ , C^1 par morceaux, et Γ^D une partie de sa frontière telle que $\text{mes}(\Gamma^D) > 0$. Soit V défini par

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma^D\}.$$

Alors V muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert et il existe une constante $C(\Omega) > 0$ telle que

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad (1.4.34)$$

et

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (C_\Omega^2 + 1) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (1.4.35)$$

Théorème 22 (Formule de Green[?, Page 67]) Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d de frontière Γ , C^1 par morceaux et $(p, q) \in \llbracket 1, \infty \rrbracket^2$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in W^{1,q}(\Omega)$ alors $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u v n_i d\sigma, \quad (1.4.36)$$

où n_i est la i -ème composante du vecteur $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$, normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω .

Théorème 23 (Formule de Green) Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d de frontière Γ , C^1 par morceaux. Alors, $\forall u, v \in H^1(\Omega)$, $\forall i \in \{1, \dots, d\}$,

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u v n_i d\sigma, \quad (1.4.37)$$

où n_i est la i -ème composante du vecteur $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$, normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω .

Théorème 24 (Formule de Green) Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d de frontière Γ , C^1 par morceaux. Alors, $\forall u \in H^2(\Omega)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$- \int_\Omega (\Delta u) v dx = \sum_{i=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma. \quad (1.4.38)$$

Théorème 25 Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d de frontière Γ , C^1 par morceaux. Alors, $\forall \mathbf{b} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^d$ et $\forall v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \langle \mathbf{b}, \nabla v \rangle v = \frac{1}{2} \int_\Omega \text{div}(\mathbf{b}) v^2 - \frac{1}{2} \int_\Gamma \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle v^2 \quad (1.4.39)$$

1.4.3 Résultats généraux

Théorème 26 (Théorème de Lax-Milgram) *On suppose*

1. V un espace de Hilbert sur R de norme $\|\cdot\|_V$.
2. \mathcal{L} est une application linéaire de V à valeurs réelles.
3. \mathcal{L} est une application continue sur V , c'est à dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall v \in V, \quad |\mathcal{L}(v)| \leq C \|v\|_V. \quad (1.4.40)$$

4. \mathcal{A} est une application bilinéaire de $V \times V$ à valeurs réelles.
5. \mathcal{A} est une application continue sur $V \times V$, c'est à dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall u, v \in V, \quad |\mathcal{A}(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V. \quad (1.4.41)$$

6. \mathcal{A} est V -elliptique (coercive sur $V \times V$), c'est à dire qu'il existe une constante $\nu > 0$ telle que

$$\forall v \in V, \quad \mathcal{A}(v, v) \geq \nu \|v\|_V^2. \quad (1.4.42)$$

Alors, le problème variationnel

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v), \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (1.4.43)$$

admet une unique solution.

Définition 19 (problème de Galerkin) *Soit V un espace de Hilbert réel et V_h un sous-espace de dimension finie. L'approximation interne ou le problème de Galerkin associé à (1.4.43) est défini par*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h, \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(u_h, v_h) = \mathcal{L}(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (1.4.44)$$

Lemma 4 *Sous les hypothèses du théorème 26 de Lax-Milgram, le problème de Galerkin (1.4.44) admet une unique solution. Cette solution peut s'obtenir en résolvant un système linéaire de matrice définie positive.*

Lemma 5 (de Céa) *Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram 26, la solution u de (1.4.43) et la solution u_h de (1.4.44) vérifient*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\nu} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (1.4.45)$$

Si, de plus, \mathcal{A} est symétrique, alors on a

$$\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{M}{\nu}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (1.4.46)$$

Lemma 6 *Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram 26, et en supposant qu'il existe un sous-espace $\mathcal{V} \subset V$ dense dans V et une application r_h de \mathcal{V} dans V_h (appelée opérateur d'interpolation) tels que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\|_V = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (1.4.47)$$

Alors la méthode d'approximation variationnelle interne converge, c'est à dire si u est la solution de (1.4.43) et u_h la solution de (1.4.44)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0. \quad (1.4.48)$$

Chapitre 2

En dimension 1

2.1 Définitions et résultats

On présente ici quelques définitions et résultats utiles à l'étude de formulations variationnelles

2.1.1 Espaces de Hilbert et autres ...

Théorème 27 Soient les ensembles définis pour tout λ réel par

$$V_a(\lambda) = \{v \in H^1(a; b) \mid v(a) = \lambda\} \quad (2.1.1)$$

$$V_b(\lambda) = \{v \in H^1(a; b) \mid v(b) = \lambda\}. \quad (2.1.2)$$

Alors $V_a(\lambda)$ et $V_b(\lambda)$, munis du produit scalaire de $H^1(a; b)$ et de la norme associée, sont des espaces de Hilbert si et seulement si $\lambda = 0$.

Preuve : Si $\lambda \neq 0$, alors $\forall u, v \in V_a(\lambda)$ on a $u + v \notin V_a(\lambda)$ puisque $u(a) + v(a) = \lambda + \lambda = 2\lambda$. Donc $V_a(\lambda)$ n'est pas un espace vectoriel! De même pour $V_b(\lambda)$.

$V_b(0)$ est lui un espace vectoriel (c'est même un sous-espace vectoriel de $H^1(a; b)$). On peut le munir du produit scalaire de $H^1(a; b)$ et de la norme associée. Pour montrer qu'il est complet, il suffit de démontrer qu'il est fermé car c'est un sous-espace vectoriel de l'espace complet $H^1(a; b)$ (voir théorème 1). Pour cela on utilise le théorème 13 donnant la continuité de l'application trace γ_b . En effet l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé (voir ??). Or ici $\gamma_b^{-1}(\{0\}) = V_b(0)$ et $\{0\}$ est un fermé donc $V_b(0)$ est un fermé. On conclut donc que $V_b(0)$, muni du produit scalaire de $H^1(a; b)$ et de la norme associée, est un espace de Hilbert.

De la même manière, en utilisant le théorème 13 donnant la continuité de l'application trace γ_a , on obtient que $V_a(0)$, muni du produit scalaire de $H^1(a; b)$ et de la norme associée, est un espace de Hilbert. \square

2.1.2 Relèvements

Lemma 7 Soient λ et μ deux réels.

1. Il existe $R \in H^1(a; b)$ telle que $R(a) = \lambda$.

2. Il existe $R \in H^1(a; b)$ telle que $R(b) = \mu$.
3. Il existe $R \in H^1(a; b)$ telle que $R(a) = \lambda$ et $R(b) = \mu$.

Preuve :

1. La fonction R définie par $R(x) = \lambda, \forall x \in [a; b]$ est dans $H^1(a; b)$ et vérifie $R(a) = \lambda$.
2. La fonction R définie par $R(x) = \mu, \forall x \in [a; b]$ est dans $H^1(a; b)$ et vérifie $R(b) = \mu$.
3. La fonction R définie par $R(x) = \lambda \frac{x-b}{a-b} + \mu \frac{x-a}{b-a}, \forall x \in [a; b]$ est dans $H^1(a; b)$ et vérifie $R(a) = \lambda$ et $R(b) = \mu$.

□

2.1.3 Etude de l'application $\mathcal{L}_f^{\lambda_a, \lambda_b}$

Definition 20 Soient $f \in L^2(a; b)$, λ_a et λ_b deux réels. On définit l'application $\mathcal{L}_f^{\lambda_a, \lambda_b}$ de $H^1(a; b)$ à valeurs réelles par

$$\mathcal{L}_f^{\lambda_a, \lambda_b}(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx + \lambda_a v(a) + \lambda_b v(b). \quad (2.1.3)$$

Lemma 8 Soient $f \in L^2(a; b)$, λ_a et λ_b deux réels. L'application $\mathcal{L}_f^{\lambda_a, \lambda_b}$ définie par (2.1.3) est linéaire continue. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(a; b) \quad |\mathcal{L}_f^{\lambda_a, \lambda_b}(v)| \leq C \|v\|_{H^1(a; b)}. \quad (2.1.4)$$

Preuve : En utilisant les applications traces γ_a et γ_b définies en (1.4.18) et (1.4.19), on a $\forall v \in H^1(a; b)$,

$$\mathcal{L}_f^{\lambda_a, \lambda_b}(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx + \lambda_a \gamma_a(v) + \lambda_b \gamma_b(v).$$

Donc $\mathcal{L}_f^{\lambda_a, \lambda_b}$ est une application linéaire de $H^1(a; b)$ à valeurs réelles par linéarité de l'intégrale et des applications traces γ_a et γ_b (voir théorème 13).

Comme $\mathcal{L}_f^{\lambda_a, \lambda_b}$ est linéaire, pour montrer sa continuité, d'après le théorème ??, il est nécessaire et suffisant d'établir l'inégalité (2.1.4). On a, $\forall v \in H^1(a; b)$,

$$|\mathcal{L}_f^{\lambda_a, \lambda_b}(v)| \leq \left| \int_a^b f(x)v(x)dx \right| + |\lambda_a \gamma_a(v)| + |\lambda_b \gamma_b(v)|. \quad (2.1.5)$$

Comme f et v sont dans $L^2(a; b)$, on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_a^b f(x)v(x)dx \right| = \left| \langle f, v \rangle_{L^2(a; b)} \right| \leq \|f\|_{L^2(a; b)} \|v\|_{L^2(a; b)}.$$

En utilisant (??) sur v nous avons

$$\left| \int_a^b f(x)v(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^2(a; b)} \|v\|_{H^1(a; b)}.$$

En utilisant les inégalités (1.4.21) et (1.4.22) de continuité des applications linéaires γ_a et γ_b , l'inégalité (2.1.5) devient, $\forall v \in H^1(a; b)$,

$$|\mathcal{L}_f^{\lambda_a, \lambda_b}(v)| \leq \left(\|f\|_{L^2(a; b)} + (|\lambda_a| + |\lambda_b|)C_c(\Omega) \right) \|v\|_{H^1(a; b)}. \quad (2.1.6)$$

□

2.1.4 Etude de l'application $\mathcal{A}_{m, p, q, c}^{\alpha_a, \alpha_b}$

Definition 21 Soient $m, p, q, c \in L^\infty(a; b)$ et $\alpha_a, \alpha_b \in \mathbb{R}$. On définit l'application $\mathcal{A}_{m, p, q, c}^{\alpha_a, \alpha_b}$ de $H^1(a; b) \times H^1(a; b)$ à valeurs réelles par, $\forall u, v \in H^1(a; b)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{m, p, q, c}^{\alpha, \beta}(u, v) &= \int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b p(x)u(x)v'(x)dx \\ &+ \int_a^b q(x)u'(x)v(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx \\ &+ \alpha_a u(a)v(a) + \alpha_b u(b)v(b). \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Lemma 9 Soient $m, p, q, c \in L^\infty(a; b)$ et $\alpha_a, \alpha_b \in \mathbb{R}$. L'application $\mathcal{A}_{m, p, q, c}^{\alpha_a, \alpha_b}$ définie par (2.1.7) est bilinéaire continue sur $H^1(a; b) \times H^1(a; b)$. Il existe donc une constante $C_{\mathcal{A}} > 0$ telle que

$$\forall u, v \in H^1(a; b) \quad |\mathcal{A}_{m, p, q, c}^{\alpha_a, \alpha_b}(u, v)| \leq C_{\mathcal{A}} \|u\|_{H^1(a; b)} \|v\|_{H^1(a; b)}. \quad (2.1.8)$$

Preuve : Pour simplifier les notations, on pose $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{m, p, q, c}^{\alpha_a, \alpha_b}$.

En utilisant les applications traces γ_a et γ_b définies en (1.4.18) et (1.4.19), on a $\forall u, v \in H^1(a; b)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, v) &= \int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b p(x)u(x)v'(x)dx + \int_a^b q(x)u'(x)v(x)dx \\ &+ \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx + \alpha_a \gamma_a(u)\gamma_a(v) + \alpha_b \gamma_b(u)\gamma_b(v). \end{aligned}$$

Donc \mathcal{A} est une application bilinéaire de $H^1(a; b) \times H^1(a; b)$ à valeurs réelles par linéarité de l'intégrale, de l'opérateur de dérivation et des applications traces γ_a et γ_b (voir théorème 13).

D'après le théorème ??, pour établir la continuité de \mathcal{A} , sachant qu'elle est bilinéaire, il est nécessaire et suffisant de prouver l'inégalité (2.1.8.)

On a, $\forall u, v \in H^1(a; b)$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_{m, c}^{\alpha, \beta}(u, v)| &\leq \int_a^b |m(x)u'(x)v'(x)|dx + \int_a^b |p(x)u(x)v'(x)|dx + \int_a^b |q(x)u'(x)v(x)|dx \\ &+ \int_a^b |c(x)u(x)v(x)|dx + |\alpha_a \gamma_a(u)\gamma_a(v)| + |\alpha_b \gamma_b(u)\gamma_b(v)|. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Comme $u, v, u', v' \in L^2(a; b)$, le théorème (7) (inégalité de Holder) donne $uv \in L^1(a; b)$, $u'v' \in L^1(a; b)$ et

$$\begin{aligned} \|uv\|_{L^1(a; b)} &\leq \|u\|_{L^2(a; b)} \|v\|_{L^2(a; b)} \\ \|u'v'\|_{L^1(a; b)} &\leq \|u'\|_{L^2(a; b)} \|v'\|_{L^2(a; b)}. \end{aligned}$$

Par hypothèse m et c sont dans $L^\infty(a; b)$, le théorème (7) donne, $cuv \in L^1(a; b)$, $mu'v' \in L^1(a; b)$ et

$$\begin{aligned} \|cuv\|_{L^1(a;b)} &\leq \|c\|_{L^\infty(a;b)} \|uv\|_{L^1(a;b)} \\ \|mu'v'\|_{L^1(a;b)} &\leq \|m\|_{L^\infty(a;b)} \|u'v'\|_{L^1(a;b)}. \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\|cuv\|_{L^1(a;b)} \leq \|c\|_{L^\infty(a;b)} \|u\|_{L^2(a;b)} \|v\|_{L^2(a;b)} \quad (2.1.10)$$

$$\|mu'v'\|_{L^1(a;b)} \leq \|m\|_{L^\infty(a;b)} \|u'\|_{L^2(a;b)} \|v'\|_{L^2(a;b)} \quad (2.1.11)$$

Comme $p, q \in L^\infty(a; b)$, on obtient aussi

$$\|puv\|_{L^1(a;b)} \leq \|p\|_{L^\infty(a;b)} \|u\|_{L^2(a;b)} \|v\|_{L^2(a;b)} \quad (2.1.12)$$

$$\|quv\|_{L^1(a;b)} \leq \|q\|_{L^\infty(a;b)} \|u\|_{L^2(a;b)} \|v\|_{L^2(a;b)} \quad (2.1.13)$$

Pour majorer les termes $|\alpha_a \gamma_a(u) \gamma_a(v)|$ et $|\alpha_b \gamma_b(u) \gamma_b(v)|$ dans (2.1.9), on utilise les inégalités (1.4.21) et (1.4.22) provenant de la continuité des applications linéaires trace γ_a et γ_b . On obtient donc

$$|\alpha_a u(a)v(a)| \leq |\alpha_a| C_\gamma^2 \|u\|_{H^1(a;b)} \|v\|_{H^1(a;b)}, \quad (2.1.14)$$

$$|\alpha_b u(b)v(b)| \leq |\alpha_b| C_\gamma^2 \|u\|_{H^1(a;b)} \|v\|_{H^1(a;b)}, \quad (2.1.15)$$

$$(2.1.16)$$

En utilisant (2.1.10) à (2.1.15), l'inégalité (2.1.9) on obtient

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(u, v)| &\leq \|m\|_{L^\infty(a;b)} \|u'\|_{L^2(a;b)} \|v'\|_{L^2(a;b)} + (|\alpha_a| + |\alpha_b|) C_\gamma^2 \|u\|_{H^1(a;b)} \|v\|_{H^1(a;b)} \\ &\quad + (\|c\|_{L^\infty(a;b)} + \|p\|_{L^\infty(a;b)} + \|q\|_{L^\infty(a;b)}) \|u\|_{L^2(a;b)} \|v\|_{L^2(a;b)} \end{aligned}$$

Or par définition de la norme $H^1(a; b)$ on a $\|u\|_{H^1(a;b)}^2 = \|u\|_{L^2(a;b)}^2 + \|u'\|_{L^2(a;b)}^2$ et donc

$$\|u\|_{L^2(a;b)} \leq \|u\|_{H^1(a;b)} \quad \text{et} \quad \|u'\|_{L^2(a;b)} \leq \|u\|_{H^1(a;b)}. \quad (2.1.17)$$

On obtient alors l'inégalité (2.1.8) avec

$$C_{\mathcal{A}} = \|m\|_{L^\infty(a;b)} + \|c\|_{L^\infty(a;b)} + \|p\|_{L^\infty(a;b)} + \|q\|_{L^\infty(a;b)} + (|\alpha_a| + |\alpha_b|) C_\gamma^2.$$

□

Lemma 10 Soient $m, p, q, c \in L^\infty(a; b)$ et $\alpha_a, \alpha_b \in \mathbb{R}$. On note β_m , le réel vérifiant

$$m(x) \geq \beta_m \quad \text{p.p. dans } [a; b], \quad (2.1.18)$$

et μ_a et μ_b les réels donnés par

$$\mu_a = \alpha_a - \frac{1}{2}(p(a) + q(a)), \quad \mu_b = \alpha_b + \frac{1}{2}(p(b) + q(b)) \quad (2.1.19)$$

On suppose que $p, q \in H^1(a; b)$ et qu'il existe $\beta_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$c(x) - \frac{1}{2}(p(x) + q(x))' \geq \beta_0 \text{ p.p. dans } [a; b]. \quad (2.1.20)$$

L'application $\mathcal{A}_{m,p,q,c}^{\alpha_a, \alpha_b}$ est $H^1(a; b)$ -elliptique si

$$\beta_m > 0, \beta_0 > 0, \mu_a \geq 0 \text{ et } \mu_b \geq 0 \quad (2.1.21)$$

On a

$$\forall u \in H^1(a; b), \mathcal{A}_{m,p,q,c}^{\alpha_a, \alpha_b}(u, u) \geq \nu \|u\|_{H^1(a; b)}^2 \quad (2.1.22)$$

avec

$$\nu = \min(\beta_m, \beta_0) \quad (2.1.23)$$

Preuve : Pour simplifier les notations, on pose $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{m,p,q,c}^{\alpha_a, \alpha_b}$.

On a, $\forall u \in H^1(a; b)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, u) &= \int_a^b m(x)|u'(x)|^2 dx + \int_a^b (p(x) + q(x))u(x)u'(x) dx \\ &\quad + \int_a^b c(x)|u(x)|^2 dx + \alpha_a|u(a)|^2 + \alpha_b|u(b)|^2 \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Comme $u \in H^1(a; b)$, on a $u^2 \in H^1(a; b)$ (Démonstration ..., à faire?). De plus

$$\int_a^b (p(x) + q(x))u(x)u'(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b (p(x) + q(x))(u^2(x))' dx$$

et comme p et q sont dans $H^1(a; b)$, on peut utiliser la formule d'intégration par parties (1.4.24) pour obtenir

$$\int_a^b (p(x) + q(x))u(x)u'(x) dx = -\frac{1}{2} \int_a^b (p(x) + q(x))' u^2(x) dx + \frac{1}{2} [(p(x) + q(x))u^2(x)]_a^b.$$

L'équation (2.1.24) peut donc s'écrire, $\forall u \in H^1(a; b)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, u) &= \int_a^b m(x)|u'(x)|^2 dx + \int_a^b \left(c(x) - \frac{1}{2}(p(x) + q(x))' \right) |u(x)|^2 dx \\ &\quad + \mu_a|u(a)|^2 + \mu_b|u(b)|^2 \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

En utilisant (2.1.18) et (2.1.20), on obtient

$$\int_a^b m(x)|u'(x)|^2 dx \geq \beta_m \|u'\|_{L^2(a; b)}^2, \quad \forall u \in H^1(a; b) \quad (2.1.26)$$

$$\int_a^b \left(c(x) - \frac{1}{2}(p(x) + q(x))' \right) |u(x)|^2 dx \geq \beta_0 \|u\|_{L^2(a; b)}^2, \quad \forall u \in H^1(a; b) \quad (2.1.27)$$

On a alors la minoration, $\forall u \in H^1(a; b)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, u) &\geq \beta_m \|u'\|_{L^2(a; b)}^2 dx + \beta_0 \|u\|_{L^2(a; b)}^2 \\ &\quad + \mu_a|u(a)|^2 + \mu_b|u(b)|^2 \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

En utilisant les hypothèses (2.1.21), on obtient $\min(\beta_m, \beta_0) > 0$ et, $\forall u \in H^1(a; b)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, u) &\geq \min(\beta_m, \beta_0) \left(\|u'\|_{L^2(a;b)}^2 + \|u\|_{L^2(a;b)}^2 \right) \\ &\geq \min(\beta_m, \beta_0) \|u\|_{H^1(a;b)}^2. \end{aligned}$$

□

Lemma 11 Soient $m, p, q, c \in L^\infty(a; b)$ et $\alpha_a, \alpha_b \in \mathbb{R}$. On note β_m , le réel vérifiant

$$m(x) \geq \beta_m \quad \text{p.p. dans } [a; b], \quad (2.1.29)$$

On suppose que $p, q \in H^1(a; b)$ et qu'il existe $\beta_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$c(x) - \frac{1}{2}(p(x) + q(x))' \geq \beta_0 \quad \text{p.p. dans } [a; b]. \quad (2.1.30)$$

L'application $\mathcal{A}_{m,p,q,c}^{\alpha_a, \alpha_b}$ est $H_0^1(a; b)$ -elliptique si

$$\beta_m > 0 \quad \text{et} \quad \beta_0 > -\frac{\beta_m}{C_p(\Omega)} \quad (2.1.31)$$

On a

$$\forall u \in H_0^1(a; b), \quad \mathcal{A}_{m,p,q,c}^{\alpha_a, \alpha_b}(u, u) \geq \nu \|u\|_{H^1(a;b)}^2 \quad (2.1.32)$$

avec

$$\nu = \begin{cases} \min(\beta_m, \beta_0) & \text{si } \beta_0 > 0 \\ \frac{\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega)}{1 + C_p(\Omega)} & \text{si } \beta_0 \leq 0 \end{cases} \quad (2.1.33)$$

Preuve : Pour simplifier les notations, on pose $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{m,p,q,c}^{\alpha_a, \alpha_b}$.

Comme $H_0^1(a; b) \subset H^1(a; b)$, l'équation (2.1.25) est aussi vérifiée pour $u \in H_0^1(a; b)$. On obtient donc, $\forall u \in H_0^1(a; b)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, u) &= \int_a^b m(x) |u'(x)|^2 dx \\ &\quad + \int_a^b \left(c(x) - \frac{1}{2}(p(x) + q(x))' \right) |u(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

On a alors la minoration, $\forall u \in H_0^1(a; b)$,

$$\mathcal{A}(u, u) \geq \beta_m \|u'\|_{L^2(a;b)}^2 dx + \beta_0 \|u\|_{L^2(a;b)}^2. \quad (2.1.35)$$

Cas $\beta_0 > 0$. L'inégalité (2.1.35) devient

$$\forall u \in H_0^1(a; b), \quad \mathcal{A}(u, u) \geq \nu \|u\|_{H^1(a;b)}^2.$$

avec $\nu = \min(\beta_m, \beta_0) > 0$.

Cas $\beta_0 \leq 0$. On peut utiliser l'inégalité de Poincaré (1.4.17) sur $H_0^1(a; b)$ (qui n'est pas vraie sur $H^1(a; b)$) : $\exists C_p(\Omega) > 0$ telle que

$$\forall u \in H_0^1(a; b), \quad \|u\|_{L^2(a;b)}^2 \leq C_p(\Omega) \|u'\|_{L^2(a;b)}^2. \quad (2.1.36)$$

On en déduit alors, $\forall u \in H_0^1(a; b)$,

$$\|u\|_{L^2(a;b)}^2 + \|u'\|_{L^2(a;b)}^2 \leq (1 + C_p(\Omega)) \|u'\|_{L^2(a;b)}^2. \quad (2.1.37)$$

En utilisant l'inégalité (2.1.36), on minore le terme en $\beta_0 \|u\|_{L^2(a;b)}^2 \leq 0$ dans l'inégalité (2.1.35) pour obtenir

$$\begin{aligned} \forall u \in H_0^1(a; b), \mathcal{A}(u, u) &\geq \beta_m \|u'\|_{L^2(a;b)}^2 + \beta_0 C_p(\Omega) \|u'\|_{L^2(a;b)}^2 \\ &\geq (\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega)) \|u'\|_{L^2(a;b)}^2 \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega) > 0$, on peut utiliser (2.1.37) pour avoir

$$\forall u \in H_0^1(a; b), \mathcal{A}(u, u) \geq \nu \|u\|_{H^1(a;b)}^2. \quad (2.1.38)$$

avec $\nu = \frac{\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega)}{1 + C_p(\Omega)} > 0$. \square

Lemma 12 Soient $m, c \in L^\infty(a; b)$, $p, q \in H^1(a; b)$ et $\alpha_a, \alpha_b \in \mathbb{R}$. On note β_m , le réel vérifiant

$$m(x) \geq \beta_m \text{ p.p. dans } [a; b], \quad (2.1.39)$$

et μ_b le réel donné par

$$\mu_b = \alpha_b + \frac{1}{2}(p(b) + q(b)).$$

On suppose qu'il existe $\beta_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$c(x) - \frac{1}{2}(p(x) + q(x))' \geq \beta_0 \text{ p.p. dans } [a; b]. \quad (2.1.40)$$

L'application $\mathcal{A}_{m,p,q,c}^{\alpha_a, \alpha_b}$ est $V_a(0)$ -elliptique si

$$\beta_m > 0 \quad (2.1.41)$$

et si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\begin{aligned} (C_1) \quad &\beta_0 > -\frac{\beta_m}{C_p(\Omega)} \quad \text{et} \quad \mu_b \geq 0 \\ (C_2) \quad &\beta_0 > 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\min(\beta_m, \beta_0)}{C_\gamma^2} < \mu_b < 0 \\ (C_3) \quad &0 \geq \beta_0 > -\frac{\beta_m}{C_p(\Omega)} \quad \text{et} \quad -\frac{\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega)}{C_\gamma^2(1 + C_p(\Omega))} < \mu_b < 0. \end{aligned}$$

où C_γ et $C_p(\Omega)$ sont respectivement la constante de continuité de l'application trace γ_b (voir théorème 13) et la constante de Poincaré (voir proposition 3).

On a

$$\forall u \in V_a(0), \mathcal{A}_{m,p,q,c}^{\alpha_a, \alpha_b}(u, u) \geq \nu \|u\|_{H^1(a;b)}^2 \quad (2.1.42)$$

avec

$$\nu = \begin{cases} \min(\beta_m, \beta_0) & \text{si } \mu_b \geq 0 \text{ et } \beta_0 > 0, \\ \frac{\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega)}{C_\gamma^2(1 + C_p(\Omega))} & \text{si } \mu_b \geq 0 \text{ et } \beta_0 \leq 0, \\ \min(\beta_m, \beta_0) + \mu_b C_\gamma^2 & \text{si } \mu_b \geq 0 \text{ et } \beta_0 > 0, \\ \frac{\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega)}{C_\gamma^2(1 + C_p(\Omega))} + \mu_b C_\gamma^2 & \text{si } \mu_b < 0 \text{ et } \beta_0 \leq 0, \end{cases} \quad (2.1.43)$$

Preuve : Pour simplifier les notations, on pose $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{m,p,q,c}^{\alpha_a, \alpha_b}$.

Comme $V_a(0) \subset H^1(a; b)$, l'équation (2.1.25) est aussi vérifiée pour $u \in V_a(0)$. On obtient donc, $\forall u \in V_a(0)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, u) &= \int_a^b m(x) |u'(x)|^2 dx \\ &\quad + \int_a^b \left(c(x) - \frac{1}{2}(p(x) + q(x))' \right) |u(x)|^2 dx + \mu_b |u(b)|^2 \end{aligned} \quad (2.1.44)$$

On a la minoration, $\forall u \in V_a(0)$,

$$\mathcal{A}(u, u) \geq \beta_m \|u'\|_{L^2(a;b)}^2 dx + \beta_0 \|u\|_{L^2(a;b)}^2 + \mu_b |u(b)|^2. \quad (2.1.45)$$

Cas $\mu_b \geq 0$ et $\beta_0 > 0$. On a alors, $\forall u \in V_a(0)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, u) &\geq \beta_m \|u'\|_{L^2(a;b)}^2 dx + \beta_0 \|u\|_{L^2(a;b)}^2 \\ &\geq \min(\beta_m, \beta_0) (\|u'\|_{L^2(a;b)}^2 + \|u\|_{L^2(a;b)}^2) = \min(\beta_m, \beta_0) \|u\|_{H^1(a;b)}^2 \end{aligned}$$

avec $\min(\beta_m, \beta_0) > 0$.

Cas $\mu_b \geq 0$ et $\beta_0 \leq 0$. On peut utiliser l'inégalité de Poincaré (1.4.17) sur $V_a(0)$ (qui n'est pas vraie sur $H^1(a; b)$) : $\exists C_p(\Omega) > 0$ telle que

$$\forall u \in V_a(0), \|u\|_{L^2(a;b)}^2 \leq C_p(\Omega) \|u'\|_{L^2(a;b)}^2. \quad (2.1.46)$$

On en déduit alors, $\forall u \in V_a(0)$,

$$\|u\|_{L^2(a;b)}^2 + \|u'\|_{L^2(a;b)}^2 \leq (1 + C_p(\Omega)) \|u'\|_{L^2(a;b)}^2. \quad (2.1.47)$$

En utilisant l'inégalité (2.1.46), on minore le terme en $\beta_0 \|u\|_{L^2(a;b)}^2 \leq 0$ dans l'inégalité (2.1.45) pour obtenir

$$\begin{aligned} \forall u \in V_a(0), \mathcal{A}(u, u) &\geq \beta_m \|u'\|_{L^2(a;b)}^2 + \beta_0 C_p(\Omega) \|u'\|_{L^2(a;b)}^2 \\ &\geq (\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega)) \|u'\|_{L^2(a;b)}^2 \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega) > 0$, on peut utiliser (2.1.47) pour avoir

$$\forall u \in V_a(0), \mathcal{A}(u, u) \geq \frac{\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega)}{1 + C_p(\Omega)} \|u\|_{H^1(a;b)}^2. \quad (2.1.48)$$

Sous la condition (C_1) , on a $\frac{\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega)}{1 + C_p(\Omega)} > 0$.

Cas $\mu_b < 0$ et $\beta_0 > 0$. Par la continuité de l'application linéaire trace γ_b , (voir théorème 13) on a, $\forall u \in V_a(0)$,

$$|u(b)| = |\gamma_b(u)| \leq C_\gamma \|u\|_{H^1(a;b)}$$

et donc

$$\mu_b |u(b)|^2 \geq \mu_b C_\gamma^2 \|u\|_{H^1(a;b)}^2. \quad (2.1.49)$$

De l'inégalité (2.1.45), on en déduit $\forall u \in V_a(0)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, u) &\geq \beta_m \|u'\|_{L^2(a;b)}^2 dx + \beta_0 \|u\|_{L^2(a;b)}^2 + \mu_b C_\gamma^2 \|u\|_{H^1(a;b)} \\ &\geq \min(\beta_m, \beta_0) (\|u'\|_{L^2(a;b)}^2 + \|u\|_{L^2(a;b)}^2) + \mu_b C_\gamma^2 \|u\|_{H^1(a;b)}^2 \\ &\geq (\min(\beta_m, \beta_0) + \mu_b C_\gamma^2) \|u\|_{H^1(a;b)}^2 \end{aligned}$$

Sous la condition (C_2) , on a $(\min(\beta_m, \beta_0) + \mu_b C_\gamma^2) > 0$.

Cas $\mu_b < 0$ et $\beta_0 \leq 0$. En utilisant les inégalités (2.1.46) et (2.1.49) on obtient

$$\begin{aligned} \forall u \in V_a(0), \mathcal{A}(u, u) &\geq \beta_m \|u'\|_{L^2(a;b)}^2 + \beta_0 C_p(\Omega) \|u'\|_{L^2(a;b)}^2 + \mu_b C_\gamma^2 \|u\|_{H^1(a;b)} \\ &\geq (\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega)) \|u'\|_{L^2(a;b)}^2 + \mu_b C_\gamma^2 \|u\|_{H^1(a;b)} \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega) > 0$, on peut utiliser (2.1.47) pour avoir

$$\forall u \in V_a(0), \mathcal{A}(u, u) \geq \left(\frac{\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega)}{1 + C_p(\Omega)} + \mu_b C_\gamma^2 \right) \|u\|_{H^1(a;b)}$$

Sous l'hypothèse (C_3) , on a $\frac{\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega)}{1 + C_p(\Omega)} + \mu_b C_\gamma^2 > 0$. \square

Lemma 13 Soient $m, c \in L^\infty(a; b)$, $p, q \in H^1(a; b)$ et $\alpha_a, \alpha_b \in \mathbb{R}$. On note β_m , le réel vérifiant

$$m(x) \geq \beta_m \text{ p.p. dans } [a; b], \quad (2.1.50)$$

et μ_a le réel donné par

$$\mu_a = \alpha_a - \frac{1}{2}(p(a) + q(a)).$$

On suppose qu'il existe $\beta_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$c(x) - \frac{1}{2}(p(x) + q(x))' \geq \beta_0 \text{ p.p. dans } [a; b]. \quad (2.1.51)$$

L'application $\mathcal{A}_{m,p,q,c}^{\alpha_a, \alpha_b}$ est $V_b(0)$ -elliptique si

$$\beta_m > 0 \quad (2.1.52)$$

et si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\begin{aligned} (C_1) \quad &\beta_0 > -\frac{\beta_m}{C_p(\Omega)} \quad \text{et} \quad \mu_a \geq 0 \\ (C_2) \quad &\beta_0 > 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\min(\beta_m, \beta_0)}{C_\gamma^2} < \mu_a < 0 \\ (C_3) \quad &0 \geq \beta_0 > -\frac{\beta_m}{C_p(\Omega)} \quad \text{et} \quad -\frac{\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega)}{C_\gamma^2(1 + C_p(\Omega))} < \mu_a < 0. \end{aligned}$$

où C_γ et $C_p(\Omega)$ sont respectivement la constante de continuité de l'application trace γ_a (voir théorème 13) et la constante de Poincaré (voir proposition 3).

On a

$$\forall u \in V_b(0), \mathcal{A}_{m,p,q,c}^{\alpha_a, \alpha_b}(u, u) \geq \nu \|u\|_{H^1(a;b)}^2 \quad (2.1.53)$$

avec

$$\nu = \begin{cases} \min(\beta_m, \beta_0) & \text{si } \mu_a \geq 0 \text{ et } \beta_0 > 0, \\ \frac{\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega)}{C_\gamma^2(1 + C_p(\Omega))} & \text{si } \mu_a \geq 0 \text{ et } \beta_0 \leq 0, \\ \min(\beta_m, \beta_0) + \mu_b C_\gamma^2 & \text{si } \mu_a \geq 0 \text{ et } \beta_0 > 0, \\ \frac{\beta_m + \beta_0 C_p(\Omega)}{C_\gamma^2(1 + C_p(\Omega))} + \mu_b C_\gamma^2 & \text{si } \mu_a < 0 \text{ et } \beta_0 \leq 0, \end{cases} \quad (2.1.54)$$

Preuve : La démonstration est similaire à celle du lemme 12. \square

2.2 Problème mixte Robin-Dirichlet

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On considère le problème aux limites suivants :

$$\begin{cases} -(mu')' + cu & = f & \text{dans } (a, b), \\ m(a)u'(a) + \alpha_a u(a) & = g_a \\ u(b) & = u_b \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où $f \in L^2(a; b)$, $m, c \in L^\infty(a; b)$ et g_a, u_b, α_a trois réels avec $\alpha_a \leq 0$. On note β_c et β_m les deux réels vérifiant

$$\forall x \in]a; b[, \quad c(x) \geq \beta_c \text{ et } m(x) \geq \beta_m > 0 \text{ p.p. dans }]a; b[$$

et $C_p > 0$ la constante de Poincaré qui, $\forall v \in H^1(a; b)$ telle que $v(a) = 0$ ou $v(b) = 0$, nous donne

$$\int_a^b |v(x)|^2 dx \leq C_p \int_a^b |v'(x)|^2 dx.$$

On suppose que

$$\beta_c > -\frac{\beta_m}{C_p(\Omega)}.$$

2.2.1 Formulation variationnelle

Pour obtenir une formulation variationnelle associée au problème (2.2.1), on multiplie par une fonction test quelconque v suffisamment régulière et on intègre sur $[a; b]$. On suppose, bien sûr, que les fonctions u , m , c et f suffisamment régulières pour que l'intégration ait un sens et que l'on puisse utiliser la formule d'intégration par partie (??). On obtient donc

$$-\int_a^b (m(x)u'(x))'v(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

On effectue ensuite une intégration par partie entre mu' et v pour obtenir

$$\int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx - [m(x)u'(x)v(x)]_a^b + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

La condition aux limites en a donne $m(a)u'(a) = g_a - \alpha_a u(a)$. Par contre, on suppose $v(b) = 0$ car sinon le terme $m(b)u'(b)v(b)$ imposerait que u' soit défini en b , alors que pour le reste $u' \in L^2(a; b)$ suffit.

On définit les ensembles

$$\begin{aligned} V_b(0) &= \{v \in H^1(a; b) \mid v(b) = 0\} \\ V_b(u_b) &= \{v \in H^1(a; b) \mid v(b) = u_b\}. \end{aligned}$$

Une formulation variationnelle s'écrit alors sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V, \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v), \forall v \in W. \end{array} \right. \quad (2.2.2)$$

avec $V = V_b(u_b)$, $W = V_b(0)$,

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx - \alpha_a u(a)v(a) \quad (2.2.3)$$

et

$$\mathcal{L}(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx - g_a v(a). \quad (2.2.4)$$

Théorème 28 Soient $f \in L^2(a; b)$, $c \in L^\infty(a; b)$ et $m \in L^\infty(a; b)$. Alors u solution $H^2(a; b)$ de (2.2.2) si et seulement si u solution $H^2(a; b)$ de

$$-(mu')' + cu = f \text{ au sens de } L^2(a; b) \quad (2.2.5)$$

$$m(a)u'(a) + \alpha_a u(a) = g_a \quad (2.2.6)$$

$$u(b) = u_b \quad (2.2.7)$$

Preuve :

⇐ Soit u solution $H^2(a; b)$ de (2.2.5)-(2.2.6)-(2.2.7). Comme $c \in L^\infty(a; b)$, on a $cu \in L^2(a; b)$. On a alors $(mu')' = cu - f \in L^2(a; b)$. On peut donc multiplier (2.2.5) par une fonction $v \in L^2(a; b)$ et intégrer pour obtenir, $\forall v \in L^2(a; b)$,

$$-\int_a^b (m(x)u'(x))'v(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx. \quad (2.2.8)$$

Ensuite, pour appliquer la formule d'intégration par parties (2.2.8) à mu' et v , il faut que $mu' \in H^1(a; b)$ et $v \in H^1(a; b)$. On a vu que $(mu')' \in L^2(a; b)$. Comme $m \in L^\infty(a; b)$ et $u' \in L^2(a; b)$, on a $mu' \in L^2(a; b)$ et donc $mu' \in H^1(a; b)$. En prenant $v \in H^1(a; b) \subset L^2(a; b)$, on peut appliquer (2.2.8) pour obtenir

$$-\int_a^b (m(x)u'(x))'v(x)dx = \int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx - [m(x)u'(x)v(x)]_a^b$$

Or, en utilisant (2.2.6), on obtient

$$\begin{aligned} [m(x)u'(x)v(x)]_a^b &= m(b)u'(b)v(b) - m(a)u'(a)v(a) \\ &= m(b)u'(b)v(b) + \alpha_a u(a)v(a) - g_a v(a) \end{aligned}$$

Sur le bord Dirichlet, on choisit d'imposer $v(b) = 0$, c'est à dire de choisir $v \in V_b(0) \subset H^1(a; b)$. L'équation (2.2.8) devient alors $\forall v \in V_b(0)$

$$\begin{aligned} \int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx - \alpha_a u(a)v(a) \\ = \int_a^b f(x)v(x)dx - g_a v(a). \end{aligned}$$

Donc $u \in H^2(a; b)$ est solution de la formulation variationnelle (2.2.2).

\Rightarrow Soit u solution $H^2(a; b)$ de la formulation variationnelle (2.2.2). Comme $C_c^\infty(\Omega) \subset V_b(0)$, on a

$$\mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v), \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega)$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx \\ = \int_a^b f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

On en déduit alors, $\forall v \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\left| \int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx \right| \leq \int_a^b |c(x)u(x)v(x)|dx + \left| \int_a^b f(x)v(x)dx \right|. \quad (2.2.10)$$

Comme u et v sont dans $L^2(a; b)$, on obtient d'après le théorème ??, $uv \in L^1(a; b)$ et on peut alors utiliser l'inégalité de Holder entre c et uv et uv

$$\int_a^b |c(x)u(x)v(x)|dx \leq \|c\|_{L^\infty(a; b)} \|uv\|_{L^1(a; b)}.$$

Une nouvelle application de l'inégalité de Holder entre u et v , permet d'obtenir

$$\int_a^b |c(x)u(x)v(x)|dx \leq \|c\|_{L^\infty(a; b)} \|u\|_{L^2(a; b)} \|v\|_{L^2(a; b)}.$$

Comme f et u sont dans $L^2(a; b)$, on obtient d'après le théorème de Cauchy-Schwarz ??,

$$\left| \int_a^b f(x)v(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^2(a; b)} \|v\|_{L^2(a; b)}.$$

En utilisant ces deux dernières inégalités 2.2.14 devient, $\forall v \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\left| \int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx \right| \leq (\|c\|_{L^\infty(a; b)} \|u\|_{L^2(a; b)} + \|f\|_{L^2(a; b)}) \|v\|_{L^2(a; b)}.$$

D'après le lemme ??, on obtient que mu' est dérivable au sens faible dans $L^2(a; b)$ et on note $(mu')' \in L^2(a; b)$ sa dérivée faible telle que

$$\int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx = - \int_a^b (m(x)u'(x))'v(x)dx.$$

L'équation (2.2.13) peut donc s'écrire

$$\int_a^b ((m(x)u'(x))' + c(x)u(x) - f(x))v(x)dx = 0, \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

D'après le corollaire ??, ceci permet de conclure que

$$(m(x)u'(x))' + c(x)u(x) - f(x) = 0 \text{ presque partout dans } [a; b]. \quad (2.2.11)$$

Il reste à montrer que u vérifie les conditions aux limites (2.2.6) et (?). Comme $u \in V_b(u_b)$, la condition (?) est immédiatement vérifiée. Pour obtenir (2.2.6), on utilise la formule d'intégration par partie entre mu' et v . En effet, on a $mu' \in L^2(a; b)$ et $(mu')' \in L^2(a; b)$ donc $mu' \in H^1(a; b)$ et on obtient, $\forall v \in V_b(0)$,

$$\int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx = - \int_a^b (m(x)u'(x))'v(x)dx - m(a)u'(a)v(a).$$

De formulation variationnelle (2.2.2) on en déduit, $\forall v \in V_b(0)$,

$$\begin{aligned} - \int_a^b (m(x)u'(x))'v(x)dx - m(a)u'(a)v(a) + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx - \alpha_a u(a)v(a) \\ = \\ \int_a^b f(x)v(x)dx - g_a v(a). \end{aligned}$$

ou encore

$$\int_a^b (-(m(x)u'(x))' + c(x) - f(x))v(x)dx = (m(a)u'(a) + \alpha_a u(a) - g_a)v(a).$$

En utilisant (2.2.15), on a alors

$$(m(a)u'(a) + \alpha_a u(a) - g_a)v(a) = 0, \forall v \in V_b(0)$$

et donc en choisissant $v(x) = (b-x)/(b-a)$ qui est dans $V_b(0)$ et telle que $v(a) = 1$ on obtient

$$m(a)u'(a) + \alpha_a u(a) - g_a = 0.$$

□

2.2.2 Quelques résultats préliminaires

Les relèvements

Lemma 14 Soient u_a et u_b deux réels.

1. Il existe $R \in H^1(a; b)$ telle que $R(a) = u_a$.
2. Il existe $R \in H^1(a; b)$ telle que $R(b) = u_b$.
3. Il existe $R \in H^1(a; b)$ telle que $R(a) = u_a$ et $R(b) = u_b$.

Preuve :

1. La fonction $R \in \mathbb{P}^0$ définie par $R(x) = u_a, \forall x \in [a; b]$ est dans $H^1(a; b)$ et vérifie $R(a) = u_a$.
2. La fonction $R \in \mathbb{P}^0$ définie par $R(x) = u_b, \forall x \in [a; b]$ est dans $H^1(a; b)$ et vérifie $R(b) = u_b$.
3. La fonction $R \in \mathbb{P}^1$ définie par $R(x) = u_a \frac{x-b}{a-b} + u_b \frac{x-a}{b-a}, \forall x \in [a; b]$ est dans $H^1(a; b)$ et vérifie $R(a) = u_a$ et $R(b) = u_b$.

□

Etude de $V_b(0)$ et $V_b(u_b)$

Lemma 15 *L'espace $V_b(0) = \{v \in H^1(a; b) \mid v(b) = 0\}$ muni du produit scalaire de $H^1(a; b)$ et de la norme associée, est un espace de Hilbert.*

Par contre, si $u_b \neq 0$, $V_b(u_b) = \{v \in H^1(a; b) \mid v(b) = u_b\}$ n'est pas un espace de Hilbert.

Preuve : Si $u_b \neq 0$, $V_b(u_b)$ n'est pas un espace de Hilbert car ce n'est pas un espace vectoriel. En effet,

$$\forall u, v \in V_b(u_b), u + v \notin V_b(u_b),$$

puisque $(u + v)(b) = 2u_b!$

$V_b(0)$ est lui un espace vectoriel (c'est même un sous-espace vectoriel de $H^1(a; b)$). On peut le munir du produit scalaire de $H^1(a; b)$ et de la norme associée. Pour montrer qu'il est complet, il suffit de démontrer qu'il est fermé car c'est un sous-espace vectoriel d'un espace complet ($H^1(a; b)$). Pour cela on utilise la continuité de l'application trace γ_b définie en (??). En effet l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé. Or ici $\gamma_b^{-1}(\{0\}) = V_b(0)$ et $\{0\}$ est un fermé donc $V_b(0)$ est un fermé. On conclut donc que $V_b(0)$, muni du produit scalaire de $H^1(a; b)$ et de la norme associée, est un espace de Hilbert.

□

Etude de l'application \mathcal{L}

Lemma 16 *Soient $f \in L^2(a; b)$ et $g_a \in \mathbb{R}$. L'application $L : H^1(a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall v \in H^1(a; b), \mathcal{L}(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx - g_a v(a)$$

est linéaire continue. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(a; b) \quad |\mathcal{L}(v)| \leq C \|v\|_{H^1(a; b)} \quad (2.2.12)$$

Preuve : En fait, en utilisant l'application trace γ_a définie en (??), on a $\forall v \in H^1(a; b)$,

$$\mathcal{L}(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx - g_a \gamma_a(v).$$

Donc \mathcal{L} est une application linéaire de $H^1(a; b)$ à valeurs réelles par linéarité de l'intégrale et de l'application trace γ_a (voir lemme ??).

Pour montrer la continuité, il suffit d'établir (2.2.12). On a

$$|\mathcal{L}(v)| \leq \left| \int_a^b f(x)v(x)dx \right| + |g_a \gamma_a(v)|. \quad (2.2.13)$$

Comme f et v sont dans $L^2(a; b)$, on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_a^b f(x)v(x)dx \right| = \left| \langle f, v \rangle_{L^2(a; b)} \right| \leq \|f\|_{L^2(a; b)} \|v\|_{L^2(a; b)}.$$

En utilisant (??) sur v nous avons

$$\left| \int_a^b f(x)v(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^2(a;b)} \|v\|_{H^1(a;b)}.$$

L'inégalité (2.2.13) devient, en utilisant la continuité de l'application linéaire γ_a ,

$$|\mathcal{L}(v)| \leq \left(\|f\|_{L^2(a;b)} + |g_a|C_a \right) \|v\|_{H^1(a;b)}. \quad (2.2.14)$$

□

Etude de l'application \mathcal{A}

Lemma 17 Soient $m, c \in L^\infty(a;b)$ et $\alpha_a \in \mathbb{R}$. L'application $a : H^1(a;b) \times H^1(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx - \alpha_a u(a)v(a)$$

est bilinéaire continue. Il existe donc une constante $C_a > 0$ telle que

$$\forall u, v \in H^1(a;b) \quad |\mathcal{A}(u, v)| \leq C_a \|u\|_{H^1(a;b)} \|v\|_{H^1(a;b)}. \quad (2.2.15)$$

Preuve : En utilisant l'application trace γ_a définie en (??), on a $\forall u, v \in H^1(a;b)$,

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx - \alpha_a \gamma_a(u)\gamma_a(v)$$

Donc a est une application bilinéaire de $H^1(a;b) \times H^1(a;b)$ à valeurs réelles par linéarité de l'intégrale et de l'application trace γ_a (voir lemme ??).

Pour montrer la continuité de l'application bilinéaire \mathcal{A} , il suffit de montrer (2.2.15). On a

$$|\mathcal{A}(u, v)| \leq \int_a^b |m(x)u'(x)v'(x)|dx + \int_a^b |c(x)u(x)v(x)|dx + |\alpha_a \gamma_a(u)\gamma_a(v)|. \quad (2.2.16)$$

Comme $u, v, u', v' \in L^2(a;b)$, nous avons, d'après l'inégalité de Holder (??), $uv \in L^1(a;b)$, $u'v' \in L^1(a;b)$ et

$$\begin{aligned} \|uv\|_{L^1(a;b)} &\leq \|u\|_{L^2(a;b)} \|v\|_{L^2(a;b)} \\ \|u'v'\|_{L^1(a;b)} &\leq \|u'\|_{L^2(a;b)} \|v'\|_{L^2(a;b)}. \end{aligned}$$

Par hypothèse m et c sont dans $L^\infty(a;b)$, nous avons, d'après l'inégalité de Holder (??), $cuv \in L^1(a;b)$, $mu'v' \in L^1(a;b)$ et

$$\begin{aligned} \|cuv\|_{L^1(a;b)} &\leq \|c\|_{L^\infty(a;b)} \|uv\|_{L^1(a;b)} \\ \|mu'v'\|_{L^1(a;b)} &\leq \|m\|_{L^\infty(a;b)} \|u'v'\|_{L^1(a;b)}. \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\int_a^b |c(x)u(x)v(x)|dx = \|cuv\|_{L^1(a;b)} \leq \|c\|_{L^\infty(a;b)} \|u\|_{L^2(a;b)} \|v\|_{L^2(a;b)} \quad (2.2.17)$$

$$\int_a^b |m(x)u'(x)v'(x)|dx = \|mu'v'\|_{L^1(a;b)} \leq \|m\|_{L^\infty(a;b)} \|u'\|_{L^2(a;b)} \|v'\|_{L^2(a;b)} \quad (2.2.18)$$

Pour majorer le terme $|\alpha_a \gamma_a(u) \gamma_a(v)|$ dans (2.2.15), on utilise l'inégalité (??) provenant de la continuité de l'application linéaire trace γ_a . On obtient donc

$$|\alpha_a u(a)v(a)| \leq |\alpha_a| C_\gamma^2 \|u\|_{H^1(a;b)} \|v\|_{H^1(a;b)}. \quad (2.2.19)$$

En utilisant (2.2.17), (2.2.18) et (2.2.19) dans l'inégalité (2.2.16) nous obtenons

$$|\mathcal{A}(u, v)| \leq \|m\|_{L^\infty(a;b)} \|u'\|_{L^2(a;b)} \|v'\|_{L^2(a;b)} + \|c\|_{L^\infty(a;b)} \|u\|_{L^2(a;b)} \|v\|_{L^2(a;b)} + |\alpha_a| C_a^2 \|u\|_{H^1(a;b)} \|v\|_{H^1(a;b)}$$

Or par définition de la norme $H^1(a; b)$ nous avons $\|u\|_{H^1(a;b)}^2 = \|u\|_{L^2(a;b)}^2 + \|u'\|_{L^2(a;b)}^2$ et donc

$$\|u\|_{L^2(a;b)} \leq \|u\|_{H^1(a;b)} \quad \text{et} \quad \|u'\|_{L^2(a;b)} \leq \|u\|_{H^1(a;b)}. \quad (2.2.20)$$

On obtient alors l'inégalité (2.2.15) avec

$$C_a = \|m\|_{L^\infty(a;b)} + \|c\|_{L^\infty(a;b)} + |\alpha_a| C_\gamma^2.$$

□

Lemma 18 Soient $m, c \in L^\infty(a; b)$ et un réel $\alpha_a \leq 0$. On note β_c et β_m les deux réels vérifiant

$$\forall x \in]a; b[, \quad c(x) \geq \beta_c \quad \text{et} \quad m(x) \geq \beta_m > 0 \quad \text{p.p. dans }]a; b[$$

et $C_p > 0$ la constante de Poincaré qui, $\forall v \in H^1(a; b)$ telle que $v(a) = 0$ ou $v(b) = 0$, nous donne

$$\int_a^b |v(x)|^2 dx \leq C_p \int_a^b |v'(x)|^2 dx.$$

1. L'application a est $H^1(\Omega)$ -elliptique si $\beta_c > 0$. On a

$$\mathcal{A}(u, u) \geq \nu \|u\|_{H^1(a;b)}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad (2.2.21)$$

avec $\nu = \min(\beta_m, \beta_c) > 0$.

2. L'application a est $V_b(0)$ -elliptique si $\beta_c > -\frac{\beta_m}{C_p}$. On a

$$\mathcal{A}(u, u) \geq \nu \|u\|_{H^1(a;b)}^2, \quad \forall u \in V_b(0), \quad (2.2.22)$$

avec

$$\nu = \begin{cases} \min(\beta_m, \beta_c) > 0 & \text{si } \beta_c > 0 \\ \frac{\beta_m + \beta_c C_p}{1 + C_p} > 0 & \text{si } \beta_c \leq 0 \end{cases}$$

Preuve :

1. On a $\forall u \in H^1(a; b)$,

$$a(u, u) = \int_a^b m(x) |u'(x)|^2 dx + \int_a^b c(x) |u(x)|^2 dx - \alpha_a |u(a)|^2$$

En utilisant les hypothèses sur α_a , c et m , on obtient

$$\forall u \in H^1(a; b), \mathcal{A}(u, u) \geq \beta_m \|u'\|_{L^2(a; b)}^2 + \beta_c \|u\|_{L^2(a; b)}^2. \quad (2.2.23)$$

Donc, comme $\beta_m > 0$ et $\beta_c > 0$, on a

$$\forall u \in H^1(a; b), \mathcal{A}(u, u) \geq \min(\beta_m, \beta_c) \left(\|u'\|_{L^2(a; b)}^2 + \|u\|_{L^2(a; b)}^2 \right).$$

2. Comme $V_b(0) \subset H^1(a; b)$, on obtient à partir de (2.2.23)

$$\forall u \in V_b(0), \mathcal{A}(u, u) \geq \beta_m \|u'\|_{L^2(a; b)}^2 + \beta_c \|u\|_{L^2(a; b)}^2. \quad (2.2.24)$$

Cas $\beta_c > 0$. L'inégalité (2.2.24) devient

$$\forall u \in V_b(0), \mathcal{A}(u, u) \geq \nu \|u\|_{H^1(a; b)}^2.$$

avec $\nu = \min(\beta_m, \beta_c) > 0$.

Cas $\beta_c \leq 0$. Comme $u \in V_b(0)$, on peut utiliser l'inégalité de Poincaré (??) sur $V_b(0)$ (qui n'est pas vraie sur $H^1(a; b)$) : $\exists C_p > 0$ telle que

$$\forall u \in V_b(0), \|u\|_{L^2(a; b)}^2 \leq C_p \|u'\|_{L^2(a; b)}^2. \quad (2.2.25)$$

On en déduit alors, $\forall u \in V_b(0)$,

$$\|u\|_{L^2(a; b)}^2 + \|u'\|_{L^2(a; b)}^2 \leq (1 + C_p) \|u'\|_{L^2(a; b)}^2. \quad (2.2.26)$$

En utilisant l'inégalité (2.2.25), on minore le terme en $\beta_c \|u\|_{L^2(a; b)}^2 \leq 0$ dans l'inégalité (2.2.24) pour obtenir

$$\begin{aligned} \forall u \in V_b(0), \mathcal{A}(u, u) &\geq \beta_m \|u'\|_{L^2(a; b)}^2 + \beta_c C_p \|u'\|_{L^2(a; b)}^2 \\ &\geq (\beta_m + \beta_c C_p) \|u'\|_{L^2(a; b)}^2 \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $\beta_m + \beta_c C_p > 0$, on peut utiliser (2.2.26) pour avoir

$$\forall u \in V_b(0), \mathcal{A}(u, u) \geq \nu \|u\|_{H^1(a; b)}^2. \quad (2.2.27)$$

avec $\nu = \frac{\beta_m + \beta_c C_p}{1 + C_p} > 0$.

□

2.2.3 Existence et unicité

Pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème (2.2.2), on va utiliser un relèvement $R \in H^1(a; b)$ de u_b tel que $R(b) = u_b$. La formulation variationnelle (2.2.2) est équivalente à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u = w + R \in V, \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(w + R, v) = \mathcal{L}(v), \forall v \in W. \end{array} \right. \quad (2.2.28)$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } w = u - R \in W, \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(w, v) = \mathcal{L}(v) - \mathcal{A}(R, v), \forall v \in W. \end{array} \right. \quad (2.2.29)$$

2.3 Problème mixte Robin-Dirichlet

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On considère le problème aux limites suivants :

$$\begin{cases} -(mu')' + cu & = f & \text{dans } (a, b), \\ u(a) & = u_a \\ m(b)u'(b) + \alpha_b u(b) & = g_b \end{cases} \quad (2.3.1)$$

2.3.1 Formulation variationnelle

Pour obtenir une formulation variationnelle associée au problème (2.3.1), on multiplie par une fonction test quelconque v suffisamment régulière et on intègre sur $[a; b]$. On suppose, bien sûr, que les fonctions u , m , c et f suffisamment régulières pour que l'intégration ait un sens et que l'on puisse utiliser la formule d'intégration par partie (??). On obtient donc

$$-\int_a^b (m(x)u'(x))'v(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

On effectue ensuite une intégration par partie entre mu' et v pour obtenir

$$\int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx - [m(x)u'(x)v(x)]_a^b + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

La condition aux limites en b donne $m(b)u'(b) = g_b - \alpha_b u(b)$. Par contre, on suppose $v(a) = 0$ car sinon le terme $m(a)u'(a)v(a)$ imposerait que u' soit défini en a , alors que pour le reste $u' \in L^2(a; b)$ suffit.

On définit les ensembles

$$\begin{aligned} V_a(0) &= \{v \in H^1(a; b) \mid v(a) = 0\} \\ V_a(u_a) &= \{v \in H^1(a; b) \mid v(a) = u_a\}. \end{aligned}$$

Une formulation variationnelle s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_a(u_a), \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v), \forall v \in V_a(0). \end{cases} \quad (2.3.2)$$

avec

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx + \alpha_b u(b)v(b) \quad (2.3.3)$$

et

$$\mathcal{L}(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx + g_b v(b). \quad (2.3.4)$$

Théorème 29 Soient $f \in L^2(a; b)$, $m, c \in L^\infty(a; b)$ et g_b, u_a, α_b trois réels avec $\alpha_b \geq 0$. On note β_c et β_m les deux réels vérifiant

$$\forall x \in]a; b[, \quad c(x) \geq \beta_c \text{ et } m(x) \geq \beta_m \text{ p.p. dans }]a; b[.$$

On note $C_p(\Omega)$ la constante de Poincaré de la proposition 1.4.16. Sous les conditions

$$\beta_m > 0 \text{ et } \beta_c > -\frac{\beta_m}{C_p(\Omega)}. \quad (2.3.5)$$

la formulation variationnelle (2.3.2) admet une unique solution.

Preuve : On remarque tout d'abord que

$$\forall u \in V_a(u_a), \forall v \in V_a(0) \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{A}_{m,0,0,c}^{-\alpha,0}(u, v)$$

et

$$\forall v \in V_a(0) \mathcal{L}(v) = \mathcal{L}_f^{0,g_b}(v).$$

Cas $u_a = 0$:

Pour obtenir l'existence et l'unicité de la formulation variationnelle (2.3.2), il suffit de vérifier que l'on est dans le champ d'application du théorème 26 de Lax-Milgram. En effet

- D'après le théorème 27 $V_a(0)$, muni du produit scalaire de $H^1(a; b)$ et de la norme associée, est un **espace de Hilbert**.
- Comme $V_a(0) \subset H^1(a; b)$ et d'après le lemme 8, l'application \mathcal{L} est **linéaire** et **continue** de $V_a(0)$ à valeurs dans \mathbb{R} .
- Comme $V_a(0) \subset H^1(a; b)$ et d'après le lemme ??, l'application \mathcal{A} est **bilinéaire** et **continue** de $V_a(0) \times V_a(0)$ à valeurs dans \mathbb{R} .
- D'après le lemme ??, si

$$\beta_m > 0 \text{ et } \beta_c > -\frac{\beta_m}{C_p(\Omega)}$$

l'application \mathcal{A} est $V_a(0)$ -**elliptique**.

Cas $u_a \neq 0$:

Puisque $V_a(u_a) \neq V_a(0)$, on ne peut appliquer directement le théorème 26 de Lax-Milgram sur la formulation variationnelle (2.3.2).

Pour contourner le problème on utilise un relèvement : d'après le lemme 7 il existe $R \in H^1(a; b)$ telle que $R(a) = u_a$. On écrit une nouvelle formulation variationnelle déduite de 2.3.2 en prenant $u = w + R$:

$$\begin{cases} \text{Trouver } w \in V_a(0), \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(w, v) = \mathcal{L}_R(v), \forall v \in V_a(0). \end{cases} \quad (2.3.6)$$

avec

$$\mathcal{L}_R(v) = \mathcal{L}(v) - \mathcal{A}(R, v), \forall v \in V_a(0)$$

Pour obtenir l'existence et l'unicité de la formulation variationnelle (2.3.6), il suffit de vérifier que l'on est dans le champ d'application du théorème 26 de Lax-Milgram :

- d'après le théorème 27 $V_a(0)$, muni du produit scalaire de $H^1(a; b)$ et de la norme associée, est un **espace de Hilbert**.
- Comme $V_a(0) \subset H^1(a; b)$ et d'après le lemme 8, l'application \mathcal{L} est **linéaire** et **continue** de $V_a(0)$ à valeurs dans \mathbb{R} .
D'après le lemme ??, l'application \mathcal{A} est **bilinéaire** et **continue** de $H^1(a; b) \times H^1(a; b)$ à valeurs dans \mathbb{R} . On en déduit que l'application $v \mapsto \mathcal{A}(R, v)$ est linéaire et continue de $V_a(0)$ à valeurs dans \mathbb{R} .
L'application \mathcal{L}_R est donc **linéaire** et **continue** de $V_a(0)$ à valeurs dans \mathbb{R} .
- Comme $V_a(0) \subset H^1(a; b)$ et d'après le lemme ??, l'application \mathcal{A} est **bilinéaire** et **continue** de $V_a(0) \times V_a(0)$ à valeurs dans \mathbb{R} .

- D'après le lemme ??, si

$$\beta_m > 0 \quad \text{et} \quad \beta_c > -\frac{\beta_m}{C_p(\Omega)}$$

l'application \mathcal{A} est $V_a(0)$ –**elliptique**.

On note $w_R \in V_a(0)$ l'unique solution de (2.3.6) et on pose $u = w_R + R$. On a $u \in H^1(a; b)$ et $u(a) = w_R(a) + R(a) = u_a$, c'est à dire $u \in V_a(u_a)$.

Comme

$$\mathcal{A}(w_R, v) = \mathcal{L}_R(v), \quad \forall v \in V_a(0)$$

on obtient

$$\mathcal{A}(u - R, v) = \mathcal{L}(v) - \mathcal{A}(R, v), \quad \forall v \in V_a(0)$$

et donc, par bilinéarité de \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v), \quad \forall v \in V_a(0).$$

La fonction $u = w_R + R \in V_a(0)$ est solution de la formulation variationnelle (2.3.2).

L'unicité découle de la coercivité de \mathcal{A} . En effet, soient u_1 et u_2 deux solutions de (2.3.2). Alors, $\forall v \in V_a(0)$,

$$\mathcal{A}(u_1, v) = \mathcal{L}(v) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(u_2, v) = \mathcal{L}(v).$$

Par différence et en utilisant la bilinéarité de \mathcal{A} , on obtient

$$\mathcal{A}(u_1 - u_2, v) = 0, \quad \forall v \in V_a(0).$$

Comme u_1 et u_2 sont dans $V_a(u_a)$, $u_1 - u_2 \in V_a(0)$. En choisissant $v = u_1 - u_2$ dans l'équation précédente, on a

$$\mathcal{A}(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

D'après le lemme ??, comme par hypothèse

$$\beta_m > 0 \quad \text{et} \quad \beta_c > -\frac{\beta_m}{C_p(\Omega)}$$

l'application \mathcal{A} est $V_a(0)$ –**elliptique**. Il existe donc $\nu > 0$ tel que

$$\mathcal{A}(v, v) \geq \nu \|v\|_{H^1(a; b)}^2, \quad \forall v \in V_a(0).$$

On en déduit

$$\mathcal{A}(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0 \geq \nu \|u_1 - u_2\|_{H^1(a; b)}^2$$

et donc

$$\|u_1 - u_2\|_{H^1(a; b)} = 0$$

ce qui démontre que $u_1 = u_2$ dans $H^1(a; b)$. □

Théorème 30 Soient $f \in L^2(a; b)$, $c \in L^\infty(a; b)$ et $m \in L^\infty(a; b)$. Alors u solution $H^2(a; b)$ de (2.3.2) si et seulement si u solution $H^2(a; b)$ de

$$-(mu')' + cu = f \text{ au sens de } L^2(a; b) \quad (2.3.7)$$

$$u(a) = u_a \quad (2.3.8)$$

$$m(b)u'(b) + \alpha_b u(b) = g_b \quad (2.3.9)$$

Preuve :

⊆ Soit u solution $H^2(a; b)$ de (2.3.7)-(2.3.8)-(2.3.9). Comme $c \in L^\infty(a; b)$, on a $cu \in L^2(a; b)$. On a alors $(mu')' = cu - f \in L^2(a; b)$. On peut donc multiplier (2.3.7) par une fonction $v \in L^2(a; b)$ et intégrer pour obtenir, $\forall v \in L^2(a; b)$,

$$-\int_a^b (m(x)u'(x))'v(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx. \quad (2.3.10)$$

Ensuite, pour appliquer la formule d'intégration par parties (1.4.24) à mu' et v , il faut que $mu' \in H^1(a; b)$ et $v \in H^1(a; b)$. On a vu que $(mu')' \in L^2(a; b)$. Comme $m \in L^\infty(a; b)$ et $u' \in L^2(a; b)$, on a $mu' \in L^2(a; b)$ et donc $mu' \in H^1(a; b)$. En prenant $v \in H^1(a; b) \subset L^2(a; b)$, on peut appliquer (1.4.24) pour obtenir

$$-\int_a^b (m(x)u'(x))'v(x)dx = \int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx - [m(x)u'(x)v(x)]_a^b$$

Or, en utilisant (2.3.8), on obtient

$$\begin{aligned} [m(x)u'(x)v(x)]_a^b &= m(b)u'(b)v(b) - m(a)u'(a)v(a) \\ &= -\alpha_b u(b)v(b) + g_b v(b) - m(a)u'(a)v(a) \end{aligned}$$

Sur le bord Dirichlet, on choisit d'imposer $v(a) = 0$, c'est à dire de choisir $v \in V_a(0) \subset H^1(a; b)$. L'équation (2.3.10) devient alors $\forall v \in V_b(0)$

$$\begin{aligned} \int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx + \alpha_b u(b)v(b) \\ = \int_a^b f(x)v(x)dx + g_b v(b). \end{aligned}$$

Donc $u \in H^2(a; b)$ est solution de la formulation variationnelle (2.3.2).

⊇ Soit u solution $H^2(a; b)$ de la formulation variationnelle (2.3.2). Comme $C_c^\infty(\Omega) \subset V_a(0)$, on a

$$\mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v), \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega)$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx \\ = \int_a^b f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega). \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

On en déduit alors, $\forall v \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\left| \int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx \right| \leq \int_a^b |c(x)u(x)v(x)|dx + \left| \int_a^b f(x)v(x)dx \right|. \quad (2.3.12)$$

Comme u et v sont dans $L^2(a; b)$, on obtient d'après le théorème 7, $uv \in L^1(a; b)$ et on peut alors utiliser l'inégalité de Holder entre $c \in L^\infty(a; b)$ et uv

$$\int_a^b |c(x)u(x)v(x)|dx \leq \|c\|_{L^\infty(a; b)} \|uv\|_{L^1(a; b)}.$$

Une nouvelle application de l'inégalité de Holder entre u et v , permet d'obtenir

$$\int_a^b |c(x)u(x)v(x)|dx \leq \|c\|_{L^\infty(a; b)} \|u\|_{L^2(a; b)} \|v\|_{L^2(a; b)}.$$

Comme f et u sont dans $L^2(a; b)$, on obtient d'après le théorème de Cauchy-Schwarz 4,

$$\left| \int_a^b f(x)v(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^2(a; b)} \|v\|_{L^2(a; b)}.$$

En utilisant ces deux dernières inégalités 2.3.12 devient, $\forall v \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\left| \int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx \right| \leq (\|c\|_{L^\infty(a; b)} \|u\|_{L^2(a; b)} + \|f\|_{L^2(a; b)}) \|v\|_{L^2(a; b)}.$$

D'après le lemme ??, on obtient que mu' est dérivable au sens faible dans $L^2(a; b)$ et on note $(mu')' \in L^2(a; b)$ sa dérivée faible telle que

$$\int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx = - \int_a^b (m(x)u'(x))'v(x)dx.$$

L'équation (2.3.11) peut donc s'écrire

$$\int_a^b ((m(x)u'(x))' + c(x)u(x) - f(x))v(x)dx = 0, \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

D'après le corollaire 2, ceci permet de conclure que

$$(m(x)u'(x))' + c(x)u(x) - f(x) = 0 \text{ presque partout dans } [a; b]. \quad (2.3.13)$$

Il reste à montrer que u vérifie les conditions aux limites (2.3.8) et (2.3.9). Comme $u \in V_a(u_a)$, la condition (2.3.8) est immédiatement vérifiée. Pour obtenir (2.3.9), on utilise la formule d'intégration par partie (1.4.24) entre mu' et v . En effet, on a $mu' \in L^2(a; b)$ et $(mu')' \in L^2(a; b)$ donc $mu' \in H^1(a; b)$ et on obtient, $\forall v \in V_b(0)$,

$$\int_a^b m(x)u'(x)v'(x)dx = - \int_a^b (m(x)u'(x))'v(x)dx - m(a)u'(a)v(a).$$

De formulation variationnelle (2.3.2) on en déduit, $\forall v \in V_a(0)$,

$$\begin{aligned} - \int_a^b (m(x)u'(x))' v(x) dx + m(b)u'(b)v(b) + \int_a^b c(x)u(x)v(x) dx + \alpha_b u(b)v(b) \\ = \\ \int_a^b f(x)v(x) dx + g_b v(b). \end{aligned}$$

ou encore

$$\int_a^b (-m(x)u'(x))' + c(x) - f(x) v(x) dx = (-m(b)u'(b) - \alpha_b u(b) + g_b) v(b).$$

En utilisant (2.3.13), on a alors

$$(-m(b)u'(b) - \alpha_b u(b) + g_b) v(b) = 0, \quad \forall v \in V_b(0)$$

et donc en choisissant $v(x) = (x - a)/(b - a)$ qui est dans $V_a(0)$ et telle que $v(b) = 1$ on obtient

$$-m(b)u'(b) - \alpha_b u(b) + g_b = 0.$$

□

2.4 Discrétisation

On introduit un maillage τ_h de l'intervalle $[a; b]$ en $N + 1$ sous-intervalles $I_k = [x_k; x_{k+1}]$ de longueur $h_k = x_{k+1} - x_k$, pour $k \in \{0, \dots, N\}$, avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$.

Definition 22 On définit X_h^r , espace des éléments de Lagrange de degré $r \geq 1$, par

$$X_h^r = \{v_h \in C^0([a; b]) \text{ telles que } v_h|_{[x_j; x_{j+1}]} \in \mathbb{P}^r, \quad j = 0, \dots, N\} \quad (2.4.1)$$

où \mathbb{P}^r est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à r .

On note

$$V_h = X_h^1 \cap H^1(a; b) \quad (2.4.2)$$

$$V_{a,h}(\lambda) = X_h^1 \cap V_a(\lambda) \quad (2.4.3)$$

$$V_{b,h}(\lambda) = X_h^1 \cap V_b(\lambda) \quad (2.4.4)$$

$$V_{0,h} = X_h^1 \cap H_0^1(a; b) \quad (2.4.5)$$

Lemma 19 Muni du produit scalaire de $H^1(a; b)$ et de la norme induite, les espaces V_h , $V_{0,h}$, $V_{a,h}(0)$ et $V_{b,h}(0)$ sont des espaces de Hilbert.

Pour $\lambda \neq 0$, $V_{a,h}(\lambda)$ et $V_{b,h}(\lambda)$ ne sont pas des espaces vectoriels.

Lemma 20 L'espace V_h est de dimension $N + 2$ et les fonctions $(\varphi_i)_{i \in \{0, \dots, N+1\}}$ de X_h^1 définies par

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \{0, \dots, N + 1\}$$

forment une base de X_h^1 . On a alors

$$\forall v_h \in X_h^1, \forall x \in [a; b], v_h(x) = \sum_{j=0}^{N+1} v_h(x_j) \varphi_j(x)$$

Corolaire 31 L'espace $V_{0h} = X_h^1 \cap H_0^1(a; b)$ est un sous-espace de $H^1(a; b)$ de dimension N et les fonctions $(\varphi_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$ de V_{0h} définies par

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \forall i, j \in \{0, \dots, N+1\}$$

forment une base de V_{0h} . On a alors

$$\forall v_h \in V_{0h}, \forall x \in [a; b], v_h(x) = \sum_{j=1}^N v_h(x_j) \varphi_j(x)$$

Chapitre 3

En dimension d

3.1 Problème modèle

Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d dont la frontière Γ est \mathcal{C}^1 par morceaux. Soit Γ^D et Γ^R deux parties complémentaires de Γ :

$$\Gamma = \Gamma^D \cup \Gamma^R, \quad \Gamma^D \cap \Gamma^R = \emptyset.$$

Nous voulons résoudre l'E.D.P. suivante :

$$-\operatorname{div}(\mathbb{M} \nabla u) + \operatorname{div}(\mathbf{p}u) + \langle \mathbf{q}, \nabla u \rangle + a_0 u = f \quad \text{dans } \Omega \quad (3.1.1)$$

$$u = g_D \quad \text{sur } \Gamma^D \quad (3.1.2)$$

$$a_1 u + \langle \mathbb{M} \nabla u, \mathbf{n} \rangle = g_R \quad \text{sur } \Gamma^R \quad (3.1.3)$$

où \mathbf{n} désigne la normale à Γ orientée vers l'extérieur de Ω .

Les fonctions $\mathbf{p} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\mathbf{q} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\mathbb{M} : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ sont données.

\mathbb{M} est une matrice carrée d'ordre d qui dépend continûment de la variable $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)$.

$$\operatorname{div}(\mathbb{M} \nabla u) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left[M_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right]$$

Pour obtenir, sous certaines hypothèses à déterminer, l'existence et l'unicité d'une solution au problème (3.1.1)-(3.1.3)-(??) on l'écrit sous une forme variationnelle équivalente puis on utilise le théorème de Lax-Milgram ??.

3.2 Définitions et résultats

On présente ici quelques définitions et résultats utiles à l'étude des formulations variationnelles

3.2.1 ...

Proposition 4 Soient $\mathbf{b} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^d$ et $v \in H^1(\Omega)$. Alors, on a

$$\int_{\Omega} \langle \mathbf{b}, \nabla v \rangle v = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{b}) v^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle v^2. \quad (3.2.1)$$

Preuve : On applique la proposition 12 avec $p = q = 2$ et $r = 1$. On a donc $v^2 = v \times v \in W^{1,1}(\Omega)$ et

$$\frac{\partial v^2}{\partial x_i} = 2v \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket.$$

Comme pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et $v^2 \in W^{1,1}(\Omega)$, on peut appliquer le théorème 22 pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} v^2 &= \int_{\Gamma} \gamma(b_i) \gamma(v^2) n_i - \int_{\Omega} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} (v^2) \\ &= \int_{\Gamma} b_i n_i v^2 - 2 \int_{\Omega} b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} v \end{aligned}$$

En sommant sur i on obtient (3.2.1). \square

Théorème 32 Soient $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ et $\mathbb{M}_{i,j} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ pour $i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Alors, on a

$$\int_{\Omega} \langle \mathbb{M} \nabla u, \nabla v \rangle = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{M} \nabla u) v + \int_{\Gamma} \langle \mathbb{M} \nabla u, \mathbf{n} \rangle v. \quad (3.2.2)$$

Preuve : Comme $u \in H^2(\Omega)$, on a, pour $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in W^{1,2}(\Omega)$. En utilisant la proposition 12, avec $p = q = 2$ et $r = 1$, pour $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in W^{1,2}(\Omega)$ et $\mathbb{M}_{i,j} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ on obtient

$$\forall i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket \quad \mathbb{M}_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \in W^{1,2}(\Omega).$$

On est alors sous les hypothèses du théorème 22 et on a, $\forall i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{M}_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} &= \int_{\Gamma} \gamma \left(\mathbb{M}_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \gamma(v) n_i - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbb{M}_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v \\ &= \int_{\Gamma} \mathbb{M}_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} v n_i - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbb{M}_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v \end{aligned}$$

En sommant sur i et j on obtient (3.2.2). \square

3.2.2 Etude de l'application \mathcal{L}_f^g

Definition 23 Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma^R)$. On définit l'application \mathcal{L}_f^g de $H^1(\Omega)$ à valeurs réelles par

$$\mathcal{L}_f^g(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma^R} g v. \quad (3.2.3)$$

Lemma 21 Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma^R)$. L'application \mathcal{L}_f^g définie par (3.2.3) est linéaire continue : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad |\mathcal{L}_f^g(v)| \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.2.4)$$

Preuve : La linéarité de \mathcal{L}_f^g est immédiate par linéarité de l'intégrale. Pour démontrer la continuité, il suffit d'établir (3.2.4). On a, $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$|\mathcal{L}_f^g(v)| \leq \left| \int_{\Omega} f v \right| + \left| \int_{\Gamma^R} g v \right|$$

Comme f et v sont dans $L^2(\Omega)$, on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_{\Omega} f v \right| = \left| \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme $v \in H^1(\Omega)$, on a alors

$$\left| \int_{\Omega} f v \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.2.5)$$

De plus

$$\left| \int_{\Gamma^R} g v \right| = \left| \int_{\Gamma^R} g \gamma_{\Gamma^R}(v) \right|$$

et d'après le théorème de trace 19, on a $\gamma_{\Gamma^R}(v) \in L^2(\Gamma^R)$. On peut donc appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_{\Gamma^R} g v \right| \leq \|g\|_{L^2(\Gamma^R)} \|\gamma_{\Gamma^R}(v)\|_{L^2(\Gamma^R)}.$$

De part la continuité de l'application linéaire γ_{Γ^R} , il existe une constante $C_{\gamma} > 0$ telle que

$$\left| \int_{\Gamma^R} g v \right| \leq C_{\gamma} \|g\|_{L^2(\Gamma^R)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.2.6)$$

Au final, en utilisant (3.2.5) et (3.2.6), nous obtenons (3.2.4) avec $C = \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_{\gamma} \|g\|_{L^2(\Gamma^R)}$. \square

3.2.3 Etude de l'application $\mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^{\mu}$

Definition 24 Soient $\mathbb{M}_{i,j}, \mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i, a_0 \in L^{\infty}(\Omega)$, pour $i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et $\mu \in L^{\infty}(\Gamma)$. On définit l'application $\mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^{\mu}$ de $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ à valeurs réelles par, $\forall u, v \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^{\mu}(u, v) &= \int_{\Omega} \langle \mathbb{M} \nabla u, \nabla v \rangle + \int_{\Omega} a_0 u v \\ &\quad - \int_{\Omega} (u \langle \mathbf{p}, \nabla v \rangle - \langle \nabla u, \mathbf{q} \rangle v) + \int_{\Gamma} \mu u v. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Lemma 22 (Bilinéarité et continuité) Soient $\mathbb{M}_{i,j}, \mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i, a_0 \in L^{\infty}(\Omega)$, pour $i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et $\mu \in L^{\infty}(\Gamma)$. L'application $\mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^{\mu}$ définie par (3.2.7) est bilinéaire continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et il existe une constante $C_{\mathcal{A}} > 0$ telle que

$$\forall u, v \in H^1(\Omega) \quad |\mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^{\mu}(u, v)| \leq C_{\mathcal{A}} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.2.8)$$

Preuve : Pour simplifier les notations, on pose $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^\mu$.

La bilinéarité de $\mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^\mu$ est immédiate par linéarité de l'intégrale, de l'opérateur ∇ , ...

Pour démontrer la continuité, il suffit d'établir (3.2.8).

Soient $u, v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(u, v)| &\leq \left| \int_{\Omega} \langle \mathbb{M} \nabla u, \nabla v \rangle \right| + \left| \int_{\Omega} a_0 uv \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} u \langle \mathbf{p}, \nabla v \rangle \right| + \left| \int_{\Omega} \langle \nabla u, \mathbf{q} \rangle v \right| + \left| \int_{\Gamma} \mu uv \right|. \end{aligned}$$

On étudie chacun des termes dans l'inégalité.

- Majoration du terme en a_0 :

$$\left| \int_{\Omega} a_0 uv \right| \leq \int_{\Omega} |a_0 uv|.$$

Comme $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, on a, d'après le théorème 7, $uv \in L^1(\Omega)$. De plus $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, l'inégalité de Hölder donne alors

$$\int_{\Omega} |a_0 uv| \leq \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|uv\|_{L^1(\Omega)}.$$

Une nouvelle application de l'inégalité de Hölder à $\|uv\|_{L^1(\Omega)}$, donne

$$\int_{\Omega} |a_0 uv| \leq \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant (??), on obtient

$$\left| \int_{\Omega} a_0 uv \right| \leq \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.2.9)$$

- Majoration du terme en \mathbb{M} :

$$\left| \int_{\Omega} \langle \mathbb{M} \nabla u, \nabla v \rangle \right| \leq \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left| \int_{\Omega} \mathbb{M}_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|$$

Comme pour $i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\mathbb{M}_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ et $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, on a, d'après le théorème 7, $\frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$ et l'inégalité de Hölder donne

$$\left| \int_{\Omega} \langle \mathbb{M} \nabla u, \nabla v \rangle \right| \leq \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \|\mathbb{M}_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\Omega)}.$$

Notons $C_{\mathbb{M}} = \max_{i,j \in \llbracket 1, d \rrbracket} \|\mathbb{M}_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}$. Par application de l'inégalité de Hölder

à $\left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\Omega)}$, on obtient

$$\left| \int_{\Omega} \langle \mathbb{M} \nabla u, \nabla v \rangle \right| \leq C_{\mathbb{M}} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

Or, par propriété de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, on a

$$\forall u \in H^1(\Omega), \forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.2.10)$$

ce qui donne

$$\left| \int_{\Omega} \langle \mathbb{M} \nabla u, \nabla v \rangle \right| \leq d^2 C_{\mathbb{M}} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.2.11)$$

- Majoration du terme en \mathbf{p} :

$$\left| \int_{\Omega} u \langle \mathbf{p}, \nabla v \rangle \right| \leq \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left| \mathbf{p}_i \frac{\partial v}{\partial x_i} u \right|$$

Comme pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\mathbf{p}_i \in L^\infty(\Omega)$, $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, on a, d'après le théorème 7, $u \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$ et l'inégalité de Hölder donne

$$\left| \int_{\Omega} u \langle \mathbf{p}, \nabla v \rangle \right| \leq \sum_{i=1}^d \|\mathbf{p}_i\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\Omega)}.$$

Notons $C_{\mathbf{p}} = \max_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \|\mathbf{p}_i\|_{L^\infty(\Omega)}$. Par application de l'inégalité de Hölder à

$\left\| u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\Omega)}$, on obtient

$$\left| \int_{\Omega} u \langle \mathbf{p}, \nabla v \rangle \right| \leq C_{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

En appliquant (3.2.10) et (??), on a

$$\left| \int_{\Omega} u \langle \mathbf{p}, \nabla v \rangle \right| \leq d C_{\mathbf{p}} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.2.12)$$

- Majoration du terme en \mathbf{q} :

Comme pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\mathbf{q}_i \in L^\infty(\Omega)$, on a aussi

$$\left| \int_{\Omega} v \langle \mathbf{q}, \nabla u \rangle \right| \leq d C_{\mathbf{q}} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.2.13)$$

avec $C_{\mathbf{q}} = \max_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \|\mathbf{q}_i\|_{L^\infty(\Omega)}$.

- Majoration du terme en μ :

On a, par définition de l'application trace γ_{Γ} (1.4.26)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} \mu uv \right| &= \left| \int_{\Gamma} \mu \gamma_{\Gamma}(u) \gamma_{\Gamma}(v) \right| \\ &\leq \int_{\Gamma} |\mu \gamma_{\Gamma}(u) \gamma_{\Gamma}(v)| \end{aligned}$$

Comme $\gamma_{\Gamma}(u)$ et $\gamma_{\Gamma}(v)$ sont dans $L^2(\Gamma)$, d'après le théorème 7, $\gamma_{\Gamma}(u) \gamma_{\Gamma}(v) \in L^1(\Gamma)$. De plus $\mu \in L^\infty(\Gamma)$, on peut donc appliquer l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\left| \int_{\Gamma} \mu uv \right| \leq \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\gamma_{\Gamma}(u) \gamma_{\Gamma}(v)\|_{L^1(\Gamma)}.$$

Une nouvelle application de l'inégalité de Hölder à $\|\gamma_\Gamma(u)\gamma_\Gamma(v)\|_{L^1(\Gamma)}$ donne

$$\left| \int_\Gamma \mu uv \right| \leq \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\gamma_\Gamma(u)\|_{L^2(\Gamma)} \|\gamma_\Gamma(v)\|_{L^2(\Gamma)}.$$

D'après le théorème de trace 17, il existe une constante $C_\gamma > 0$ telle que

$$\forall w \in H^1(\Omega), \|\gamma_\Gamma(w)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_\gamma \|w\|_{H^1(\Omega)}.$$

On obtient alors

$$\left| \int_\Gamma \mu uv \right| \leq C_\gamma^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.2.14)$$

En regroupant les inégalités (3.2.9), (3.2.11), (3.2.12), (3.2.13) et (3.2.14), on obtient (3.2.8) avec

$$C_{\mathcal{A}} = \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} + d^2 C_{\mathbb{M}} + d(C_{\mathbf{p}} + C_{\mathbf{q}}) + C_\gamma^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma)} > 0.$$

□

Lemma 23 (coercivité) Soient $\mathbb{M}_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\mu \in L^\infty(\Gamma)$ et $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^d$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\nu \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \langle \mathbb{M}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle \geq \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \quad \text{pour presque tout } \boldsymbol{x} \in \Omega. \quad (3.2.15)$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{p}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{q}(\boldsymbol{x})) + a_0(\boldsymbol{x}) \geq \beta \quad \text{pour presque tout } \boldsymbol{x} \in \Omega \quad (3.2.16)$$

et

$$\mu(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2} \langle \mathbf{p}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{q}(\boldsymbol{x}), \mathbf{n}(\boldsymbol{x}) \rangle \geq \nu \quad \text{pour presque tout } \boldsymbol{x} \in \Gamma. \quad (3.2.17)$$

L'application $\mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^\mu$ définie par (3.2.7) est V -elliptique pour

- $V = H_0^1(\Omega)$ si

$$\beta > -\frac{\alpha}{C_\Omega^2},$$

- $V = H^1(\Omega)$ si

$$\beta > 0 \quad \text{et} \quad \nu > -\frac{\min(\alpha, \beta)}{C_\Gamma^2 |\Gamma|},$$

- $V = H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega)$ si

$$\beta > -\frac{\alpha}{C_\Omega^2} \quad \text{et} \quad \nu > -\frac{\alpha + \beta C_\Omega^2}{C_{\Gamma^R}^2 |\Gamma^R| (C_\Omega^2 + 1)}.$$

Preuve : Pour simplifier les notations, on pose $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^\mu$.

Soit $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, u) &= \int_\Omega \langle \mathbb{M} \nabla u, \nabla u \rangle + \int_\Omega a_0 u^2 \\ &\quad - \int_\Omega u \langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \nabla u \rangle + \int_\Gamma \mu u^2. \end{aligned}$$

Comme $(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \in (W^{1,\infty}(\Omega))^d$ et $u \in H^1(\Omega)$, on obtient en utilisant la proposition 4

$$\int_{\Omega} \langle \mathbf{p}-\mathbf{q}, \nabla u \rangle u = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) u^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \langle \mathbf{p}-\mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle u^2$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, u) &= \int_{\Omega} \langle \mathbb{M} \nabla u, \nabla u \rangle + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + a_0 \right) u^2 \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left(\mu - \frac{1}{2} \langle \mathbf{p}-\mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle \right) u^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega) \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

- $V = H_0^1(\Omega)$

On a alors, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\mathcal{A}(u, u) = \int_{\Omega} \langle \mathbb{M} \nabla u, \nabla u \rangle + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + a_0 \right) u^2.$$

En utilisant (3.2.15) et (3.2.16), on obtient

$$\mathcal{A}(u, u) \geq \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Si $\beta > 0$ on obtient directement

$$\mathcal{A}(u, u) \geq \min(\alpha, \beta) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

On suppose maintenant que $\beta \leq 0$. Comme $u \in H_0^1(\Omega)$ on peut utiliser l'inégalité de Poincaré (1.4.34) pour obtenir

$$\beta \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \beta C_{\Omega}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.2.19)$$

et donc

$$\mathcal{A}(u, u) \geq (\alpha + \beta C_{\Omega}^2) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Si $\alpha + \beta C_{\Omega}^2 > 0$, on peut alors utiliser l'inégalité (1.4.35) pour obtenir

$$\mathcal{A}(u, u) \geq \frac{\alpha + \beta C_{\Omega}^2}{C_{\Omega}^2 + 1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

- $V = H^1(\Omega)$

En utilisant (3.2.15), (3.2.16) et (3.2.17), on obtient

$$\mathcal{A}(u, u) \geq \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Si $\beta > 0$ et $\nu \geq 0$ on obtient directement

$$\mathcal{A}(u, u) \geq \min(\alpha, \beta) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

On suppose maintenant que $\beta > 0$ et $\nu < 0$. Par continuité de l'application linéaire trace sur Γ , (voir théorème 17) il existe $C_{\Gamma} > 0$ telle que

$$|\gamma(u)| \leq C_{\Gamma} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ce qui entraîne

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq C_{\Gamma}^2 |\Gamma| \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

On obtient donc

$$\mathcal{A}(u, u) \geq (\min(\alpha, \beta) + \nu C_{\Gamma}^2 |\Gamma|) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

- $V = H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega)$

En utilisant (3.2.15), (3.2.16) et (3.2.17), on obtient

$$\mathcal{A}(u, u) \geq \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|u\|_{L^2(\Gamma^R)}^2.$$

Si $\beta > 0$ et $\nu \geq 0$ on obtient directement

$$\mathcal{A}(u, u) \geq \min(\alpha, \beta) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega).$$

On suppose maintenant $\beta \leq 0$. Comme $u \in H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega)$ et $\text{mes}(\Gamma^D) > 0$, on peut utiliser l'inégalité de Poincaré (1.4.34) pour obtenir (3.2.19) et donc

$$\mathcal{A}(u, u) \geq (\alpha + \beta C_\Omega^2) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Si $\alpha + \beta C_\Omega^2 > 0$, on peut alors utiliser l'inégalité (1.4.35) pour obtenir

$$\mathcal{A}(u, u) \geq \frac{\alpha + \beta C_\Omega^2}{C_\Omega^2 + 1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \nu \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Donc, si $\beta > -\frac{\alpha}{C_\Omega^2}$ et $\nu \geq 0$, on a

$$\mathcal{A}(u, u) \geq \frac{\alpha + \beta C_\Omega^2}{C_\Omega^2 + 1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega).$$

On suppose maintenant que $\beta > -\frac{\alpha}{C_\Omega^2}$ et $\nu < 0$. Par continuité de l'application linéaire trace sur Γ^R , (voir théorème 19) il existe $C_{\Gamma^R} > 0$ telle que

$$|\gamma(u)| \leq C_{\Gamma^R} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ce qui entraîne

$$\|u\|_{L^2(\Gamma^R)}^2 \leq C_{\Gamma^R}^2 |\Gamma^R| \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

On obtient alors

$$\mathcal{A}(u, u) \geq \left(\frac{\alpha + \beta C_\Omega^2}{C_\Omega^2 + 1} + \nu C_{\Gamma^R}^2 |\Gamma^R| \right) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega).$$

On a donc coercivité si

$$\beta > -\frac{\alpha}{C_\Omega^2} \quad \text{et} \quad \nu > -\frac{\alpha + \beta C_\Omega^2}{C_\Gamma^2 |\Gamma| (C_\Omega^2 + 1)}.$$

□

3.3 Formulation variationnelle

Pour obtenir une formulation variationnelle associée au problème (3.1.1)-(3.1.2)-(3.1.3), on multiplie (3.1.1) par une fonction suffisamment régulière v et on intègre sur Ω :

$$\int_{\Omega} (-\text{div}(\mathbb{M} \nabla u) + \text{div}(\mathbf{p}u) + \langle \mathbf{q}, \nabla u \rangle + a_0 u) v = \int_{\Omega} f v \quad (3.3.1)$$

Ensuite, on utilise les propositions 4 et 32. Pour celà, on suppose ...
On obtient donc $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \mathbb{M} \nabla u, \nabla v \rangle - \int_{\Omega} (u \langle \mathbf{p}, \nabla v \rangle - \langle \mathbf{q}, \nabla u \rangle v) + \int_{\Omega} a_0 uv \\ - \int_{\Gamma} \langle \mathbb{M} \nabla u, \mathbf{n} \rangle v + \int_{\Gamma} \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle uv = \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

Pour la prise en compte de la condition aux limites (3.1.2), on prends $u \in H_{g_D, \Gamma^D}^1(\Omega)$ et $v \in H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega)$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \mathbb{M} \nabla u, \nabla v \rangle - (u \langle \mathbf{p}, \nabla v \rangle - \langle \mathbf{q}, \nabla u \rangle v) + a_0 uv \\ - \int_{\Gamma^R} \langle \mathbb{M} \nabla u, \mathbf{n} \rangle v + \int_{\Gamma^R} \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle uv = \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

On utilise maintenant la condition aux limites (3.1.3) pour obtenir, $\forall v \in H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \mathbb{M} \nabla u, \nabla v \rangle - (u \langle \mathbf{p}, \nabla v \rangle - \langle \mathbf{q}, \nabla u \rangle v) + a_0 uv \\ + \int_{\Gamma^R} (a_1 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle) uv = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma^R} g_R v \end{aligned}$$

Plus précisément on a

Théorème 33 Soient $\mathbb{M}_{i,j} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ pour $i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket$. $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^d$.

... Alors $u \in H^2(\Omega)$ est solution du problème (3.1.1)-(3.1.2)-(3.1.3) si et seulement si elle est solution de la formulation variationnelle :

Trouver $u \in H_{g_D, \Gamma^D}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ telle que

$$\mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^{a_1 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle}(u, v) = \mathcal{L}_f^{g_R}(v) \quad \forall v \in H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega) \quad (3.3.2)$$

Preuve : On a déjà démontré que si $u \in H^2(\Omega)$ est solution du problème (3.1.1)-(3.1.2)-(3.1.3) alors u est solution de (3.3.2).

Il reste à démontrer la réciproque. On suppose donc qu'il existe $u \in H_{g_D, \Gamma^D}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ vérifiant (3.3.2). Comme $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega)$, on a

$$\mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^{a_1 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle}(u, v) = \mathcal{L}_f^{g_R}(v) \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

C'est à dire, $\forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} [\langle \mathbb{M} \nabla u, \nabla v \rangle - (u \langle \mathbf{p}, \nabla v \rangle - \langle \mathbf{q}, \nabla u \rangle v) + a_0 uv] = \int_{\Omega} f v$$

Comme $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega)$, on a $\gamma(v) = 0$. En utilisant les formules (3.2.2) et ..., on obtient

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(\mathbb{M} \nabla u) + \operatorname{div}(\mathbf{p}u) + \langle \mathbf{q}, \nabla u \rangle + a_0 u - f) v = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Comme $-\operatorname{div}(\mathbb{M} \nabla u) + \operatorname{div}(\mathbf{p}u) + \langle \mathbf{q}, \nabla u \rangle + a_0 u - f \in L^2(\Omega)$, d'après le corollaire 9 on a

$$-\operatorname{div}(\mathbb{M} \nabla u) + \operatorname{div}(\mathbf{p}u) + \langle \mathbf{q}, \nabla u \rangle + a_0 u - f = 0 \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (3.3.3)$$

Par hypothèse, $u \in H_{g_D, \Gamma^D}^1(\Omega)$ et donc la condition aux limites (3.1.2) est automatiquement vérifiée.

Pour retrouver (3.1.3), on utilise les formules (3.2.2) et ... dans (3.3.2) pour aboutir à

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (-\operatorname{div}(\mathbb{M} \nabla u) + \operatorname{div}(\mathbf{p}u) + \langle \mathbf{q}, \nabla u \rangle + a_0 u - f) v \\ &= \int_{\Gamma^R} (\langle \mathbb{M} \nabla u, \mathbf{n} \rangle + a_1 u - g_R) v, \quad \forall v \in H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega) \end{aligned}$$

On obtient, grâce à (3.3.3),

$$\int_{\Gamma^R} (\langle \mathbb{M} \nabla u, \mathbf{n} \rangle + a_1 u - g_R) v = 0, \quad \forall v \in H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega)$$

Or d'après le théorème ??, si $v \in H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega)$ alors $\gamma(v) \in L^2(\Gamma^R)$. On a $\langle \mathbb{M} \nabla u, \mathbf{n} \rangle + a_1 u - g_R \in L^2(\Gamma^R)$. De plus, d'après le théorème 20, $H^{1/2}(\Gamma^R)$ est dense dans $L^2(\Gamma^R)$. Il existe donc une suite $(w_n)_{n \geq 0}$ de $H^{1/2}(\Gamma^R)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - (\langle \mathbb{M} \nabla u, \mathbf{n} \rangle + a_1 u - g_R)\|_{L^2(\Gamma^R)} = 0.$$

A finir ... □

Théorème 34 *Sous les hypothèses ... la formulation variationnelle (3.3.2) admet une unique solution.*

Preuve : Comme $g_D \in H^{1/2}(\Gamma^D)$, il existe $R \in H^1(\Omega)$ telle que $\gamma_{\Gamma^D}(R) = g_D$. Dans ce cas le problème variationnelle

Trouver $w \in H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega)$ telle que

$$\mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^{a_1 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle}(w, v) = \mathcal{L}_f^{g_R}(v) - \mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^{a_1 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle}(R, v) \quad \forall v \in H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega) \quad (3.3.4)$$

admet une unique solution. En effet, cette formulation variationnelle vérifie les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

.... A DETAILLER

On pose $u = w + R$ qui est clairement dans $H_{g_D, \Gamma^D}^1(\Omega)$. Alors u vérifie (3.3.2) ce qui donne l'existence.

Pour l'unicité, on suppose qu'il existe u_1 et u_2 dans $H_{g_D, \Gamma^D}^1(\Omega)$ vérifiant (3.3.2). On a alors

$$\mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^{a_1 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle}(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega)$$

Or $u_1 - u_2 \in H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega)$, ce qui entraîne

$$\mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^{a_1 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle}(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

L'application $\mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^{a_1 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle}$ étant coercive sur $H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega)$, on en déduit qu'il existe $C > 0$ (constante de coercivité) telle que

$$0 = \mathcal{A}_{\mathbb{M}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, a_0}^{a_1 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle}(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq C \|u_1 - u_2\|_{H^1(\Omega)}^2$$

et donc $u_1 = u_2$. □

Chapitre 4

En dimension 2

4.1 Problème modèle

Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 dont la frontière Γ est \mathcal{C}^1 par morceaux. Soit Γ^D et Γ^R deux parties complémentaires de Γ :

$$\Gamma = \Gamma^D \cup \Gamma^R, \quad \Gamma^D \cap \Gamma^R = \emptyset.$$

Nous voulons résoudre l'E.D.P. suivante :

$$-\operatorname{div}(\mathbb{M}\nabla u) + a_0 u = f \quad \text{dans } \Omega \quad (4.1.1)$$

$$u = g_D \quad \text{sur } \Gamma^D \quad (4.1.2)$$

$$a_1 u + \langle \mathbb{M}\nabla u, \mathbf{n} \rangle = g_R \quad \text{sur } \Gamma^R \quad (4.1.3)$$

où \mathbf{n} désigne la normale à Γ orientée vers l'extérieur de Ω . \mathbb{M} est une matrice carrée d'ordre 2 symétrique qui dépend continûment de la variable $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$.

$$\operatorname{div}(\mathbb{M}\nabla u) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[M_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right]$$

Pour obtenir, sous certaines hypothèses à déterminer, l'existence et l'unicité d'une solution au problème (4.1.1)-(4.1.2)-(4.1.3) on l'écrit sous une forme variationnelle équivalente puis on utilise le théorème de Lax-Milgram ??.

4.2 Formulation variationnelle continue

Pour obtenir une formulation variationnelle associée au problème (4.1.1)-(4.1.2)-(4.1.3), on multiplie (4.1.1) par une fonction suffisamment régulière v et on intègre sur Ω :

$$\int_{\Omega} (a_0(\vec{\mathbf{x}})u(\vec{\mathbf{x}}) - (\operatorname{div}(\mathbb{M}\nabla u))(\vec{\mathbf{x}})) v(\vec{\mathbf{x}}) d\Omega(\vec{\mathbf{x}}) = \int_{\Omega} f(\vec{\mathbf{x}})v(\vec{\mathbf{x}}) d\Omega(\vec{\mathbf{x}}) \quad (4.2.1)$$

Lemme 24 Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d de frontière Γ , C^1 par morceaux. Alors, $\forall u \in H^2(\Omega)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$, et $\forall i, j \in \{1, \dots, d\}$ $M_{ij} \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{M} \nabla u)(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) \\ &= \\ & - \int_{\Omega} \langle (\mathbb{M} \nabla u)(\vec{x}), \nabla v(\vec{x}) \rangle d\Omega(\vec{x}) + \int_{\Gamma} \langle (\mathbb{M} \nabla u)(\vec{x}), \mathbf{n}(\vec{x}) \rangle v(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}), \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Preuve : On a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{M} \nabla u)(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[M_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] v(\vec{x}) d\Omega(\vec{x})$$

or $M_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \in H^1(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on peut donc appliquer la formule de Green (??)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[M_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] (\vec{x}) v(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) = - \int_{\Omega} M_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j}(\vec{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) + \int_{\Gamma} M_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j}(\vec{x}) v(\vec{x}) n_i(x) d\Gamma(\vec{x}).$$

et donc

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{M} \nabla u)(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) = - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} M_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j}(\vec{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_{\Gamma} M_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j}(\vec{x}) n_i(x) v(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x})$$

ce qui prouve le résultat. \square

En se plaçant sous les hypothèses du lemme précédent, (4.2.1) devient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a_0(\vec{x}) u(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) + \int_{\Omega} \langle \nabla v(\vec{x}), (\mathbb{M} \nabla u)(\vec{x}) \rangle d\Omega(\vec{x}) - \int_{\Gamma} v(\vec{x}) \langle (\mathbb{M} \nabla u)(\vec{x}), \mathbf{n}(\vec{x}) \rangle d\Gamma(\vec{x}) \\ &= \\ & \int_{\Omega} f(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

On décompose ensuite l'intégrale sur le bord

$$\int_{\Gamma} v(\vec{x}) \langle (\mathbb{M} \nabla u)(\vec{x}), \mathbf{n}(\vec{x}) \rangle d\Gamma(\vec{x}) = \int_{\Gamma^D} v(\vec{x}) \langle (\mathbb{M} \nabla u)(\vec{x}), \mathbf{n}(\vec{x}) \rangle d\Gamma(\vec{x}) + \int_{\Gamma^R} v(\vec{x}) \langle (\mathbb{M} \nabla u)(\vec{x}), \mathbf{n}(\vec{x}) \rangle d\Gamma(\vec{x})$$

On utilise la condition de Robin (4.1.3) sur Γ^R pour obtenir

$$\int_{\Gamma^R} v(\vec{x}) \langle (\mathbb{M} \nabla u)(\vec{x}), \mathbf{n}(\vec{x}) \rangle d\Gamma(\vec{x}) = \int_{\Gamma^R} g_R(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}) - \int_{\Gamma^R} a_1(\vec{x}) u(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}).$$

Pour éviter d'avoir à définir proprement $(\mathbb{M} \nabla u)$ sur Γ^D , on choisit v de telle sorte d'annuler l'intégrale sur le bord Dirichlet : $v|_{\Gamma^D} = 0$. L'équation (4.2.3) devient alors

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a_0(\vec{x}) u(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) + \int_{\Omega} \langle \nabla v(\vec{x}), (\mathbb{M} \nabla u)(\vec{x}) \rangle d\Omega(\vec{x}) + \int_{\Gamma^R} a_1(\vec{x}) u(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}) \\ &= \\ & \int_{\Omega} f(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) + \int_{\Gamma^R} g_R(\vec{x}) v(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Definition 25 On définit $H_{g, \Gamma^D}^1(\Omega)$ par

$$H_{g, \Gamma^D}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Gamma^D} = g_D\} \quad (4.2.5)$$

Lemma 25 *Muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$, $H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Soit $g \in L^2(\Gamma^D)$, $g \neq 0$ alors $H_{g,\Gamma^D}^1(\Omega)$ n'est pas un espace de Hilbert.*

Preuve :

□

Une formulation variationnelle associée au problème (4.1.1)-(4.1.2)-(4.1.3) s'écrit :

<p>trouver $u \in H_{g_D,\Gamma^D}^1(\Omega)$, tel que</p> $\mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega), \quad (4.2.6)$ <p>avec</p> $\begin{aligned} \mathcal{A}(u, v) &= \int_{\Omega} \langle \nabla v(\vec{x}), (\mathbb{M} \nabla u)(\vec{x}) \rangle + a_0(\vec{x})u(\vec{x})v(\vec{x})d\Omega(\vec{x}) \\ &+ \int_{\Gamma^R} a_1(\vec{x})u(\vec{x})v(\vec{x})d\Gamma(\vec{x}) \end{aligned}$ <p>et</p> $\mathcal{L}(v) = \int_{\Omega} f(\vec{x})v(\vec{x})d\Omega(\vec{x}) + \int_{\Gamma^R} g_R(\vec{x})v(\vec{x})d\Gamma(\vec{x}).$

Théorème 35 *Sous les hypothèses Si $u \in H^2(\Omega)$, alors u solution du problème (4.1.1)-(4.1.2)-(4.1.3) si et seulement u solution de (4.2.14).*

Preuve :

□

Il n'est pas possible d'utiliser directement le théorème ?? (de Lax-Milgram) pour obtenir existence et unicité d'une solution de la formulation variationnelle (4.2.14).

Comme $g_D \in H^{1/2}(\Gamma^D)$, il existe un relèvement $R_D \in H^1(\Omega)$ tel que $\gamma_{\Gamma^D}(R_D) = g_D$. Supposons u soit solution de (4.2.14), on pose $w = u - R_D$, alors $w \in H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega)$ et, par bilinéarité de \mathcal{A} , w est solution de la formulation variationnelle

<p>trouver $w \in H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega)$, tel que</p> $\mathcal{A}(w, v) = \mathcal{L}_D(v) \quad \forall v \in H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega), \quad (4.2.7)$ <p>avec</p> $\mathcal{L}_D(v) = \mathcal{L}(v) - \mathcal{A}(R_D, v).$

On remarque tout de suite que cette formulation variationnelle est indépendante de u solution de (4.2.14); elle ne dépend que du relèvement R_D . Donc, si l'on obtient l'existence de w solution de (4.2.7) alors $u = w + R_D$ appartient à $H_{g_D,\Gamma^D}^1(\Omega)$ et est solution de (4.2.14).

Lemma 26 *L'application $\mathcal{L} : H^1(a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire continue.*

Preuve : A faire ... □

Lemma 27 *L'application $\mathcal{A} : H^1(a; b) \times H^1(a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire continue.*

Preuve : A faire ... □

Théorème 36 *Sous les hypothèses ... la formulation variationnelle (4.2.14) admet une unique solution.*

Preuve : On va vérifier que l'on est sous les hypothèses du théorème ?? (de Lax-Milgram). □

4.2.1 Problème homogène associé

Le problème homogène associé à (4.1.1-4.1.2-4.1.3) consiste à prendre $g_D = 0$ et à chercher $u_0 \in H_{0, \Gamma^D}^1$ solution de

$$-\operatorname{div}(\mathbb{M} \nabla u_0) + a_0 u_0 = f \quad \text{dans } \Omega \quad (4.2.8)$$

$$u_0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma^D \quad (4.2.9)$$

$$a_1 u_0 + \langle \mathbb{M} \nabla u_0, \mathbf{n} \rangle = g_R \quad \text{sur } \Gamma^R \quad (4.2.10)$$

En multipliant (4.2.8) par une fonction test $v \in H_{0, \Gamma^D}^1$, on obtient

$$\int_{\Omega} (a_0(\vec{x})u_0(\vec{x}) - (\operatorname{div}(\mathbb{M} \nabla u_0))(\vec{x}))v(\vec{x})d\Omega(\vec{x}) = \int_{\Omega} f(\vec{x})v(\vec{x})d\Omega(\vec{x}) \quad (4.2.11)$$

En utilisant la formule de Green nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v(\vec{x})(\operatorname{div}(\mathbb{M} \nabla u_0))(\vec{x})d\Omega(\vec{x}) &= - \int_{\Omega} \langle \nabla v(\vec{x}), (\mathbb{M} \nabla u_0)(\vec{x}) \rangle d\Omega(\vec{x}) \\ &\quad + \int_{\Gamma} v(\vec{x}) \langle (\mathbb{M} \nabla u_0)(\vec{x}), \mathbf{n}(\vec{x}) \rangle d\Gamma(\vec{x}) \end{aligned}$$

Comme $v|_{\Gamma^D} = 0$, l'équation (4.2.11) devient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla v(\vec{x}), (\mathbb{M} \nabla u_0)(\vec{x}) \rangle + a_0(\vec{x})u_0(\vec{x})v(\vec{x})d\Omega(\vec{x}) \\ - \int_{\Gamma^R} v(\vec{x}) \langle (\mathbb{M} \nabla u_0)(\vec{x}), \mathbf{n}(\vec{x}) \rangle d\Gamma(\vec{x}) \\ = \int_{\Omega} f(\vec{x})v(\vec{x})d\Omega(\vec{x}) \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

On définit $H_{g, \Gamma^D}^1(\Omega)$ par

$$H_{g, \Gamma^D}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Gamma^D} = g_D\} \quad (4.2.13)$$

Une formulation variationnelle associée au problème (4.1.1)-(4.1.3)-(??) s'écrit :

trouver $u \in H_{g_D, \Gamma^D}^1$, tel que

$$\mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in H_{0, \Gamma^D}^1, \quad (4.2.14)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, v) &= \int_{\Omega} \langle \nabla v(\vec{x}), (\mathbb{M} \nabla u)(\vec{x}) \rangle + a_0(\vec{x})u(\vec{x})v(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) \\ &+ \int_{\Gamma^R} a_1(\vec{x})u(\vec{x})v(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}(v) = \int_{\Omega} f(\vec{x})v(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) + \int_{\Gamma^R} g_R(\vec{x})v(\vec{x}) d\Gamma(\vec{x}).$$

4.3 Éléments finis de degré un (P^1)

4.3.1 Triangulation

Nous découpons d'abord Ω en petits éléments. Nous les choisissons ici de forme triangulaire, mais nous pourrions également envisager une décomposition en petits rectangles, par exemple. Les triangles doivent satisfaire à la

Definition 26 On appelle triangulation de Ω , une famille \mathcal{T}_h de triangles T_k , $k = 1, \dots, n_{me}$, ayant les propriétés suivantes :

- (i) l'intersection entre deux triangles distincts est soit vide, soit réduite à une coté entier ou à un point ;
- (ii) tous les coins de la frontière Γ sont des sommets de triangles de \mathcal{T}_h ;
- (iii) réciproquement, soit

$$\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{n_{me}} T_k \quad (4.3.1)$$

(remarquer que Ω_h est fermé) ; tous les coins de $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ doivent être sur Γ ;

- (iv) les triangles ne sont pas dégénérés, ie. ils ne sont pas d'aire nulle. ▲

Remarque 3 nous avons

$$\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{n_{me}} T_k \quad \text{et} \quad \bigcap_{k=1}^{n_{me}} \overset{\circ}{T}_k = \emptyset \quad (4.3.2)$$

Les sommets de tous les triangles de \mathcal{T}_h sont les **sommets de la triangulation**. S'agissant d'une approximation par éléments finis P^1 , nous verrons que ces sommets sont aussi les **nœuds de la triangulation**, ie. les points où nous allons calculer la solution du problème discret. Il y a donc ici coïncidence entre les notions de sommets et de nœuds du maillage, coïncidence qui n'aurait pas lieu pour une approximation par éléments finis d'ordre quelconque.

La triangulation \mathcal{T}_h à n_{me} triangles, n_q sommets et n_f sommets situés sur Γ_h . Cette triangulation est indexée par h qui est la longueur du plus grand des cotés de tous ses triangles.

4.3.2 Structure de données associée au maillage

On utilise 3 tableaux (un tableau de réels q , 4 tableaux d'entiers me , ql , be et bel) et 2 entiers (n_q et n_{me}) pour stocker les informations relatives au maillage ; il s'agit de :

nom	type	dimension	descriptif
n_q	entier	1	nombre total de nœuds du maillage (<i>number of nodes</i>)
n_{me}	entier	1	nombre de triangles (<i>number of mesh elements</i>)
n_{be}	entier	1	nombre d'arêtes sur le bord Γ_h , (<i>number of boundary elements</i>)
q	réels	$2 \times n_q$	$q(\alpha, j)$ est α -ème coordonnée du j -ème sommet, $\alpha \in \{1, 2\}$ et $i \in \{1, \dots, n_q\}$. Le j -ème sommet sera aussi noté q^j avec $q_x^j = q(1, j)$ et $q_y^j = q(2, j)$ (<i>nodes</i>)
me	entier	$3 \times n_{me}$	$me(\beta, k)$ indice de stockage, dans le tableau q , du β -ème sommet du triangle d'indice k , $\beta \in \{1, 2, 3\}$ et $k \in \{1, \dots, n_{me}\}$. (<i>mesh elements</i>)
be	entier	$2 \times n_{be}$	$be(\alpha, l)$ indice de stockage, dans le tableau q , du α -ème sommet de l'arête d'indice l appartenant au bord Γ_h , $\alpha \in \{1, 2\}$ et $l \in \{1, \dots, n_{be}\}$. (<i>boundary elements</i>)
ql	entier	$1 \times n_q$	$ql(i)$ indique si le i -ème sommet est un point strictement intérieur du domaine Ω ($ql(i) = 0 \Leftrightarrow q^i \notin \Gamma_h$ sinon indique le numéro du bord, $i \in \{1, \dots, n_q\}$). (<i>nodes label</i>)
bel	entier	$1 \times n_{be}$	$bel(l)$ indique le numéro du bord d'appartenance de l'arête l , $l \in \{1, \dots, n_{be}\}$. (<i>boundary elements label</i>)
mel	entier	$1 \times n_{me}$	$mel(k)$ indique la région dans laquelle est le triangle T_k , $k \in \{1, \dots, n_{me}\}$. (<i>mesh elements label</i>)

Pour illustrer cette structure, nous allons générer à l'aide de **FreeFEM++** un maillage du disque unité où la frontière Γ sera réunion des quatre quarts de cercle (voir figure 4.3.1)

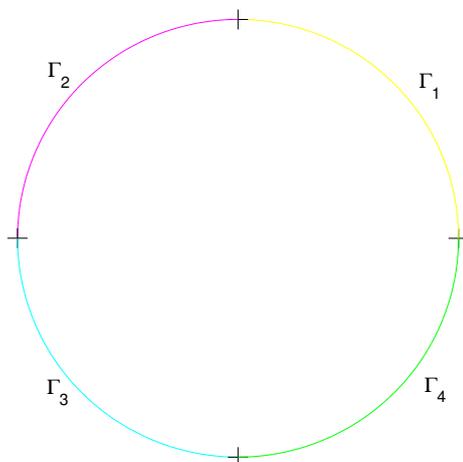


FIGURE 4.3.1 – Disque à mailler avec 4 bords

Voici le code **FreeFEM++** :

Listing 4.1 – fichier `disque4.edp`

```

real R=1.0; // rayon du disque
int N=3; // nombre de discrétisation pour un quart de cercle
border gamma1( t=0, pi/2) // Bord  $\Gamma_1$ 
    {x=R*cos(t); y=R*sin(t); label=1;};
border gamma2( t=pi/2, pi) // Bord  $\Gamma_2$ 
    {x=R*cos(t); y=R*sin(t); label=2;};
border gamma3( t=pi, 3*pi/2) // Bord  $\Gamma_3$ 
    {x=R*cos(t); y=R*sin(t); label=3;};
border gamma4( t=3*pi/2, 2*pi) // Bord  $\Gamma_4$ 
    {x=R*cos(t); y=R*sin(t); label=4;};

mesh Th = buildmesh ( gamma1(N)+gamma2(N)
    +gamma3(N)+gamma4(N) );

plot (Th, ps="disque4.eps", wait=true);

savemesh(Th, "disque4-"+R+"-"+N+".msh");

```

Pour obtenir un maillage de petite taille, nous avons délibérément choisi un petit nombre de points sur le bord : chaque quart de cercle sera discrétisé avec $N = 3$ points.

Voici le fichier `disque4-1-3.msh` généré :

Listing 4.2 – fichier `disque4-1-3.msh`

```

20 26 12 // nq, nme, nbe
-0.866025403784 0.5 2 // qx1, qy1, ql(1)
-0.579246826544 0.262259524467 0 // qx2, qy2, ql(2)

```

```

-0.5 0.866025403784 2 // qx3, qy3, ql(3)
-1 1.22460635382e-16 3 // qx4, qy4, ql(4)
6.12303176911e-17 1 2 // qx5, qy5, ql(5)
0.5 0.866025403784 1 // qx6, qy6, ql(6)
-0.158493650014 0.524519052007 0 // qx7, qy7, ql(7)
-0.433960984027 -0.11887024084 0 // qx8, qy8, ql(8)
-0.866025403784 -0.5 3 // qx9, qy9, ql(9)
0.183012699972 0.183012699972 0 // qx10, qy10, ql(10)
0.866025403784 0.5 1 // qx11, qy11, ql(11)
-0.0528312207692 -0.158493650014 0 // qx12, qy12, ql(12)
-0.288675135364 -0.5 0 // qx13, qy13, ql(13)
-0.5 -0.866025403784 3 // qx14, qy14, ql(14)
0.524519052007 -0.158493650014 0 // qx15, qy15, ql(15)
1 -2.44921270764e-16 4 // qx16, qy16, ql(16)
0.288675133315 -0.5 0 // qx17, qy17, ql(17)
-1.83690953073e-16 -1 4 // qx18, qy18, ql(18)
0.866025403784 -0.5 4 // qx19, qy19, ql(19)
0.5 -0.866025403784 4 // qx20, qy20, ql(20)
17 20 19 0 // me(1,1), me(2,1), me(3,1), mel(1)
15 19 16 0 // me(1,2), me(2,2), me(3,2), mel(1)
10 12 15 0 // me(1,3), me(2,3), me(3,3), mel(1)
14 13 9 0 // me(1,4), me(2,4), me(3,4), mel(1)
14 18 13 0 // me(1,5), me(2,5), me(3,5), mel(1)
18 20 17 0 // me(1,6), me(2,6), me(3,6), mel(1)
18 17 13 0 // me(1,7), me(2,7), me(3,7), mel(1)
7 8 12 0 // me(1,8), me(2,8), me(3,8), mel(1)
7 10 6 0 // me(1,9), me(2,9), me(3,9), mel(1)
3 7 5 0 // me(1,10), me(2,10), me(3,10), mel(10)
3 1 2 0 // me(1,11), me(2,11), me(3,11), mel(11)
10 11 6 0 // me(1,12), me(2,12), me(3,12), mel(12)
19 15 17 0 // me(1,13), me(2,13), me(3,13), mel(13)
16 11 15 0 // me(1,14), me(2,14), me(3,14), mel(14)
5 7 6 0 // me(1,15), me(2,15), me(3,15), mel(15)
8 9 13 0 // me(1,16), me(2,16), me(3,16), mel(16)
12 8 13 0 // me(1,17), me(2,17), me(3,17), mel(17)
2 4 8 0 // me(1,18), me(2,18), me(3,18), mel(18)
12 10 7 0 // me(1,19), me(2,19), me(3,19), mel(19)
2 8 7 0 // me(1,20), me(2,20), me(3,20), mel(20)
3 2 7 0 // me(1,21), me(2,21), me(3,21), mel(21)
4 9 8 0 // me(1,22), me(2,22), me(3,22), mel(22)
13 17 12 0 // me(1,23), me(2,23), me(3,23), mel(23)
4 2 1 0 // me(1,24), me(2,24), me(3,24), mel(24)
17 15 12 0 // me(1,25), me(2,25), me(3,25), mel(25)
15 11 10 0 // me(1,26), me(2,26), me(3,26), mel(26)
18 20 4 // be(1,1), be(2,1), bel(1)
20 19 4 // be(1,2), be(2,2), bel(2)
19 16 4 // be(1,3), be(2,3), bel(3)
4 9 3 // be(1,4), be(2,4), bel(4)
9 14 3 // be(1,5), be(2,5), bel(5)
14 18 3 // be(1,6), be(2,6), bel(6)
5 3 2 // be(1,7), be(2,7), bel(7)
3 1 2 // be(1,8), be(2,8), bel(8)
1 4 2 // be(1,9), be(2,9), bel(9)
16 11 1 // be(1,10), be(2,10), bel(10)

```

```

11 6 1          // be(1,11), be(2,11), bel(11)
6 5 1          // be(1,12), be(2,12), bel(12)

```

La représentation classique du maillage est donnée en Fig. 4.3.2

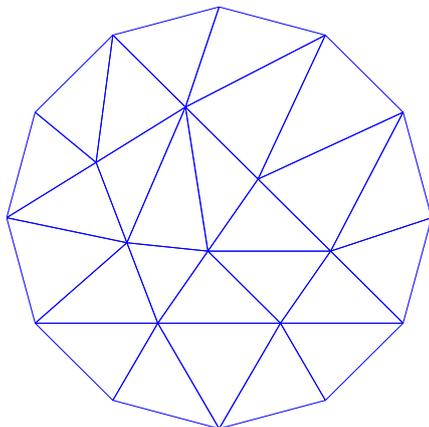


FIGURE 4.3.2 – Maillage obtenu avec **FreeFEM++**

Après lecture, les tableaux sont :

```

q      : [2x20 double]
me     : [3x26 int32]
ql     : [2 0 2 3 2 1 0 0 3 0 1 0 0 3 0 4 0 4 4 4]
mel    : [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
be     : [2x12 double]
bel    : [4 4 4 3 3 3 2 2 2 1 1 1]
nq     : 20
nme    : 26
nbe    : 12

```

où les tableaux q , me et be sont respectivement donnés par

1	2	3	...	17	18	19	20
-0.8660	-0.5792	-0.5000	...	0.2887	-0.0000	0.8660	0.5000
0.5000	0.2623	0.8660	...	-0.5000	-1.0000	-0.5000	-0.8660

TABLE 4.1 – Tableau q associé au maillage `disque4-1-3.msh`

1	2	3	4	...	24	25	26
17	15	10	14	...	4	17	15
20	19	12	13	...	2	15	11
19	16	15	9	...	1	12	10

TABLE 4.2 – Tableau me associé au maillage `disque4-1-3.msh`

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18	20	19	4	9	14	5	3	1	16	11	6
20	19	16	9	14	18	3	1	4	11	6	5

TABLE 4.3 – Tableau be associé au maillage disque4-1-3.msh

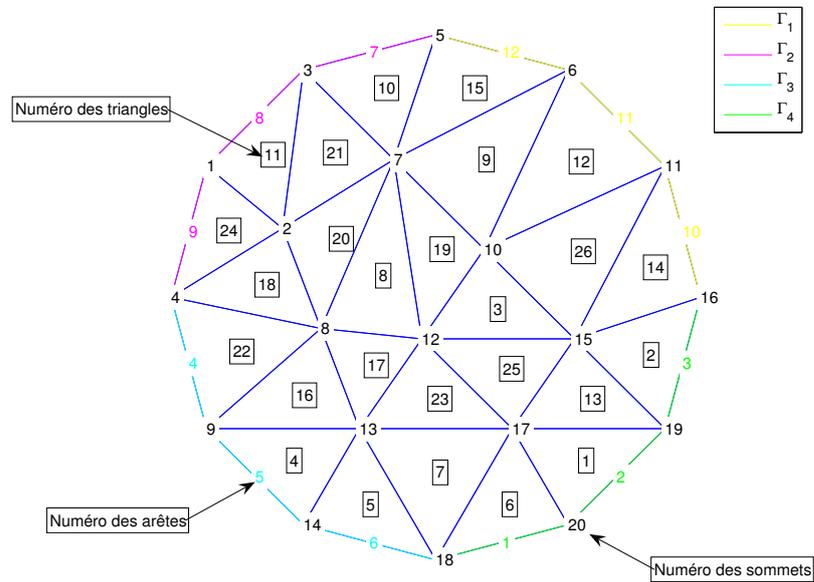


FIGURE 4.3.3 – Maillage avec numérotation

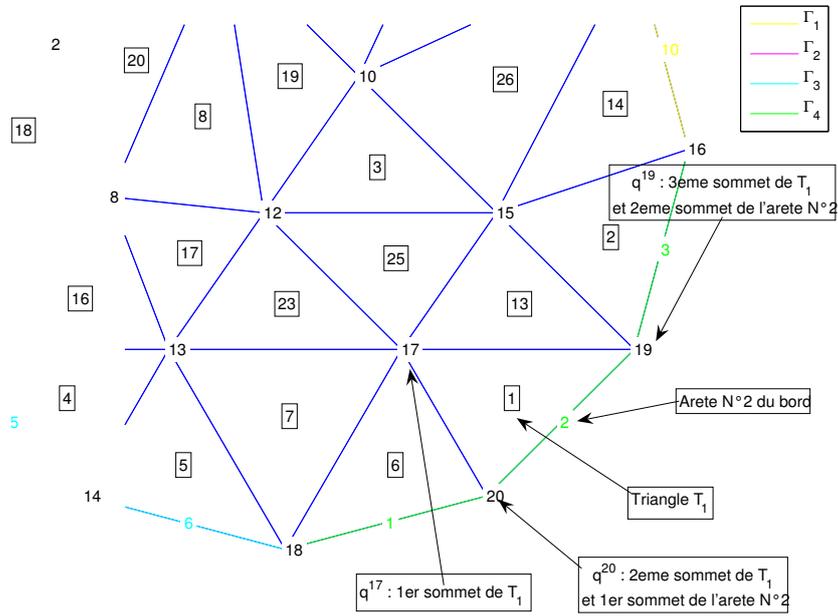


FIGURE 4.3.4 – Maillage avec numérotation : triangle T_1

Algorithme 4.3.1 Lecture d'un maillage FreeFEM++

Données : Filename : nom du fichier de maillage généré par FreeFEM++

Résultat : n_q :
 n_{me} :
 n_{be} :
 q :
 ql :
 me :
 mel :
 be :
 bel :

```

1: Fonction  $\left[ \begin{array}{l} n_q, n_{me}, n_{be}, q, ql, \\ me, mel, be, bel \end{array} \right] \leftarrow \text{READMESHFREEFEM}(\text{Filename})$ 
2:   fid = OUVRIER(Filename, "r")
3:   [nq, nme, nbe] ← LIRE(fid, "%d %d %d")
4:   Pour i ← 1 à nq faire
5:     [q(1, i), q(2, i), ql(i)] ← LIRE(fid, "%1f %1f %d")
6:   Fin Pour
7:   Pour k ← 1 à nme faire
8:     [me(1, k), me(2, k), me(3, k), mel(k)] ← LIRE(fid, "%d %d %d %d")
9:   Fin Pour
10:  Pour l ← 1 à nbe faire
11:    [be(1, l), be(2, l), bel(l)] ← LIRE(fid, "%d %d %d")
12:  Fin Pour
13:  FERMER(fid)
14: Fin Fonction

```

4.4 Formulation variationnelle discrétisée

L'inconvénient de la formulation variationnelle continue (??) est d'être posée sur des espaces fonctionnels de dimension infinie. L'idée est donc d'approcher ceux-ci par des espaces de dimension finie et d'écrire, dans ces espaces, une nouvelle formulation variationnelle dite discrétisée. On espère bien sûr que la solution de la formulation variationnelle discrétisée sera une «bonne» approximation de la solution de (??).

On définit l'espace fonctionnel $H_h^1(\Omega_h)$ par

$$H_h^1(\Omega_h) = \{v_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} v_h \in C^0(\Omega_h) \\ \text{et } \forall k \in \{1, \dots, n_{me}\} \quad v_h|_{T_k} \in \mathcal{P}^1(T_k) \end{array}\} \quad (4.4.1)$$

où $C^0(\Omega_h)$ est l'espace des fonctions continues sur Ω_h et $\mathcal{P}^1(T_k)$ est l'espace des polynômes de degré 1 sur T_k .

Proposition 5 (Lucquin-Pironneau, page 43) *Les fonctions de $H_h^1(\Omega_h)$ sont entièrement déterminées par leurs valeurs en chacun des sommets du maillage. La dimension de l'espace $H_h^1(\Omega_h)$ est égale au nombre de sommets n_q de la triangulation.* □

Definition 27 (Lucquin-Pironneau, page 44) Définissons la i -ème fonction chapeau φ_i associée au nœud d'indice i de la manière suivante :

1. φ_i est continue de Ω_h dans \mathbb{R} ,
2. φ_i est affine sur T_k , pour chaque indice $k \in \{1, \dots, n_{me}\}$
3. $\varphi_i(q^j) = \delta_{i,j}$.

▲

Proposition 6 (Lucquin-Pironneau, page 45) L'ensemble $\{\varphi_i\}_{i \in \{1, \dots, n_q\}}$ forme une base de $H_h^1(\Omega_h)$. □

En conséquence, toute fonction de $H_h^1(\Omega_h)$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des fonctions de base.

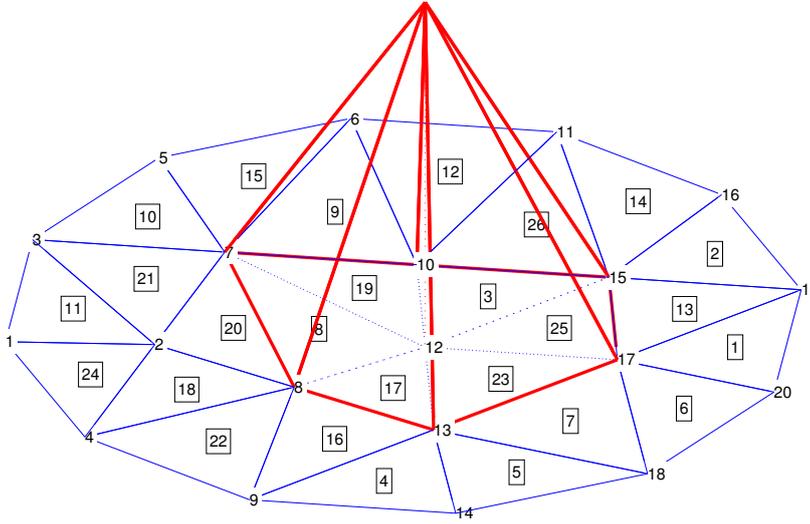


FIGURE 4.4.1 – fonction de base φ_{12}

Nouv avons

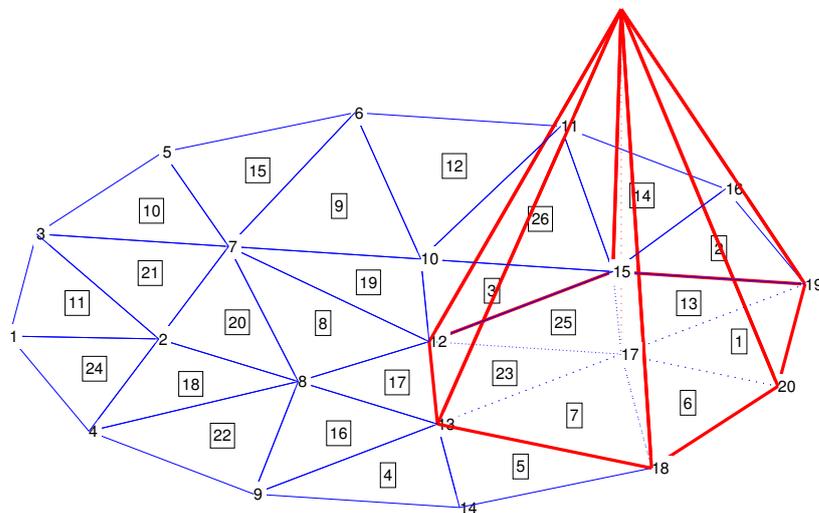
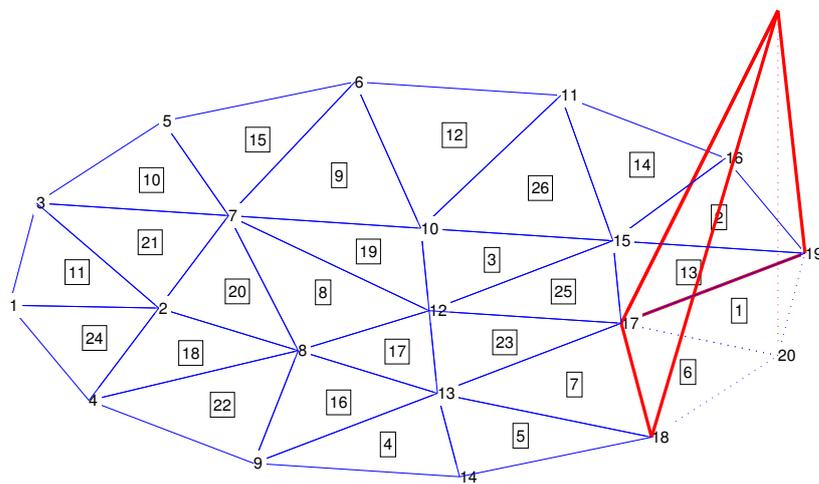
Lemma 28 Soit $j \in \{1, \dots, n_q\}$, notons \mathcal{T}_j l'ensemble des indices des triangles tel que q^j soit un de leur sommet :

$$\mathcal{T}_j = \{k \in \{1, \dots, n_{me}\} \text{ t.q. } q^j \in \overline{T_k}\} \quad (4.4.2)$$

Le support de la fonction φ_j est la réunion des triangles T_k tels que $q^j \in \overline{T_k}$ i.e.

$$\forall j \in \{1, \dots, n_q\}, \quad \text{supp } \varphi_j = \bigcup_{k \in \mathcal{T}_j} \overline{T_k} \quad (4.4.3)$$

◆

FIGURE 4.4.2 – fonction de base φ_{17} FIGURE 4.4.3 – fonction de base φ_{20}

Par exemple sur le maillage `disque4-1-3.msh`, nous avons (voir Fig. 4.4.1, 4.4.2 et 4.4.3)

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{12} &= \{3, 8, 17, 19, 23, 25\} \\ \mathcal{T}_{17} &= \{1, 6, 7, 13, 23, 25\} \\ \mathcal{T}_{20} &= \{1, 6\}\end{aligned}$$

Notons

$$\mathcal{I}_h^D = \left\{ i \in \{1, \dots, n_q\} \mid q^i \in \overline{\Gamma_h^D} \right\}$$

et

$$\mathcal{I}_h = \{1, \dots, n_q\} \setminus \mathcal{I}_h^D$$

Par construction, nous avons

$$\mathcal{I}_h^D \cap \mathcal{I}_h = \emptyset \text{ et } \mathcal{I}_h^D \cup \mathcal{I}_h = \{1, \dots, n_q\}$$

Notons V_h l'espace des fonctions tests donné par

$$V_h = \{v_h \in H_h^1(\Omega_h) \mid \forall q^i \in \Gamma^D, v_h(q^i) = 0\} \quad (4.4.4)$$

Lemma 29 *L'espace V_h est un espace de Hilbert de dimension $\#\mathcal{I}_h$. L'ensemble $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{I}_h}$ forme une base de V_h .* \blacklozenge

Definition 28 *La formulation variationnelle discrète est :*

trouver $u_h \in H_h^1(\Omega_h) \cap H_{gd, \Gamma^D}^1$ tel que

$$\mathcal{A}_h(u_h, v_h) = \mathcal{L}_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (4.4.5)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_h(u_h, v_h) &= \int_{\Omega_h} \langle \nabla v_h(\vec{x}), (\mathbb{M} \nabla u_h)(\vec{x}) \rangle + a_0(\vec{x}) u_h(\vec{x}) v_h(\vec{x}) d\Omega_h(\vec{x}) \\ &+ \int_{\Gamma_h^R} a_1(\vec{x}) u_h(\vec{x}) v_h(\vec{x}) d\Gamma_h(\vec{x})\end{aligned} \quad (4.4.6)$$

$$\mathcal{L}_h(v_h) = \int_{\Omega_h} f(\vec{x}) v_h(\vec{x}) d\Omega_h(\vec{x}) + \int_{\Gamma^R} g_R(\vec{x}) v_h(\vec{x}) d\Gamma_h(\vec{x}). \quad (4.4.7)$$

▲

Théorème 37 *Sous les hypothèses du théorème (??), le problème variationnel (4.4.5) admet une unique solution. De plus*

$$\|u - u_h\|_1 \leq h \|u\|_{???}$$

A TERMINER...

★

4.5 Ecriture matricielle de la formulation variationnelle discrétisée

Lemma 30 *La formulation variationnelle discrète de la définition 28 est équivalente à*

<p>trouver $u_h \in H_h^1(\Omega_h)$ tel que</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\forall i \in \mathcal{I}_h$ $\int_{\Omega_h} [(\nabla \varphi_i)^t \mathbb{M} \nabla u_h + a_0 u_h \varphi_i](x) d\Omega_h(x) + \int_{\Gamma_h^R} (a_1 u_h \varphi_i)(x) d\Gamma_h(x) = \int_{\Omega_h} (f \varphi_i)(x) d\Omega(x) + \int_{\Gamma_h^R} (g_R \varphi_i)(x) d\Gamma(x) \quad (4.5.1)$ • $\forall i \in \mathcal{I}_h^D$ $u_h(\mathfrak{q}_i) = g_D(\mathfrak{q}_i) \quad (4.5.2)$

Puisque $u_h \in H_h^1(\Omega_h)$, nous pouvons l'exprimer comme combinaison linéaire des fonctions de base φ_j :

$$u_h(x, y) = \sum_{j=1}^{n_q} \mathbf{U}_j \varphi_j(x, y) \quad (4.5.3)$$

où \mathbf{U}_j sera une approximation de la fonction u solution de (??) au point \mathfrak{q}^j :

$$\mathbf{U}_j \approx u(\mathfrak{q}^j).$$

La fonction u_h sera complètement déterminée si nous pouvons évaluer le vecteur $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_q}$.

En remplaçant u_h par (4.5.3) dans (4.5.1-4.5.2) nous obtenons l'équivalence entre la formulation variationnelle discrète de la définition 28 et

<p>Trouver $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_q}$ tel que</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\forall i \in \mathcal{I}_h$ $\sum_{j=1}^{n_q} \mathbf{U}_j \left(\int_{\Omega_h} [(\nabla \varphi_i)^t \mathbb{M} \nabla \varphi_j + a_0 \varphi_j \varphi_i](x) d\Omega_h(x) + \int_{\Gamma_h^R} (a_1 \varphi_j \varphi_i)(x) d\Gamma_h(x) \right) = \int_{\Omega_h} (f \varphi_i)(x) d\Omega(x) + \int_{\Gamma_h^R} (g_R \varphi_i)(x) d\Gamma(x) \quad (4.5.4)$ • $\forall i \in \mathcal{I}_h^D$ $\mathbf{U}_i = g_D(\mathfrak{q}_i) \quad (4.5.5)$

4.5. ECRITURE MATRICIELLE DE LA FORMULATION VARIATIONNELLE DISCRÉTISÉE 69

Nous obtenons bien un système linéaire de n_q équations à n_q inconnues

Lemma 31 *Trouver u_h solution de la formulation variationnelle discrétisée (28) est équivalent à*

Trouver $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_q}$ tel que

$$\mathbb{A}\mathbf{U} = \mathbf{b}$$

où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$ vérifient

- $\forall i \in \mathcal{I}_h, \forall j \in \{1, \dots, n_q\}$

$$\mathbb{A}_{i,j} = \int_{\Omega_h} [(\nabla \varphi_i)^t \mathbb{M} \nabla \varphi_j + a_0 \varphi_j \varphi_i](x) d\Omega_h(x) + \int_{\Gamma_{h,R}} (a_1 \varphi_j \varphi_i)(x) d\Gamma(x)$$

$$\mathbf{b}_i = \int_{\Omega} (f \varphi_i)(x) d\Omega(x) + \int_{\Gamma_{h,R}} (g_R \varphi_i)(x) d\Gamma_h(x)$$

- $\forall i \in \mathcal{I}_h^D, \forall j \in \{1, \dots, n_q\}$

$$\mathbb{A}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{b}_i = g_D(q^i)$$

et l'on a

$$u_h(x, y) = \sum_{j=1}^{n_q} \mathbf{U}_j \varphi_j(x, y).$$

◆

4.5.1 Calcul sur un triangle

Soit T un triangle régulier défini par ses 3 sommets (dans le sens direct) (q^1, q^2, q^3) .

Lemma 32 *L'aire du triangle T , notée $|T|$, est*

$$|T| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} q_x^1 & q_y^1 & 1 \\ q_x^2 & q_y^2 & 1 \\ q_x^3 & q_y^3 & 1 \end{bmatrix} \right|. \quad (4.5.6)$$

◆

Lemma 33 *Soit $P(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ le polynôme vérifiant $P(q^\alpha) = P_\alpha$, $\forall \alpha \in \{1, 2, 3\}$. Alors*

$$\alpha = \frac{1}{2|T|} \det \begin{pmatrix} P_1 & q_y^1 & 1 \\ P_2 & q_y^2 & 1 \\ P_3 & q_y^3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \frac{1}{2|T|} \det \begin{pmatrix} q_x^1 & P_1 & 1 \\ q_x^2 & P_2 & 1 \\ q_x^3 & P_3 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$\gamma = \frac{1}{2|T|} \det \begin{pmatrix} q_x^1 & q_y^1 & P_1 \\ q_x^2 & q_y^2 & P_2 \\ q_x^3 & q_y^3 & P_3 \end{pmatrix}.$$

◆

Definition 29 (Fonctions de base locales) *Sur un triangle, nous appelons fonctions de base locales les trois fonctions affines $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3)$ vérifiant $\forall(\alpha, \beta) \in \{1, 2, 3\}^2$*

$$\tilde{\varphi}_\alpha(q^\beta) = \delta_{\alpha,\beta}.$$

■

Lemma 34 *Nous avons $\forall(x, y) \in T$*

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(x, y) &= \frac{1}{2|T|} \left((q_y^2 - q_y^3)x - (q_x^2 - q_x^3)y + (q_x^2 q_y^3 - q_y^2 q_x^3) \right) \\ \tilde{\varphi}_2(x, y) &= \frac{1}{2|T|} \left((q_y^3 - q_y^1)x + (q_x^1 - q_x^3)y - (q_x^1 q_y^3 - q_y^1 q_x^3) \right) \\ \tilde{\varphi}_3(x, y) &= \frac{1}{2|T|} \left((q_y^1 - q_y^2)x - (q_x^1 - q_x^2)y + (q_x^1 q_y^2 - q_y^1 q_x^2) \right). \end{aligned}$$

◆

Lemma 35 *Nous avons $\forall(x, y) \in T$*

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{\varphi}_1(x, y) &= \frac{1}{2|T|} \begin{pmatrix} q_y^2 - q_y^3 \\ q_x^3 - q_x^2 \end{pmatrix} \\ \nabla \tilde{\varphi}_2(x, y) &= \frac{1}{2|T|} \begin{pmatrix} q_y^3 - q_y^1 \\ q_x^1 - q_x^3 \end{pmatrix} \\ \nabla \tilde{\varphi}_3(x, y) &= \frac{1}{2|T|} \begin{pmatrix} q_y^1 - q_y^2 \\ q_x^2 - q_x^1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

◆

Lemma 36 *Nous avons*

$$\int_T \tilde{\varphi}_1^m \tilde{\varphi}_2^n \tilde{\varphi}_3^p dT = \frac{2|T| m! n! p!}{(m+n+p+2)!} \quad (4.5.7)$$

◆

4.6 Assemblage de matrices du type $\int_{\Omega_h} f_{i,j}(x, y) dx dy$

Les fonctions $(f_{i,j})_{i,j=1}^{n_q}$ sont définies sur Ω_h à valeurs réelles. Nous supposons que leurs supports sont tels que :

$$\forall(i, j) \in \{1, \dots, n_q\} \quad \text{supp } f_{i,j} = \text{supp } \varphi_i \cap \text{supp } \varphi_j \quad (4.6.1)$$

Par exemple, nous étudierons les cas

$$\begin{aligned} f_{i,j}(x,y) &= \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y) \\ f_{i,j}(x,y) &= \langle \nabla\varphi_i(x,y), \nabla\varphi_j(x,y) \rangle \\ f_{i,j}(x,y) &= c(x,y)\varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y) \\ f_{i,j}(x,y) &= \langle \nabla\varphi_i(x,y), \mathcal{M}(x,y)\nabla\varphi_j(x,y) \rangle \end{aligned}$$

où c est une fonction de Ω_h à valeurs réelles et \mathcal{M} est une fonction de Ω_h à valeurs dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Nous voulons calculer la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$ de composantes

$$\mathbb{A}_{i,j} = \int_{\Omega_h} f_{i,j}(x,y) dx dy$$

Grâce aux propriétés de la triangulation, nous avons

$$\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{n_{me}} T_k \quad \text{et} \quad \bigcap_{k=1}^{n_{me}} T_k = \emptyset$$

et donc

$$\mathbb{A}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n_{me}} \mathbb{A}_{i,j}(T_k)$$

où

$$\mathbb{A}_{i,j}(T_k) = \int_{T_k} f_{i,j}(x,y) dx dy.$$

Nous allons maintenant écrire un algorithme simpliste (à ne surtout pas implémenter) permettant de calculer la matrice \mathbb{A} .

Algorithm 4.6.1 Algorithme simple pour le calcul de la matrice \mathbb{A} de composantes

$$\mathbb{A}_{i,j} = \int_{\Omega_h} f_{i,j}(x,y) dx dy$$

sous les hypothèses (4.6.1)

Données : Mesh : structure maillage
 $(f_{i,j})_{i,j=1}^{n_q}$: ensemble des fonctions

Résultat : \mathbb{A} : matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$

```

1:  $\mathbb{A} \leftarrow 0$                                 ▷ Initialisation à 0 de la matrice creuse  $\mathbb{A}$ 
2: Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n_q$  faire                ▷ boucle sur les sommets
3:   Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n_q$  faire                ▷ boucle sur les sommets
4:     Pour  $k \leftarrow 1$  à  $n_{me}$  faire            ▷ boucle sur les triangles
5:        $\mathbb{A}(i,j) \leftarrow \mathbb{A}(i,j) + \int_{T_k} f_{i,j}(x,y) dx dy$ 
6:     Fin Pour
7:   Fin Pour
8: Fin Pour
    
```

Nous allons «optimiser» cet algorithme. Pour cela, nous permutons les boucles sur les sommets avec la boucle sur les triangles :

Algorithm 4.6.2 Algorithme simple avec permutation pour le calcul de la matrice \mathbb{A} de composantes

$$\mathbb{A}_{i,j} = \int_{\Omega_h} f_{i,j}(x,y) dx dy$$

sous les hypothèses (4.6.1)

Données : Mesh : structure maillage
 $(f_{i,j})_{i,j=1}^{n_q}$: ensemble des fonctions
Résultat : \mathbb{A} : matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$

1: $\mathbb{A} \leftarrow 0$ ▷ Initialisation à 0 de la matrice creuse \mathbb{A}
2: **Pour** $k \leftarrow 1$ à n_{me} **faire** ▷ boucle sur les triangles
3: **Pour** $i \leftarrow 1$ à n_q **faire** ▷ boucle sur les sommets
4: **Pour** $j \leftarrow 1$ à n_q **faire** ▷ boucle sur les sommets
5: $\mathbb{A}(i,j) \leftarrow \mathbb{A}(i,j) + \int_{T_k} f_{i,j}(x,y) dx dy$
6: **Fin Pour**
7: **Fin Pour**
8: **Fin Pour**

Nous remarquons que si $T_k \cap \text{supp } f_{i,j} = \emptyset$ alors $\int_{T_k} f_{i,j}(x,y) dx dy = 0$. Ce qui veut dire, sous les hypothèses (4.6.1) :

$$\text{si } T_k \cap (\text{supp } \varphi_i \cap \text{supp } \varphi_j) = \emptyset \quad \text{alors} \quad \int_{T_k} f_{i,j}(x,y) dx dy = 0$$

ou encore

$$\text{si } q^i \notin T_k \text{ ou } q^j \notin T_k \quad \text{alors} \quad \int_{T_k} f_{i,j}(x,y) dx dy = 0$$

Donc, dans les boucles en i et j (algorithme 4.6.2 lignes 3 et 4) les seules valeurs ayant une contribution non nécessairement nulle sont obtenues pour $i \in \text{me}(:, k)$ et $j \in \text{me}(:, k)$. Ceci nous permet d'écrire

Algorithm 4.6.3 Algorithme optimisé pour le calcul de la matrice de \mathbb{A} de composantes

$$\mathbb{A}_{i,j} = \int_{\Omega_h} f_{i,j}(x,y) dx dy$$

sous les hypothèses (4.6.1)

Données : Mesh : structure maillage
 $(f_{i,j})_{i,j=1}^{n_q}$: ensemble des fonctions
Résultat : \mathbb{A} : matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$

1: $\mathbb{A} \leftarrow 0$ ▷ Initialisation à 0 de la matrice creuse \mathbb{A}
2: **Pour** $k \leftarrow 1$ à n_{me} **faire** ▷ boucle sur les triangles
3: **Pour** $\alpha \leftarrow 1$ à 3 **faire** ▷ boucle sur les 3 sommets du triangle T_k
4: $i \leftarrow \text{me}(\alpha, k)$
5: **Pour** $\beta \leftarrow 1$ à 3 **faire** ▷ boucle sur les 3 sommets du triangle T_k

```

6:         j ← me(β, k)
7:         A(i, j) ← A(i, j) + ∫Tk fi,j(x, y)dx dy
8:     Fin Pour
9: Fin Pour
10: Fin Pour
    
```

Une autre façon de l'écrire est d'utiliser les matrices élémentaires qui, pour un triangle donné, vont contenir l'ensemble des 3×3 contributions non nécessairement nulles. Notons $\mathbb{A}^e(T_k) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$(\mathbb{A}^e(T_k))_{\alpha, \beta} = \int_{T_k} f_{\text{me}(\alpha, k), \text{me}(\beta, k)}(x, y) dx dy$$

Pour calculer cette matrice, nous avons juste besoin des 3 sommets du triangle T_k et des 9 fonctions $(f_{\text{me}(\alpha, k), \text{me}(\beta, k)})_{\alpha, \beta=1}^3$

Algorithm 4.6.4 Matrice élémentaire

Données : $(f_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta=1}^3$: ensemble de 3×3 fonctions
 définies sur le triangle T
 (q^1, q^2, q^3) : les 3 sommets du triangle T
Résultat : \mathbb{A}^e : matrice élémentaire 3×3

```

1: Fonction  $\mathbb{A}^e \leftarrow \text{MATELEM}(q^1, q^2, q^3, (f_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta=1}^3)$ 
2:   Pour  $\alpha \leftarrow 1$  à 3 faire
3:     Pour  $\beta \leftarrow 1$  à 3 faire
4:        $\mathbb{A}^e(i, j) \leftarrow \int_T f_{\alpha, \beta}(x, y) dx dy$ 
5:     Fin Pour
6:   Fin Pour
7: Fin Fonction
    
```

Le calcul des intégrales $\int_T f_{\alpha, \beta}(x, y) dx dy$ se fera, suivant les fonctions f_{i_l, j_l} , soit de manière exacte soit à l'aide de méthodes d'intégration numérique.

L'algorithme utilisant les matrices élémentaires peut alors s'écrire :

Algorithm 4.6.5 Algorithme optimisé avec matrice élémentaire pour le calcul de la matrice de \mathbb{A}

Données : **Mesh** : structure maillage
 $(f_{i, j})_{i, j=1}^{n_q}$: ensemble des fonctions
Résultat : \mathbb{A} : matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$

```

1:  $\mathbb{A} \leftarrow 0$  ▷ Initialisation à 0 de la matrice creuse  $\mathbb{A}$ 
2: Pour  $k \leftarrow 1$  à  $n_{\text{me}}$  faire ▷ boucle sur les triangles
    $\mathbb{A}^e \leftarrow \text{MATELEM}(q^{\text{me}(1, k)}, q^{\text{me}(2, k)}, q^{\text{me}(3, k)}, (f_{i, j})_{i, j \in \text{me}(\cdot, k)})$ 
3:   Pour  $\alpha \leftarrow 1$  à 3 faire ▷ boucle sur les 3 sommets du triangle  $T_k$ 
4:      $i \leftarrow \text{me}(\alpha, k)$ 
5:     Pour  $\beta \leftarrow 1$  à 3 faire ▷ boucle sur les 3 sommets du triangle  $T_k$ 
6:        $j \leftarrow \text{me}(\beta, k)$ 
7:        $\mathbb{A}(i, j) \leftarrow \mathbb{A}(i, j) + \mathbb{A}^e(\alpha, \beta)$ 
    
```

8: **Fin Pour**
 9: **Fin Pour**
 10: **Fin Pour**

4.6.1 Application : $f_{i,j}(x, y) = \varphi_i(x, y)\varphi_j(x, y)$

Definition 30 (Matrice de masse) Notons \mathcal{M} la matrice d'ordre n_q dont l'élément $(i, j) \in \{1, \dots, n_q\}^2$ est donné par

$$\mathcal{M}_{ij} = \int_{\Omega_h} \varphi_i(x, y)\varphi_j(x, y)dxdy. \quad (4.6.2)$$

Cette matrice est appelée **matrice de masse**. ▲

La propriété (4.6.1) sur le support de la fonction $f_{i,j}$ est évidemment vérifiée. Nous définissons alors

Definition 31 (Matrice de masse élémentaire) Soit T un triangle régulier défini par ses trois sommets (q^1, q^2, q^3) de \mathbb{R}^2 . Notons $\tilde{\varphi}_\alpha$ la fonction de base locale affine associée au point q^α , $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ vérifiant $\tilde{\varphi}_\alpha(q^\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$. On définit alors $\mathcal{M}^e(T)$ la matrice 3×3 de composante

$$(\mathcal{M}^e(T))_{\alpha,\beta} = \int_T \tilde{\varphi}_\alpha(x, y)\tilde{\varphi}_\beta(x, y)dxdy. \quad \blacktriangle$$

Comme nous venons de le voir, pour assembler cette matrice il suffit pour cela d'être en mesure de calculer, pour chaque triangle T de la triangulation, la matrice élémentaire $\mathcal{M}^e(T) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ dont la composante $(\alpha, \beta) \in \{1, 2, 3\}^2$ est donnée par

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta}^e(T) = \int_T \tilde{\varphi}_\alpha(x, y)\tilde{\varphi}_\beta(x, y)dxdy$$

En effet, nous avons $\forall k \in \{1, \dots, n_{me}\}$

$$\forall (x, y) \in T_k, \forall \alpha \in \{1, 2, 3\}, \varphi_{me(\alpha,k)}(x, y) = \tilde{\varphi}_\alpha(x, y)$$

De part la formule (4.5.7) nous avons

$$\mathcal{M}^e(T) = \frac{|T|}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.6.3)$$

où on note $|T|$ l'aire du triangle T .

On a alors

Algorithm 4.6.6 Matrice élémentaire de masse

Données : $|T|$: aire du triangle

Résultat : \mathcal{M}^e : matrice élémentaire de masse (4.6.3)

1: **Fonction** $\mathcal{M}^e \leftarrow \text{ELEMMASSMAT}(|T|)$

2: Return $\mathcal{M}^e \leftarrow \frac{|T|}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3: **Fin Fonction**

Nous pouvons alors réécrire l'algorithme 4.6.5 pour obtenir l'algorithme d'assemblage de la matrice de masse :

Algorithm 4.6.7 Algorithme optimisé avec matrice élémentaire pour le calcul de la matrice de composantes $\int_{\Omega_h} \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)dxdy$

Données :

n_q : nombre de sommets
 n_{me} : nombre de triangles
 me :
 $areas$: tableau de n_{me} réels où $areas(k) = |T_k|$

Résultat : \mathcal{M} : matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$ (définition 30)

1: **Fonction** $\mathcal{M} \leftarrow \text{MASSASSEMBLING}(n_q, n_{me}, me, areas)$
 2: $\mathcal{M} \leftarrow 0$ ▷ Initialisation à 0 de la matrice creuse \mathcal{M}
 3: **Pour** $k \leftarrow 1$ à n_{me} **faire** ▷ boucle sur les triangles
 4: $\mathcal{M}^e \leftarrow \text{ELEMMASSMAT}(areas(k))$
 5: **Pour** $\alpha \leftarrow 1$ à 3 **faire**
 6: $i \leftarrow me(\alpha, k)$
 7: **Pour** $\beta \leftarrow 1$ à 3 **faire**
 8: $j \leftarrow me(\beta, k)$
 9: $\mathcal{M}(i, j) \leftarrow \mathcal{M}(i, j) + \mathcal{M}^e(\alpha, \beta)$
 10: **Fin Pour**
 11: **Fin Pour**
 12: **Fin Pour**
 13: **return** \mathcal{M}
 14: **Fin Fonction**

4.6.2 Application : $f_{i,j}(x,y) = c(x,y)\varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)$

Definition 32 Notons $\mathcal{M}^{[c]}$ la matrice d'élément $(i,j) \in \{1, \dots, n_q\}^2$ donnée par

$$\mathcal{M}_{ij}^{[c]} = \int_{\Omega_h} c(x,y)\varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)dxdy. \quad (4.6.4)$$

▲

La propriété (4.6.1) sur le support de la fonction $f_{i,j}$ est évidemment vérifiée. Nous définissons alors

Definition 33 Soit T un triangle régulier défini par ses trois sommets (q^1, q^2, q^3) de \mathbb{R}^2 . Notons $\tilde{\varphi}_\alpha$ la fonction de base **locale** affine associée au point q^α , $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ vérifiant $\tilde{\varphi}_\alpha(q^\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$. On définit alors $\mathcal{M}^{e,[c]}(T)$ la matrice 3×3 de composante

$$(\mathcal{M}^{e,[c]}(T))_{\alpha,\beta} = \int_T c(x,y)\tilde{\varphi}_\alpha(x,y)\tilde{\varphi}_\beta(x,y)dxdy.$$

▲

Pour calculer les intégrales, nous pouvons approcher la fonction c par

$$c(x, y) \approx \sum_{\gamma=1}^3 c_\gamma \tilde{\varphi}_\gamma(x, y)$$

avec $c_\gamma = c(q^\gamma)$

Ce qui donne

$$(\mathcal{M}^{e,[c]}(T))_{\alpha,\beta} \approx \sum_{\gamma=1}^3 c_\gamma \int_T \tilde{\varphi}_\gamma(x, y) \tilde{\varphi}_\alpha(x, y) \tilde{\varphi}_\beta(x, y) dx dy$$

De part la formule (4.5.7) nous avons

$$\mathcal{M}^{e,[c]}(T) \approx \frac{|T|}{30} \begin{pmatrix} 3c_1 + c_2 + c_3 & c_1 + c_2 + \frac{c_3}{2} & c_1 + \frac{c_2}{2} + c_3 \\ c_1 + c_2 + \frac{c_3}{2} & c_1 + 3c_2 + c_3 & \frac{c_1}{2} + c_2 + c_3 \\ c_1 + \frac{c_2}{2} + c_3 & \frac{c_1}{2} + c_2 + c_3 & c_1 + c_2 + 3c_3 \end{pmatrix} \quad (4.6.5)$$

où on note $|T|$ l'aire du triangle T .

On a alors

Algorithm 4.6.8 Matrice élémentaire de masse avec fonction

Données : $|T|$: aire du triangle
 c : tableau contenant les 3 valeurs de la fonction
aux 3 sommets du triangle

Résultat : \mathcal{M}^e : matrice élémentaire de masse avec fonction (4.6.5)

1: **Fonction** $\mathcal{M}^e \leftarrow \text{ELEMMASSFMAT}(|T|, c)$
2: Return $\mathcal{M}^e \leftarrow \frac{|T|}{30} \begin{pmatrix} 3c_1 + c_2 + c_3 & c_1 + c_2 + \frac{c_3}{2} & c_1 + \frac{c_2}{2} + c_3 \\ c_1 + c_2 + \frac{c_3}{2} & c_1 + 3c_2 + c_3 & \frac{c_1}{2} + c_2 + c_3 \\ c_1 + \frac{c_2}{2} + c_3 & \frac{c_1}{2} + c_2 + c_3 & c_1 + c_2 + 3c_3 \end{pmatrix}$
3: **Fin Fonction**

Nous pouvons alors réécrire l'algorithme 4.6.5 pour obtenir l'algorithme d'assemblage de la matrice $\mathcal{M}^{[c]}$

Algorithm 4.6.9 Algorithme optimisé avec matrice élémentaire pour le calcul de la matrice de composantes $\int_{\Omega_h} c(x, y) \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy$

Données :
 n_q : nombre de sommets
 n_{me} : nombre de triangles
 me :
 $areas$: tableau de n_{me} réels où $areas(k) = |T_k|$
 Tc : tableau de n_q réels contenant les valeurs de
la fonction c aux sommets du maillage

Résultat : \mathcal{M} : matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$ (définition 32)

1: **Fonction** $\mathcal{M} \leftarrow \text{MASSFASSEMBLING}(ns, nt, me, areas, Tc)$
2: $\mathcal{M} \leftarrow 0$ \triangleright Initialisation à 0 de la matrice creuse \mathcal{M}
3: **Pour** $k \leftarrow 1$ à n_{me} **faire** \triangleright boucle sur les triangles

```

4:      $\mathcal{M}^e \leftarrow \text{FONCMASSEFELEM}(\text{areas}(k), Tc(\text{me}(:, k)))$ 
5:     Pour  $\alpha \leftarrow 1$  à 3 faire
6:          $i \leftarrow \text{me}(\alpha, k)$ 
7:         Pour  $\beta \leftarrow 1$  à 3 faire
8:              $j \leftarrow \text{me}(\beta, k)$ 
9:              $\mathcal{M}(i, j) \leftarrow \mathcal{M}(i, j) + \mathcal{M}^e(\alpha, \beta)$ 
10:        Fin Pour
11:    Fin Pour
12:    Fin Pour
13:    return  $\mathcal{M}$ 
14: Fin Fonction
    
```

4.6.3 Application : $f_{i,j}(x, y) = \langle \nabla \varphi_i(x, y), \nabla \varphi_j(x, y) \rangle$

Definition 34 (Matrice de rigidité) Notons \mathcal{R} la matrice d'ordre n_q d'élément $(i, j) \in \{1, \dots, n_q\}^2$ donné par

$$\mathcal{R}_{ij} = \int_{\Omega_h} \langle \nabla \varphi_i(x, y), \nabla \varphi_j(x, y) \rangle dx dy. \quad (4.6.6)$$

Cette matrice est appelée **matrice de rigidité**. ▲

La propriété (4.6.1) sur le support de la fonction $f_{i,j}$ est évidemment vérifiée. Nous définissons alors

Definition 35 (Matrice de rigidité élémentaire) Soit T un triangle régulier défini par ses trois sommets (q^1, q^2, q^3) de \mathbb{R}^2 . Notons $\tilde{\varphi}_\alpha$ la fonction de base locale affine associée au point q^α , $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ vérifiant $\tilde{\varphi}_\alpha(q^\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$. On définit alors $\mathcal{R}^e(T)$ la matrice 3×3 de composante

$$(\mathcal{R}^e(T))_{\alpha,\beta} = \int_T \nabla \tilde{\varphi}_\alpha(x, y) \cdot \nabla \tilde{\varphi}_\beta(x, y) dx dy. \quad \blacktriangle$$

En utilisant le lemme 35, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}^e(T) \\ &= \\ & \frac{1}{4|T|} \begin{pmatrix} \langle q^2 - q^3, q^2 - q^3 \rangle & \langle q^2 - q^3, q^1 - q^1 \rangle & \langle q^2 - q^3, q^1 - q^2 \rangle \\ \langle q^3 - q^1, q^2 - q^3 \rangle & \langle q^3 - q^1, q^1 - q^1 \rangle & \langle q^3 - q^1, q^1 - q^2 \rangle \\ \langle q^1 - q^2, q^2 - q^3 \rangle & \langle q^1 - q^2, q^1 - q^1 \rangle & \langle q^1 - q^2, q^1 - q^2 \rangle \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

On a alors

Algorithm 4.6.10 Matrice élémentaire de rigidité

Données : $|T|$: aire du triangle
 q^1, q^2, q^3 : les 3 sommets du triangle

Résultat : $\mathcal{R}^e(T)$: matrice élémentaire de rigidité (4.6.7)

```

1: Fonction  $\mathcal{R}^e \leftarrow \text{ELEMSTIFFMAT}(|T|, q^1, q^2, q^3)$ 
2:    $\mathbf{u} \leftarrow q^2 - q^3$ 
    
```

```

3:    $\mathbf{v} \leftarrow q^3 - q^1$ 
4:    $\mathbf{w} \leftarrow q^1 - q^2$ 
5:   Return  $\mathcal{R}^e \leftarrow \frac{1}{4|T|} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \end{pmatrix}$ 
6: Fin Fonction

```

Nous pouvons alors réécrire l'algorithme 4.6.5 pour obtenir l'algorithme d'assemblage de la matrice de rigidité \mathcal{R} :

Algorithm 4.6.11 Algorithme optimisé avec matrice élémentaire pour le calcul de la matrice de composantes $\int_{\Omega_h} \langle \nabla \varphi_i(x, y), \nabla \varphi_j(x, y) \rangle dx dy$

Données :

n_q : nombre de sommets
 n_{me} : nombre de triangles
 me :
 q :
 $areas$: tableau de n_{me} réels où $areas(k) = |T_k|$

Résultat : \mathcal{R} : matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$ (définition 34)

```

1: Fonction  $\mathcal{R} \leftarrow \text{STIFFASSEMBLING}(ns, nt, q, me, areas)$ 
2:    $\mathcal{R} \leftarrow 0$  ▷ Initialisation à 0 de la matrice creuse  $\mathcal{R}$ 
3:   Pour  $k \leftarrow 1$  à  $n_{me}$  faire ▷ boucle sur les triangles
4:      $\mathcal{R}^e \leftarrow \text{ELEMSTIFFMAT}(areas(k),$   

 $q(:, me(1, k)), q(:, me(2, k)), q(:, me(3, k))$ )
5:     Pour  $\alpha \leftarrow 1$  à 3 faire
6:        $i \leftarrow me(\alpha, k)$ 
7:       Pour  $\beta \leftarrow 1$  à 3 faire
8:          $j \leftarrow me(\beta, k)$ 
9:          $\mathcal{R}(i, j) \leftarrow \mathcal{R}(i, j) + \mathcal{R}^e(\alpha, \beta)$ 
10:      Fin Pour
11:    Fin Pour
12:  Fin Pour
13:  return  $\mathcal{R}$ 
14: Fin Fonction

```

4.6.4 Application : $f_{i,j}(x, y) = \langle \nabla \varphi_i(x, y), \mathbb{M}(x, y) \nabla \varphi_j(x, y) \rangle$

Definition 36 Soit \mathbb{M} une fonction continue de Ω_h à valeurs dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Nous supposons que la matrice $\mathbb{M}(x, y)$ est symétrique. Nous notons

$$\mathbb{M}(x, y) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}(x, y)$$

et $\mathcal{R}^{[\mathbb{M}]}$ la matrice d'ordre n_q d'élément $(i, j) \in \{1, \dots, n_q\}^2$ donné par

$$\mathcal{R}_{ij}^{[\mathbb{M}]} = \int_{\Omega_h} \langle \nabla \varphi_i(x, y), \mathbb{M}(x, y) \nabla \varphi_j(x, y) \rangle dx dy. \quad (4.6.8)$$

▲

La propriété (4.6.1) sur le support de la fonction $f_{i,j}$ est évidemment vérifiée. Nous définissons alors

Definition 37 Soit T un triangle régulier défini par ses trois sommets (q^1, q^2, q^3) de \mathbb{R}^2 . Notons $\tilde{\varphi}_\alpha$ la fonction de base **locale** affine associée au point q^α , $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ vérifiant $\tilde{\varphi}_\alpha(q^\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$. On définit alors $\mathcal{R}^{[M],e}(T)$ la matrice 3×3 de composante

$$\mathcal{R}_{\alpha,\beta}^{[M],e}(T) = \int_T \langle \nabla \tilde{\varphi}_\alpha(x, y), \mathbb{M}(x, y) \nabla \tilde{\varphi}_\beta(x, y) \rangle dx dy.$$

▲

Les fonctions $\tilde{\varphi}_\alpha$ sont affines sur le triangle T , leur gradient est donc constant (voir lemme 35 pour les formules explicites). Notons $\forall (x, y) \in T$

$$\nabla \tilde{\varphi}_\alpha(x, y) = \frac{1}{2|T|} \begin{pmatrix} a_\alpha \\ b_\alpha \end{pmatrix}$$

nous avons alors

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\alpha,\beta}^{[M],e}(T) &= \frac{1}{4|T|^2} \left[a_\alpha a_\beta \int_T m_{11}(x, y) dx dy + b_\alpha b_\beta \int_T m_{22}(x, y) dx dy \right. \\ &\quad \left. + (a_\alpha b_\beta + b_\alpha a_\beta) \int_T m_{12}(x, y) dx dy \right] \end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons la formule d'interpolation (??) pour approcher les différentes intégrales. De fait, cette formule consiste à approcher la fonction à intégrer par sa projection dans l'espace des fonctions de base locale. Nous avons donc

$$\int_T m_{\alpha,\beta}(x, y) \approx \frac{|T|}{3} (m_{\alpha,\beta}(q^1) + m_{\alpha,\beta}(q^2) + m_{\alpha,\beta}(q^3))$$

et

Lemma 37 Soit T un triangle régulier défini par ses trois sommets (q^1, q^2, q^3) de \mathbb{R}^2 . Nous avons, $\forall \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{R}_{\alpha,\beta}^{[M],e}(T) \approx \frac{1}{4|T|} (a_\alpha a_\beta M_{1,1}(T) + b_\alpha b_\beta M_{2,2}(T) + (a_\alpha b_\beta + b_\alpha a_\beta) M_{1,2}(T)) \quad (4.6.9)$$

avec, $\forall \mu, \nu \in \{1, 2\}$

$$M_{\mu,\nu}(T) = \frac{1}{3} (m_{\mu,\nu}(q^1) + m_{\mu,\nu}(q^2) + m_{\mu,\nu}(q^3)) \quad (4.6.10)$$

et

$$\begin{aligned} a_1 &= q_y^2 - q_y^3, & b_1 &= q_x^3 - q_x^2 \\ a_2 &= q_y^3 - q_y^1, & b_2 &= q_x^1 - q_x^3 \\ a_3 &= q_y^1 - q_y^2, & b_3 &= q_x^2 - q_x^1 \end{aligned}$$

◆

On a alors

Algorithm 4.6.12 Matrice élémentaire de rigidité avec ...

Données : $|T|$: aire du triangle
 q^1, q^2, q^3 : les 3 sommets du triangle
 TM : tableau de 3 réels tels que
 $TM(1) = M_{1,1}(T)$,
 $TM(2) = M_{1,2}(T)$ et
 $TM(3) = M_{2,2}(T)$

Résultat : \mathcal{R}^e : matrice élémentaire de rigidité avec ...

```

1: Fonction  $\mathcal{R}^{[M],e} \leftarrow \text{ELEMSTIFFMMAT}(|T|, q^1, q^2, q^3, \text{TM})$ 
2:    $\mathbf{u} \leftarrow q^2 - q^3$ 
3:    $\mathbf{v} \leftarrow q^3 - q^1$ 
4:    $\mathbf{w} \leftarrow q^1 - q^2$ 
5:    $\mathbb{A} \leftarrow \begin{pmatrix} \text{TM}(3) & -\text{TM}(2) \\ -\text{TM}(2) & \text{TM}(1) \end{pmatrix}$ 
6:   Return  $\mathcal{R}^{[M],e} \leftarrow \frac{1}{4|T|} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{w} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbb{A}\mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbb{A}\mathbf{w} \rangle \\ \langle \mathbf{w}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{w}, \mathbb{A}\mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{w}, \mathbb{A}\mathbf{w} \rangle \end{pmatrix}$ 
7: Fin Fonction

```

Nous venons de voir que pour le calcul approché de la matrice élémentaire nous n'avons pas besoin des fonctions m_{11} , m_{12} et m_{22} mais uniquement des 3 valeurs $M_{11}(T)$, $M_{12}(T)$ et $M_{22}(T)$ définies par 4.6.10. Pour l'algorithme d'assemblage, nous supposons le tableau TM de dimension $3 \times n_{\text{me}}$ préalablement initialisé à l'aide des fonctions m_{11} , m_{12} et m_{22} .

Algorithm 4.6.13 Algorithme optimisé avec matrice élémentaire pour le calcul de la matrice de composantes $\int_{\Omega_h} \langle \nabla \varphi_i(x, y), \mathbb{M}(x, y) \nabla \varphi_j(x, y) \rangle dx dy$

Données :
 n_q : nombre de sommets
 n_{me} : nombre de triangles
 me :
 q :
 $areas$: tableau de n_{me} réels où $areas(k) = |T_k|$
 TM : tableau de $3 \times n_{\text{me}}$ réels tels que
 $TM(1, k) = M_{1,1}(T_k)$,
 $TM(2, k) = M_{1,2}(T_k)$ et
 $TM(3, k) = M_{2,2}(T_k)$.

Résultat : $\mathcal{R}^{[M]}$: matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$ (définition 36)

```

1: Fonction  $\mathcal{R}^{[M]} \leftarrow \text{STIFFMASSEMBLING}(n_q, n_{\text{me}}, q, me, areas, \text{TM})$ 
2:    $\mathcal{R}^{[M]} \leftarrow 0$  ▷ Initialisation à 0 de la matrice creuse  $\mathcal{R}^{[M]}$ 
3:   Pour  $k \leftarrow 1$  à  $n_{\text{me}}$  faire ▷ boucle sur les triangles
4:      $\mathcal{R}^{[M],e} \leftarrow \text{ELEMSTIFFMMAT}(areas(k),$   

 $q(:, me(1, k)), q(:, me(2, k)), q(:, me(3, k)),$   

 $\text{TM}(:, k)$ 
5:     Pour  $\alpha \leftarrow 1$  à 3 faire
6:        $i \leftarrow me(\alpha, k)$ 

```

```

7:         Pour  $\beta \leftarrow 1$  à 3 faire
8:              $j \leftarrow \text{me}(\beta, k)$ 
9:              $\mathcal{R}^{[M]}(i, j) \leftarrow \mathcal{R}^{[M]}(i, j) + \mathcal{R}^{[M],e}(\alpha, \beta)$ 
10:        Fin Pour
11:    Fin Pour
12:    Fin Pour
13:    return  $\mathcal{R}^{[M]}$ 
14: Fin Fonction
    
```

4.6.5 Application : $f_{i,j}(x, y) = c(x, y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x, y) \varphi_j(x, y)$

Definition 38 Notons $\mathcal{K}_x^{[c]}$ la matrice d'ordre n_q dont l'élément $(i, j) \in \{1, \dots, n_q\}^2$ est donné par

$$(\mathcal{K}_x^{[c]})_{ij} = \int_{\Omega_h} c(x, y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy. \quad (4.6.11)$$

▲

La propriété (4.6.1) sur le support de la fonction $f_{i,j}$ est évidemment vérifiée. Nous définissons alors

Definition 39 Avec les notations usuelles, on définit alors $\mathcal{K}_x^{e,[c]}(T)$ la matrice 3×3 de composante

$$\left(\mathcal{K}_x^{e,[c]}(T)\right)_{\alpha,\beta} = \int_T c(x, y) \frac{\partial \tilde{\varphi}_\alpha}{\partial x}(x, y) \tilde{\varphi}_\beta(x, y) dx dy, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$$

▲

Les fonctions $\tilde{\varphi}_\alpha$ sont affines sur le triangle T , leur gradient est donc constant (voir lemme 35 pour les formules explicites). On note $\forall (x, y) \in T$

$$\nabla \tilde{\varphi}_\alpha(x, y) = \frac{1}{2|T|} \begin{pmatrix} a_\alpha \\ b_\alpha \end{pmatrix}$$

nous avons alors, $\forall (\alpha, \beta) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$,

$$\left(\mathcal{K}_x^{e,[c]}(T)\right)_{\alpha,\beta} = \frac{a_\alpha}{2|T|} \int_T c(x, y) \tilde{\varphi}_\beta(x, y) dx dy$$

Ensuite, on approche la fonction c par $\Pi_h((\cdot)c)$ et on note $c_\gamma = c(q_\gamma)$ pour $\gamma \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{K}_x^{e,[c]}(T)\right)_{\alpha,\beta} &\approx \frac{a_\alpha}{2|T|} \sum_{\gamma=1}^3 c_\gamma \int_T \tilde{\varphi}_\gamma(x, y) \tilde{\varphi}_\beta(x, y) dx dy \\ &\approx \frac{a_\alpha}{2|T|} \left(\mathcal{M}^e(T) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right)_\beta \end{aligned}$$

où $\mathcal{M}^e(T)$ est la matrice de Masse élémentaire sur le triangle T (voir définition 31). On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_x^{e,[c]}(T) &\approx \frac{1}{2|T|} \mathcal{M}^e(T) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} (a_1 \quad a_2 \quad a_3) \\ &\approx \frac{1}{2|T|} \frac{|T|}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} (a_1 \quad a_2 \quad a_3) \\ &\approx \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2c_1 + c_2 + c_3 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} (a_1 \quad a_2 \quad a_3)\end{aligned}$$

Cette formule est exacte si c est affine sur T .

On a alors

Algorithm 4.6.14 Matrice élémentaire $\mathcal{K}_x^{e,[c]}(T)$

Données : q_y^1, q_y^2, q_y^3 : les composantes en y des 3 sommets du triangle T .
 Tc : tableau de 3 réels tels que
 $Tc(\alpha) = c(q^\alpha), \forall \alpha \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$

Résultat : \mathcal{K}^e : matrice élémentaire $\mathcal{K}_x^{e,[c]}(T)$.

```

1: Fonction  $\mathcal{K}^e \leftarrow \text{ELEMKXMAT}(q_y^1, q_y^2, q_y^3, c)$ 
2:    $u_1 \leftarrow q_y^2 - q_y^3$ 
3:    $u_2 \leftarrow q_y^3 - q_y^1$ 
4:    $u_3 \leftarrow q_y^1 - q_y^2$ 
5:    $v_1 \leftarrow 2Tc(1) + Tc(2) + Tc(3)$ 
6:    $v_2 \leftarrow Tc(1) + 2Tc(2) + Tc(3)$ 
7:    $v_3 \leftarrow Tc(1) + Tc(2) + 2Tc(3)$ 
8:   Return  $\mathcal{K}^e \leftarrow \frac{1}{24} \begin{pmatrix} v_1 u_1 & v_1 u_2 & v_1 u_3 \\ v_2 u_1 & v_2 u_2 & v_2 u_3 \\ v_3 u_1 & v_3 u_2 & v_3 u_3 \end{pmatrix}$ 
9: Fin Fonction

```

Algorithm 4.6.15 Algorithme optimisé avec matrice élémentaire pour le calcul de la matrice $\mathcal{K}_x^{[c]}$ de composantes

$$(\mathcal{K}_x^{[c]})_{ij} = \int_{\Omega_h} c(x, y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n_q \rrbracket^2.$$

Données :

n_q : nombre de sommets
 n_{me} : nombre de triangles
 me :
 q :
 Tc : tableau de n_q réels tels que
 $Tc(i) = c(q(:, i))$.

Résultat : $\mathcal{K}_x^{[c]}$: matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$

```

1: Fonction  $\mathcal{K}_x^{[c]} \leftarrow \text{KcXASSEMBLING}(ns, nt, q, me, Tc)$ 
2:    $\mathcal{K}_x^{[c]} \leftarrow 0$  ▷ Initialisation à 0 de la matrice creuse  $\mathcal{K}_x^{[c]}$ 
3:   Pour  $k \leftarrow 1$  à  $n_{me}$  faire ▷ boucle sur les triangles
4:      $\mathcal{K}^e \leftarrow \text{ElemKcxMat}(q(2, me(1, k)), q(2, me(2, k)), q(2, me(3, k)),$   

        $Tc(me(:, k)))$ 
5:     Pour  $\alpha \leftarrow 1$  à 3 faire
6:        $i \leftarrow me(\alpha, k)$ 
7:       Pour  $\beta \leftarrow 1$  à 3 faire
8:          $j \leftarrow me(\beta, k)$ 
9:          $\mathcal{K}_x^{[c]}(i, j) \leftarrow \mathcal{K}_x^{[c]}(i, j) + \mathcal{K}^e(\alpha, \beta)$ 
10:      Fin Pour
11:    Fin Pour
12:  Fin Pour
13:  return  $\mathcal{K}_x^{[c]}$ 
14: Fin Fonction
    
```

4.6.6 Application : $f_{i,j}(x, y) = c(x, y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(x, y) \varphi_j(x, y)$

Definition 40 Notons $\mathcal{K}_y^{[c]}$ la matrice d'ordre n_q dont l'élément $(i, j) \in \{1, \dots, n_q\}^2$ est donné par

$$(\mathcal{K}_y^{[c]})_{ij} = \int_{\Omega_h} c(x, y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy. \quad (4.6.12)$$

▲

La propriété (4.6.1) sur le support de la fonction $f_{i,j}$ est évidemment vérifiée. Nous définissons alors

Definition 41 Avec les notations usuelles, on définit alors $\mathcal{K}_y^{e,[c]}(T)$ la matrice 3×3 de composante

$$(\mathcal{K}_y^{e,[c]})_{\alpha,\beta}(T) = \int_T c(x, y) \frac{\partial \tilde{\varphi}_\alpha}{\partial y}(x, y) \tilde{\varphi}_\beta(x, y) dx dy, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$$

▲

Comme pour le calcul de $\mathcal{K}_x^{[c]}$, on a

$$\mathcal{K}_y^{e,[c]}(T) \approx \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2c_1 + c_2 + c_3 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x^3 - q_x^2 & q_x^1 - q_x^3 & q_x^2 - q_x^1 \end{pmatrix}$$

Cette formule est exacte si c est affine sur T .

Algorithm 4.6.16 Matrice élémentaire $\mathcal{K}_y^{e,[c]}(T)$

Données : q_x^1, q_x^2, q_x^3 : les composantes en x des 3 sommets du triangle T .
 Tc : tableau de 3 réels tels que
 $Tc(\alpha) = c(q^\alpha), \forall \alpha \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$

Résultat : \mathcal{K}^e : matrice élémentaire $\mathcal{K}_y^{e,[c]}(T)$.

```

1: Fonction  $\mathcal{K}^e \leftarrow \text{ELEMKCYMAT}(q_x^1, q_x^2, q_x^3, Tc)$ 
2:    $u_1 \leftarrow q_x^3 - q_x^2$ 
3:    $u_2 \leftarrow q_x^1 - q_x^3$ 
4:    $u_3 \leftarrow q_x^2 - q_x^1$ 
5:    $v_1 \leftarrow 2Tc(1) + Tc(2) + Tc(3)$ 
6:    $v_2 \leftarrow Tc(1) + 2Tc(2) + Tc(3)$ 
7:    $v_3 \leftarrow Tc(1) + Tc(2) + 2Tc(3)$ 
8:   Return  $\mathcal{K}^e \leftarrow \frac{1}{24} \begin{pmatrix} v_1u_1 & v_1u_2 & v_1u_3 \\ v_2u_1 & v_2u_2 & v_2u_3 \\ v_3u_1 & v_3u_2 & v_3u_3 \end{pmatrix}$ 
9: Fin Fonction

```

Algorithm 4.6.17 Algorithme optimisé avec matrice élémentaire pour le calcul de la matrice $\mathcal{K}_y^{[c]}$ de composantes

$$(\mathcal{K}_y^{[c]})_{ij} = \int_{\Omega_h} c(x, y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n_q \rrbracket^2.$$

Données :

n_q : nombre de sommets
 n_{me} : nombre de triangles
 me :
 q :
 Tc : tableau de n_q réels tels que
 $Tc(i) = c(q(:, i))$.

Résultat : $\mathcal{K}_y^{[c]}$: matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$

```

1: Fonction  $\mathcal{K}_y^{[c]} \leftarrow \text{KCYASSEMBLING}(ns, nt, q, me, Tc)$ 
2:    $\mathcal{K}_y^{[c]} \leftarrow 0$  ▷ Initialisation à 0 de la matrice creuse  $\mathcal{K}_y^{[c]}$ 
3:   Pour  $k \leftarrow 1$  à  $n_{me}$  faire ▷ boucle sur les triangles
4:      $\mathcal{K}^e \leftarrow \text{ElemKcyMat}(q(2, me(1, k)), q(2, me(2, k)), q(2, me(3, k)),$   

        $Tc(me(:, k)))$ 
5:     Pour  $\alpha \leftarrow 1$  à 3 faire
6:        $i \leftarrow me(\alpha, k)$ 
7:       Pour  $\beta \leftarrow 1$  à 3 faire
8:          $j \leftarrow me(\beta, k)$ 
9:          $\mathcal{K}_y^{[c]}(i, j) \leftarrow \mathcal{K}_y^{[c]}(i, j) + \mathcal{K}^e(\alpha, \beta)$ 
10:      Fin Pour
11:    Fin Pour
12:  Fin Pour
13:  return  $\mathcal{K}_y^{[c]}$ 
14: Fin Fonction

```

4.6.7 Application : $f_{i,j}(x, y) = \frac{\partial c}{\partial x}(x, y)\varphi_i(x, y)\varphi_j(x, y)$

Definition 42 Notons $\mathcal{G}_x^{[c]}$ la matrice d'ordre n_q dont l'élément $(i, j) \in \{1, \dots, n_q\}^2$ est donné par

$$(\mathcal{G}_x^{[c]})_{ij} = \int_{\Omega_h} \frac{\partial c}{\partial x}(x, y)\varphi_i(x, y)\varphi_j(x, y)dxdy. \quad (4.6.13)$$

▲

La propriété (4.6.1) sur le support de la fonction $f_{i,j}$ est évidemment vérifiée. Nous définissons alors

Definition 43 Avec les notations usuelles, on définit alors $\mathcal{G}_x^{e,[c]}(T)$ la matrice 3×3 de composante

$$(\mathcal{G}_x^{e,[c]})_{\alpha,\beta}(T) = \int_T \frac{\partial c}{\partial x}(x, y)\tilde{\varphi}_\alpha(x, y)\tilde{\varphi}_\beta(x, y)dxdy, \quad \forall(\alpha, \beta) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$$

▲

Pour approcher cette matrice, on peut projeter la fonction c dans X_h^1 . On a alors, $\forall(x, y) \in T$,

$$c(x, y) \approx (\Pi_h c)(x, y) = \sum_{\gamma=1}^3 \tilde{c}_\gamma \tilde{\varphi}_\gamma(x, y)$$

avec $\tilde{c}_\gamma = c(q_\gamma)$. On approche alors $\frac{\partial c}{\partial x}$ sur T par

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x, y) \approx \sum_{\gamma=1}^3 \tilde{c}_\gamma \frac{\partial \tilde{\varphi}_\gamma}{\partial x}(x, y).$$

Les fonctions $\tilde{\varphi}_\gamma$ sont affines sur le triangle T , leur gradient est donc constant (voir lemme 35 pour les formules explicites). On note $\forall(x, y) \in T$

$$\nabla \tilde{\varphi}_\gamma(x, y) = \frac{1}{2|T|} \begin{pmatrix} a_\gamma \\ b_\gamma \end{pmatrix}.$$

et

$$\nu_x = \sum_{\gamma=1}^3 \tilde{c}_\gamma a_\gamma,$$

On obtient alors, $\forall(\alpha, \beta) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$,

$$(\mathcal{G}_x^{e,[c]})_{\alpha,\beta}(T) = \frac{\nu_x}{2|T|} \int_T \tilde{\varphi}_\alpha(x, y)\tilde{\varphi}_\beta(x, y)dxdy.$$

Ce qui donne en utilisant la matrice de masse élémentaire (voir définition 31)

$$\mathcal{G}_x^{e,[c]} = \frac{\nu_x}{2|T|} \mathcal{M}^e(T)$$

c'est à dire, en utilisant la relation (4.6.3),

$$\mathcal{G}_x^{e,[c]} \approx \frac{\nu_x}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.6.14)$$

Cette formule est exacte si c est affine sur T .

On a alors

Algorithm 4.6.18 Matrice élémentaire $\mathcal{G}_x^{e,[c]}(T)$

Données : q_y^1, q_y^2, q_y^3 : les composantes en y des 3 sommets du triangle T .
 Tc : tableau de 3 réels tels que
 $Tc(\alpha) = c(q^\alpha), \forall \alpha \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$

Résultat : \mathcal{G}^e : matrice élémentaire $\mathcal{G}_x^{e,[c]}(T)$.

```

1: Fonction  $\mathcal{G}^e \leftarrow \text{ELEMGCXMAT}(q_y^1, q_y^2, q_y^3, c)$ 
2:    $u_1 \leftarrow q_y^2 - q_y^3$ 
3:    $u_2 \leftarrow q_y^3 - q_y^1$ 
4:    $u_3 \leftarrow q_y^1 - q_y^2$ 
5:    $\nu_x \leftarrow Tc(1) * u_1 + Tc(2) * u_2 + Tc(3) * u_3$ 
6:   Return  $\mathcal{G}^e \leftarrow \frac{\nu_x}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 
7: Fin Fonction

```

Algorithm 4.6.19 Algorithme optimisé avec matrice élémentaire pour le calcul de la matrice $\mathcal{G}_x^{[c]}$ de composantes

$$(\mathcal{G}_x^{[c]})_{ij} = \int_{\Omega_h} \frac{\partial c}{\partial x}(x, y) \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n_q \rrbracket^2.$$

Données :

n_q : nombre de sommets
 n_{me} : nombre de triangles
 me :
 q :
 Tc : tableau de n_q réels tels que
 $Tc(i) = c(q(:, i))$.

Résultat : $\mathcal{G}_x^{[c]}$: matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$

```

1: Fonction  $\mathcal{G}_x^{[c]} \leftarrow \text{GCXASSEMBLING}(n_q, n_{me}, q, me, Tc)$ 
2:    $\mathcal{G}_x^{[c]} \leftarrow 0$  ▷ Initialisation à 0 de la matrice creuse  $\mathcal{G}_x^{[c]}$ 
3:   Pour  $k \leftarrow 1$  à  $n_{me}$  faire ▷ boucle sur les triangles
4:      $\mathcal{G}^e \leftarrow \text{ElemGcxMat}(q(2, me(1, k)), q(2, me(2, k)), q(2, me(3, k)),$   

        $Tc(me(:, k)))$ 
5:     Pour  $\alpha \leftarrow 1$  à 3 faire
6:        $i \leftarrow me(\alpha, k)$ 
7:       Pour  $\beta \leftarrow 1$  à 3 faire

```

```

8:         j ← me(β, k)
9:          $\mathcal{G}_x^{[c]}(i, j) \leftarrow \mathcal{G}_x^{[c]}(i, j) + \mathcal{G}^e(\alpha, \beta)$ 
10:      Fin Pour
11:  Fin Pour
12:  Fin Pour
13:  return  $\mathcal{G}_x^{[c]}$ 
14: Fin Fonction
    
```

4.6.8 Application : $f_{i,j}(x, y) = \frac{\partial c}{\partial y}(x, y)\varphi_i(x, y)\varphi_j(x, y)$

Definition 44 Notons $\mathcal{G}_y^{[c]}$ la matrice d'ordre n_q dont l'élément $(i, j) \in \{1, \dots, n_q\}^2$ est donné par

$$(\mathcal{G}_y^{[c]})_{ij} = \int_{\Omega_h} \frac{\partial c}{\partial y}(x, y)\varphi_i(x, y)\varphi_j(x, y)dxdy. \quad (4.6.15)$$

▲

La propriété (4.6.1) sur le support de la fonction $f_{i,j}$ est évidemment vérifiée. Nous définissons alors

Definition 45 Avec les notations usuelles, on définit alors $\mathcal{G}_y^{e,[c]}(T)$ la matrice 3×3 de composante

$$(\mathcal{G}_y^{e,[c]})_{\alpha,\beta}(T) = \int_T \frac{\partial c}{\partial y}(x, y)\tilde{\varphi}_\alpha(x, y)\tilde{\varphi}_\beta(x, y)dxdy, \quad \forall(\alpha, \beta) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$$

▲

De manière similaire à (??), on note

$$\nu_y = \sum_{\gamma=1}^3 \tilde{c}_\gamma b_\gamma,$$

où b_γ est donné par (??). On obtient alors, $\forall(\alpha, \beta) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$,

$$\mathcal{G}_y^{e,[c]} \approx \frac{\nu_y}{2|T|} \mathcal{M}^e(T)$$

c'est à dire, en utilisant la relation (4.6.3),

$$\mathcal{G}_y^{e,[c]} \approx \frac{\nu_y}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.6.16)$$

Cette formule est exacte si c est affine sur T .

On a alors

Algorithm 4.6.20 Matrice élémentaire $\mathcal{G}_y^{e,[c]}(T)$

Données : q_x^1, q_x^2, q_x^3 : les composantes en x des 3 sommets du triangle T .
 Tc : tableau de 3 réels tels que
 $Tc(\alpha) = c(q^\alpha), \forall \alpha \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$

Résultat : \mathcal{G}^e : matrice élémentaire $\mathcal{G}_y^{e,[c]}(T)$.

```

1: Fonction  $\mathcal{G}^e \leftarrow \text{ELEMGCYMAT}(q_x^1, q_x^2, q_x^3, c)$ 
2:    $u_1 \leftarrow q_x^3 - q_x^2$ 
3:    $u_2 \leftarrow q_x^1 - q_x^3$ 
4:    $u_3 \leftarrow q_x^2 - q_x^1$ 
5:    $\nu_y \leftarrow Tc(1) * u_1 + Tc(2) * u_2 + Tc(3) * u_3$ 
6:   Return  $\mathcal{G}^e \leftarrow \frac{\nu_y}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 
7: Fin Fonction

```

Algorithm 4.6.21 Algorithme optimisé avec matrice élémentaire pour le calcul de la matrice $\mathcal{G}_y^{[c]}$ de composantes

$$(\mathcal{G}_y^{[c]})_{ij} = \int_{\Omega_h} \frac{\partial c}{\partial y}(x, y) \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n_q \rrbracket^2.$$

Données :

n_q : nombre de sommets
 n_{me} : nombre de triangles
 me :
 q :
 Tc : tableau de n_q réels tels que
 $Tc(i) = c(q(:, i))$.

Résultat : $\mathcal{G}_y^{[c]}$: matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$

```

1: Fonction  $\mathcal{G}_y^{[c]} \leftarrow \text{GCYASSEMBLING}(ns, nt, q, me, Tc)$ 
2:    $\mathcal{G}_y^{[c]} \leftarrow 0$  ▷ Initialisation à 0 de la matrice creuse  $\mathcal{G}_y^{[c]}$ 
3:   Pour  $k \leftarrow 1$  à  $n_{me}$  faire ▷ boucle sur les triangles
4:      $\mathcal{G}^e \leftarrow \text{ElemGcyMat}(q(1, me(1, k)), q(1, me(2, k)), q(1, me(3, k)),$   

        $Tc(me(:, k)))$ 
5:     Pour  $\alpha \leftarrow 1$  à 3 faire
6:        $i \leftarrow me(\alpha, k)$ 
7:       Pour  $\beta \leftarrow 1$  à 3 faire
8:          $j \leftarrow me(\beta, k)$ 
9:          $\mathcal{G}_y^{[c]}(i, j) \leftarrow \mathcal{G}_y^{[c]}(i, j) + \mathcal{G}^e(\alpha, \beta)$ 
10:      Fin Pour
11:    Fin Pour
12:  Fin Pour
13:  return  $\mathcal{G}_y^{[c]}$ 
14: Fin Fonction

```

4.6.9 Application : $f_{i,j} = \langle \mathbf{p}, \nabla \varphi_i \rangle \varphi_j$

Definition 46 Soit \mathbf{p} une application de Ω à valeurs dans \mathbb{R}^2 . On note $\mathcal{K}_{\nabla}^{[p]}$ la matrice d'ordre n_q dont l'élément $(i, j) \in \{1, \dots, n_q\}^2$ est donné par

$$(\mathcal{K}_{\nabla}^{[p]})_{ij} = \int_{\Omega_h} \langle \mathbf{p}(x, y), \nabla \varphi_i(x, y) \rangle \varphi_j(x, y) dx dy. \quad (4.6.17)$$

▲

La propriété (4.6.1) sur le support de la fonction $f_{i,j}$ est évidemment vérifiée. Nous définissons alors

Definition 47 Avec les notations usuelles, on définit alors $\mathcal{K}_{\nabla}^{e,[\mathbf{p}]}(T)$ la matrice 3×3 de composante

$$\left(\mathcal{K}_{\nabla}^{e,[\mathbf{p}]}(T)\right)_{\alpha,\beta} = \int_T \langle \mathbf{p}(x,y), \nabla \tilde{\varphi}_{\alpha}(x,y) \rangle \tilde{\varphi}_{\beta}(x,y) dx dy, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$$

▲

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ &: (x,y) \mapsto \mathbf{p}(x,y) = \begin{pmatrix} p_1(x,y) \\ p_2(x,y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\langle \mathbf{p}, \nabla \varphi_i \rangle = p_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + p_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}.$$

On obtient alors

$$\mathcal{K}_{\nabla}^{e,[\mathbf{p}]}(T) = \mathcal{K}_x^{e,[p_1]}(T) + \mathcal{K}_y^{e,[p_2]}(T)$$

et

$$\mathcal{K}_{\nabla}^{[\mathbf{p}]} = \mathcal{K}_x^{[p_1]} + \mathcal{K}_y^{[p_2]}.$$

Algorithm 4.6.22 Algorithme de calcul de la matrice $\mathcal{K}_{\nabla}^{[\mathbf{p}]}$ de composantes

$$\left(\mathcal{K}_{\nabla}^{[\mathbf{p}]}\right)_{ij} = \int_{\Omega_h} \langle \mathbf{p}(x,y), \nabla \varphi_i(x,y) \rangle \varphi_j(x,y), \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1, n_q \rrbracket^2.$$

Données :

- n_q : nombre de sommets
- n_{me} : nombre de triangles
- me :
- q :
- Tp : tableau de $2 \times n_q$ réels tels que
 $Tp(:, i) = \mathbf{p}(q(:, i))$

Résultat : $\mathcal{K}_{\nabla}^{[\mathbf{p}]}$: matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$

- 1: **Fonction** $\mathcal{K}_{\nabla}^{[\mathbf{p}]}$ \leftarrow KGRADPASSEMBLING(ns, nt, q, me, Tp)
 - 2: $\mathcal{K}_{\nabla}^{[\mathbf{p}]}$ \leftarrow KcxAssembling($ns, nt, q, me, Tp(1, :)$)
 +KcyAssembling($ns, nt, q, me, Tp(2, :)$)
 - 3: **return** $\mathcal{K}_{\nabla}^{[\mathbf{p}]}$
 - 4: **Fin Fonction**
-

4.6.10 Application : $f_{i,j} = \text{div}(\mathbf{p})\varphi_i\varphi_j$

Definition 48 Soit \mathbf{p} une application de Ω à valeurs dans \mathbb{R}^2 . On note $\mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]}$ la matrice d'ordre n_q dont l'élément $(i, j) \in \{1, \dots, n_q\}^2$ est donné par

$$(\mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]})_{ij} = \int_{\Omega_h} \text{div}(\mathbf{p})(x, y)\varphi_i(x, y)\varphi_j(x, y)dxdy. \quad (4.6.18)$$

▲

La propriété (4.6.1) sur le support de la fonction $f_{i,j}$ est évidemment vérifiée. Nous définissons alors

Definition 49 Avec les notations usuelles, on définit alors $\mathcal{G}_{\text{div}}^{e, [\mathbf{p}]}(T)$ la matrice 3×3 de composante

$$(\mathcal{G}_{\text{div}}^{e, [\mathbf{p}]}(T))_{\alpha, \beta} = \int_T \text{div}(\mathbf{p})(x, y)\tilde{\varphi}_\alpha(x, y)\tilde{\varphi}_\beta(x, y)dxdy, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$$

▲

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &: \Omega && \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ &: (x, y) && \mapsto \mathbf{p}(x, y) = \begin{pmatrix} p_1(x, y) \\ p_2(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\text{div}(\mathbf{p}) = \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y}.$$

On obtient alors

$$\mathcal{G}_{\text{div}}^{e, [\mathbf{p}]}(T) = \mathcal{G}_x^{e, [p_1]}(T) + \mathcal{G}_y^{e, [p_2]}(T)$$

et

$$\mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]} = \mathcal{G}_x^{[p_1]} + \mathcal{G}_y^{[p_2]}.$$

Algorithm 4.6.23 Algorithme de calcul de la matrice $\mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]}$ de composantes

$$(\mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]})_{ij} = \int_{\Omega_h} \text{div}(\mathbf{p})(x, y)\varphi_i(x, y)\varphi_j(x, y), \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n_q \rrbracket^2.$$

Données :

- n_q : nombre de sommets
- n_{me} : nombre de triangles
- me :
- q :
- Tp : tableau de $2 \times n_q$ réels tels que
 $Tp(:, i) = \mathbf{p}(q(:, i))$

Résultat : $\mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]}$: matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$

- 1: **Fonction** $\mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]} \leftarrow \text{GDIVP ASSEMBLING}(ns, nt, q, me, Tp)$
 - 2: $\mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]} \leftarrow \text{GcxAssembling}(ns, nt, q, me, Tp(1, :))$
 $\quad + \text{GcyAssembling}(ns, nt, q, me, Tp(2, :))$
 - 3: **return** $\mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]}$
 - 4: **Fin Fonction**
-

4.6.11 Application : $f_{i,j} = \text{div}(\mathbf{p}\varphi_i)\varphi_j$

Definition 50 Soit \mathbf{p} une application de Ω à valeurs dans \mathbb{R}^2 . On note $\mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]}$ la matrice d'ordre n_q dont l'élément $(i, j) \in \{1, \dots, n_q\}^2$ est donné par

$$(\mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]})_{ij} = \int_{\Omega_h} \text{div}(\mathbf{p}(x, y)\varphi_i(x, y))\varphi_j(x, y)dxdy. \quad (4.6.19)$$

▲

La propriété (4.6.1) sur le support de la fonction $f_{i,j}$ est évidemment vérifiée. Nous définissons alors

Definition 51 Avec les notations usuelles, on définit alors $\mathcal{D}_{\text{div}}^{e,[\mathbf{p}]}(T)$ la matrice 3×3 de composante

$$\left(\mathcal{D}_{\text{div}}^{e,[\mathbf{p}]}(T)\right)_{\alpha,\beta} = \int_T \text{div}(\mathbf{p}(x, y)\tilde{\varphi}_\alpha(x, y))\tilde{\varphi}_\beta(x, y)dxdy, \quad \forall(\alpha, \beta) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$$

▲

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ &: (x, y) \mapsto \mathbf{p}(x, y) = \begin{pmatrix} p_1(x, y) \\ p_2(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\text{div}(\mathbf{p}u) = \text{div}(\mathbf{p}u) + \langle \mathbf{p}, \nabla u \rangle.$$

On obtient alors

$$\mathcal{D}_{\text{div}}^{e,[\mathbf{p}]}(T) = \mathcal{G}_{\text{div}}^{e,[\mathbf{p}]} + \mathcal{K}_{\nabla}^{e,[\mathbf{p}]}(T)$$

et

$$\mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]} = \mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]} + \mathcal{K}_{\nabla}^{[\mathbf{p}]}.$$

Algorithm 4.6.24 Algorithme de calcul de la matrice $\mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]}$ de composantes

$$(\mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]})_{ij} = \int_{\Omega_h} \text{div}(\mathbf{p}(x, y)\varphi_i(x, y))\varphi_j(x, y), \quad \forall(i, j) \in \llbracket 1, n_q \rrbracket^2.$$

Données :

- n_q : nombre de sommets
- n_{me} : nombre de triangles
- me :
- q :
- Tp : tableau de $2 \times n_q$ réels tels que
 $Tp(:, i) = \mathbf{p}(q(:, i))$

Résultat : $\mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]}$: matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$

- 1: **Fonction** $\mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]}$ \leftarrow DDIVPASSEMBLING(ns, nt, q, me, Tp)
 - 2: $\mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]}$ \leftarrow KgradpAssembling(ns, nt, q, me, Tp)
 \quad +GdivpAssembling(ns, nt, q, me, Tp)
 - 3: **return** $\mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]}$
 - 4: **Fin Fonction**
-

4.7 composante du type $\int_{\Gamma_h} g_{i,j}(x,y)d\gamma(x,y)$

Les fonctions $(g_{i,j})_{i,j=1}^{n_q}$ sont définies sur Γ_h à valeurs réelles. Nous supposons que leurs supports sont tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n_q\} \quad \text{supp } g_{i,j} = \text{supp } \varphi_i \cap \text{supp } \varphi_j \cap \Gamma_h \quad (4.7.1)$$

Par exemple, nous étudierons les cas

$$\begin{aligned} g_{i,j}(x,y) &= \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y) \\ g_{i,j}(x,y) &= w(x,y)\varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y) \end{aligned}$$

où w est une fonction de Γ_h à valeurs réelles.

Nous voulons calculer la matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$ de composantes

$$\mathbb{B}_{i,j} = \int_{\Gamma_h} g_{i,j}(x,y)d\gamma(x,y)$$

En notant

$$\Gamma_h^{(l)} =]q^{\text{be}(1,l)}; q^{\text{be}(2,l)}[$$

et en utilisant les propriétés de la triangulation, nous avons

$$\Gamma_h = \bigcup_{l=1}^{n_{\text{be}}} \overline{\Gamma_h^{(l)}} \quad \text{et} \quad \forall (l,m) \in \{1, \dots, n_{\text{be}}\}^2 \quad l \neq m, \quad \Gamma_h^{(l)} \cap \Gamma_h^{(m)} = \emptyset \quad (4.7.2)$$

et donc

$$\mathbb{B}_{i,j} = \sum_{l=1}^{n_{\text{be}}} \int_{\Gamma_h^{(l)}} g_{i,j}(x,y)d\gamma(x,y)$$

Nous allons maintenant écrire un algorithme simpliste (à ne surtout pas implémenter) permettant de calculer la matrice \mathbb{B} .

Algorithm 4.7.25 Algorithme Simple pour le calcul de la matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$ de composantes

$$\mathbb{B}_{i,j} = \int_{\Gamma_h} g_{i,j}(x,y)d\gamma(x,y)$$

sous les hypothèses (4.7.1).

Données : **Mesh** : structure maillage
 $(g_{i,j})_{i,j=1}^{n_q}$: ensemble des fonctions
Résultat : \mathbb{B} : matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$
de composante $\mathbb{B}_{i,j} = \int_{\Gamma_h} g_{i,j}(x,y)d\gamma(x,y)$

```

1:  $\mathbb{B} \leftarrow 0$  ▷ Initialisation à 0 de la matrice creuse  $\mathbb{B}$ 
2: Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n_q$  faire ▷ boucle sur les sommets
3:   Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n_q$  faire ▷ boucle sur les sommets
4:     Pour  $l \leftarrow 1$  à  $n_{\text{be}}$  faire ▷ boucle sur les arêtes de  $\Gamma_h$ 
5:        $\mathbb{B}(i,j) \leftarrow \mathbb{B}(i,j) + \int_{\Gamma_h^{(l)}} g_{i,j}(x,y)d\gamma(x,y)$ 
6:     Fin Pour
7:   Fin Pour
```

8: **Fin Pour**

Nous allons optimiser cet algorithme. Pour cela nous permutons les boucles sur les nœuds avec la boucle sur les arêtes :

Algorithm 4.7.26 Algorithme simple avec permutation pour le calcul de la matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$ de composantes

$$\mathbb{B}_{i,j} = \int_{\Gamma_h} g_{i,j}(x,y)d\gamma(x,y)$$

sous les hypothèses (4.7.1).

Données : Mesh : structure maillage
 $(g_{i,j})_{i,j=1}^{n_q}$: ensemble des fonctions
Résultat : \mathbb{B} : matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$

```

1:  $\mathbb{B} \leftarrow 0$                                  $\triangleright$  Initialisation à 0 de la matrice creuse  $\mathbb{B}$ 
2: Pour  $l \leftarrow 1$  à  $n_{be}$  faire                 $\triangleright$  boucle sur les arêtes de  $\Gamma_h$ 
3:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n_q$  faire                 $\triangleright$  boucle sur les sommets
4:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n_q$  faire                 $\triangleright$  boucle sur les sommets
5:        $\mathbb{B}(i,j) \leftarrow \mathbb{B}(i,j) + \int_{\Gamma_h^{(l)}} g_{i,j}(x,y)d\gamma(x,y)$ 
6:     Fin Pour
7:   Fin Pour
8: Fin Pour

```

Nous remarquons que

$$\text{si } \Gamma_h^{(l)} \cap \text{supp } g_{i,j} = \emptyset \quad \text{alors} \quad \int_{\Gamma_h^{(l)}} g_{i,j}(x,y)d\gamma(x,y) = 0.$$

Ce qui veut dire :

$$\text{si } \Gamma_h^{(l)} \cap (\text{supp } \varphi_i \cap \text{supp } \varphi_j) = \emptyset \quad \text{alors} \quad \int_{\Gamma_h^{(l)}} g_{i,j}(x,y)d\gamma(x,y) = 0$$

ou encore

$$\text{si } q^i \notin \overline{\Gamma_h^{(l)}} \quad \text{ou} \quad q^j \notin \overline{\Gamma_h^{(l)}} \quad \text{alors} \quad \int_{\Gamma_h^{(l)}} g_{i,j}(x,y)d\gamma(x,y) = 0$$

Donc, dans les boucles en i et j (algorithme 4.7.26 lignes 3 et 4) les seules valeurs ayant une contribution non nécessairement nulle sont obtenues pour $i \in \text{be}(:, l)$ et $j \in \text{be}(:, l)$. Ceci nous permet d'écrire

Algorithm 4.7.27 Algorithme optimisé pour le calcul de la matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$ de composantes

$$\mathbb{B}_{i,j} = \int_{\Gamma_h} g_{i,j}(x,y)d\gamma(x,y)$$

sous les hypothèses (4.7.1).

Données : Mesh : structure maillage
 $(g_{i,j})_{i,j=1}^{n_q}$: ensemble des fonctions
Résultat : \mathbb{B} : matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$

```

1:  $\mathbb{B} \leftarrow 0$  ▷ Initialisation à 0 de la matrice creuse  $\mathbb{B}$ 
2: Pour  $l \leftarrow 1$  à  $n_{\text{be}}$  faire ▷ boucle sur les arêtes de  $\Gamma_h$ 
3:   Pour  $\mu \leftarrow 1$  à 2 faire ▷ boucle sur les 2 extrémités de  $\Gamma_h^{(l)}$ 
4:      $i \leftarrow \text{be}(\mu, l)$ 
5:     Pour  $\nu \leftarrow 1$  à 2 faire ▷ boucle sur les 2 extrémités de  $\Gamma_h^{(l)}$ 
6:        $j \leftarrow \text{be}(\nu, l)$ 
7:        $\mathbb{B}(i, j) \leftarrow \mathbb{B}(i, j) + \int_{\Gamma_h^{(l)}} g_{i,j}(x, y) d\gamma(x, y)$ 
8:     Fin Pour
9:   Fin Pour
10: Fin Pour

```

Une autre façon de l'écrire est d'utiliser les matrices élémentaires qui, pour une arête de Γ_h donnée, vont contenir l'ensemble des 2×2 contributions non nécessairement nulles. Notons $\mathbb{B}^e(\Gamma_h^{(l)}) \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$(\mathbb{B}^e(\Gamma_h^{(l)}))_{\mu,\nu} = \int_{\Gamma_h^{(l)}} g_{\text{be}(\mu,l),\text{be}(\nu,l)}(x, y) d\gamma(x, y)$$

Pour calculer cette matrice, nous avons juste besoin des 2 extrémités de l'arête $\Gamma_h^{(l)}$ et des 4 fonctions $(g_{\text{be}(\mu,l),\text{be}(\nu,l)})_{\mu,\nu=1}^2$

Algorithm 4.7.28 Matrice élémentaire associée à une arête du bord

Données : $(g_{\mu,\nu})_{\mu,\nu=1}^2$: ensemble de 2×2 fonctions
définies sur l'arête A
 (q^1, q^2) : les 2 extrémités de l'arête $A =]q^1; q^2[$
Résultat : \mathbb{B}^e : matrice élémentaire 2×2

```

1: Fonction  $\mathbb{B}^e \leftarrow \text{BELEMAT}(q^1, q^2, (g_{\mu,\nu})_{\mu,\nu=1}^2)$ 
2:   Pour  $\mu \leftarrow 1$  à 2 faire
3:     Pour  $\nu \leftarrow 1$  à 2 faire
4:        $\mathbb{B}^e(\mu, \nu) \leftarrow \int_{q^1}^{q^2} g_{\mu,\nu}(x, y) d\gamma(x, y)$ 
5:     Fin Pour
6:   Fin Pour
7: Fin Fonction

```

Le calcul des intégrales $\int_{q^1}^{q^2} g_{\mu,\nu}(x, y) d\gamma(x, y)$ se fera, suivant les fonctions $g_{\mu,\nu}$, soit de manière exacte soit à l'aide de méthodes d'intégration numérique.

L'algorithme utilisant les matrices élémentaires peut alors s'écrire :

Algorithme 4.7.1 Algorithme optimisé avec matrice élémentaire pour le calcul de la matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$ de composante

$$\mathbb{B}_{i,j} = \int_{\Gamma_h} g_{i,j}(x,y)d\gamma(x,y).$$

Données : Mesh : structure maillage
 $(g_{i,j})_{i,j=1}^{n_q}$: ensemble des fonctions

Résultat : \mathbb{B} : matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$

```

1:  $\mathbb{B} \leftarrow 0$                                  $\triangleright$  Initialisation à 0 de la matrice creuse  $\mathbb{B}$ 
2: Pour  $l \leftarrow 1$  à  $n_{be}$  faire                 $\triangleright$  boucle sur les arêtes de  $\Gamma_h$ 
    $\mathbb{B}^e \leftarrow \text{BELEMAT}(q^{be(1,l)}, q^{be(2,l)}, (g_{i,j})_{i,j \in be(:,l)})$ 
3:   Pour  $\mu \leftarrow 1$  à 2 faire                 $\triangleright$  boucle sur les 2 extrémités de  $\Gamma_h^{(l)}$ 
4:      $i \leftarrow be(\mu, l)$ 
5:     Pour  $\nu \leftarrow 1$  à 2 faire                 $\triangleright$  boucle sur les 2 extrémités de  $\Gamma_h^{(l)}$ 
6:        $j \leftarrow be(\nu, l)$ 
7:        $\mathbb{B}(i, j) \leftarrow \mathbb{B}(i, j) + \mathbb{B}^e(\mu, \nu)$ 
8:     Fin Pour
9:   Fin Pour
10: Fin Pour

```

4.7.1 Application : $g_{i,j}(x,y) = \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)$

Definition 52 Notons \mathcal{B} la matrice d'ordre n_q dont l'élément $(i,j) \in \{1, \dots, n_q\}^2$ est donné par

$$\mathcal{B}_{ij} = \int_{\Gamma_h} \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)d\gamma(x,y). \quad (4.7.3)$$

▲

La propriété (4.7.1) sur le support de la fonction $g_{i,j}$ est évidemment vérifiée.

Definition 53 Soit $l \in \{1, \dots, n_{be}\}$. Notons $i = be(1,l)$ et $j = be(2,l)$. La matrice élémentaire associée à l'arête $\Gamma_h^{(l)}$ est définie par

$$\mathbb{B}^e(\Gamma_h^{(l)}) = \int_{\Gamma_h^{(l)}} \begin{pmatrix} \varphi_i(x,y)\varphi_i(x,y) & \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y) \\ \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y) & \varphi_j(x,y)\varphi_j(x,y) \end{pmatrix} d\gamma(x,y) \quad (4.7.4)$$

▲

Soit $l \in \{1, \dots, n_{be}\}$, en effectuant le changement de variables

$$\gamma_l(t) = (q^{be(1,l)} - q^{be(2,l)})t + q^{be(1,l)},$$

nous obtenons

$$\int_{\Gamma_h^{(l)}} \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)d\gamma(x,y) = |\Gamma_h^{(l)}| \int_0^1 \varphi_i(\gamma_l(t))\varphi_j(\gamma_l(t))dt$$

où $|\Gamma_h^{(l)}| = \|\mathbf{q}^{\text{be}(1,l)} - \mathbf{q}^{\text{be}(2,l)}\|$.

Par définition des fonctions de base, nous obtenons

$$\varphi_i(\gamma_l(t)) = \begin{cases} 1-t & \text{si } i = \text{be}(1,l), \\ t & \text{si } i = \text{be}(2,l), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons donc

Lemma 38 Soit $\mathcal{A} =]q^1, q^2[$ où q^1 et q^2 sont deux points distincts de \mathbb{R}^2 . La matrice élémentaire associée à l'arête \mathcal{A} est donnée par

$$\mathcal{B}^e(\mathcal{A}) = |\mathcal{A}| \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^2 & t(1-t) \\ t(1-t) & t^2 \end{pmatrix} dt.$$

c'est à dire

$$\mathcal{B}^e(\mathcal{A}) = \frac{|\mathcal{A}|}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.7.5)$$

◆

Une autre façon d'obtenir la formule (4.7.5) est d'utiliser la formule numérique d'intégration de Simpson (??) qui sera exacte pour notre cas (puisque formule exacte pour les polynômes d'ordre inférieur ou égale à 3). Notons $i = \text{be}(1,l)$ et $j = \text{be}(2,l)$. Nous avons par construction des fonctions de base

$$\begin{aligned} \varphi_i(\mathbf{q}^i) &= \varphi_j(\mathbf{q}^j) = 1 \\ \varphi_i(\mathbf{q}^j) &= \varphi_j(\mathbf{q}^i) = 0 \\ \varphi_i\left(\frac{\mathbf{q}^i + \mathbf{q}^j}{2}\right) &= \varphi_j\left(\frac{\mathbf{q}^i + \mathbf{q}^j}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}^e(\Gamma_h^{(l)}))_{1,1} &= \frac{|\Gamma_h^{(l)}|}{6} \left(\varphi_i(\mathbf{q}^i)\varphi_i(\mathbf{q}^i) + 4\varphi_i\left(\frac{\mathbf{q}^i + \mathbf{q}^j}{2}\right)\varphi_i\left(\frac{\mathbf{q}^i + \mathbf{q}^j}{2}\right) + \varphi_i(\mathbf{q}^j)\varphi_i(\mathbf{q}^j) \right) \\ &= \frac{|\Gamma_h^{(l)}|}{6} \left(\frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) \\ (\mathcal{B}^e(\Gamma_h^{(l)}))_{1,2} &= \frac{|\Gamma_h^{(l)}|}{6} \left(\varphi_i(\mathbf{q}^i)\varphi_j(\mathbf{q}^i) + 4\varphi_i\left(\frac{\mathbf{q}^i + \mathbf{q}^j}{2}\right)\varphi_j\left(\frac{\mathbf{q}^i + \mathbf{q}^j}{2}\right) + \varphi_i(\mathbf{q}^j)\varphi_j(\mathbf{q}^j) \right) \\ &= \frac{|\Gamma_h^{(l)}|}{6} \left(0 + 4 \cdot \frac{1}{4} + 0 \right) \\ (\mathcal{B}^e(\Gamma_h^{(l)}))_{2,2} &= \frac{|\Gamma_h^{(l)}|}{6} \left(\varphi_j(\mathbf{q}^i)\varphi_j(\mathbf{q}^i) + 4\varphi_j\left(\frac{\mathbf{q}^i + \mathbf{q}^j}{2}\right)\varphi_j\left(\frac{\mathbf{q}^i + \mathbf{q}^j}{2}\right) + \varphi_j(\mathbf{q}^j)\varphi_j(\mathbf{q}^j) \right) \\ &= \frac{|\Gamma_h^{(l)}|}{6} \left(0 + 4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire

Algorithm 4.7.29 Matrice élémentaire associée à une arête du bord

Données : $|\mathcal{A}|$: longueur de l'arête \mathcal{A}

Résultat : \mathcal{B}^e : matrice élémentaire 2×2

1: **Fonction** $\mathcal{B}^e \leftarrow \text{BELEMMASSMAT}(|\mathcal{A}|)$

2: $\mathcal{B}^e \leftarrow \frac{|\mathcal{A}|}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3: **Fin Fonction**

L'algorithme d'assemblage de la matrice \mathcal{B} , basé sur l'algorithme 4.7.1, est donc

Algorithm 4.7.30 Algorithme optimisé avec matrice élémentaire pour le calcul de la matrice $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$ de composante

$$\mathcal{B}_{i,j} = \int_{\Gamma_h} \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)d\gamma(x,y).$$

Données : n_q : Nombre de nœuds du maillage
 n_{be} : Nombre d'arêtes du bord
 be : tableau de $2 \times n_{be}$ entiers
 lar : tableau de n_{be} réels
 $lar(l)$ est la longueur de $\Gamma_h^{(l)}$

Résultat : \mathcal{B} : matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$

```

1: Fonction  $\mathcal{B} \leftarrow$  BMASSASSEMBLING(  $n_q, n_{be}, be, lar$ )
2:    $\mathcal{B} \leftarrow 0$  ▷ Initialisation à 0 de la matrice creuse  $\mathcal{B}$ 
3:   Pour  $l \leftarrow 1$  à  $n_{be}$  faire ▷ boucle sur les arêtes de  $\Gamma_h$ 
    $\mathcal{B}^e \leftarrow$  BELEMMASSMAT( $lar(l)$ )
4:     Pour  $\mu \leftarrow 1$  à 2 faire ▷ boucle sur les 2 extrémités de  $\Gamma_h^{(l)}$ 
5:        $i \leftarrow be(\mu, l)$ 
6:     Pour  $\nu \leftarrow 1$  à 2 faire ▷ boucle sur les 2 extrémités de  $\Gamma_h^{(l)}$ 
7:        $j \leftarrow be(\nu, l)$ 
8:        $\mathcal{B}(i, j) \leftarrow \mathcal{B}(i, j) + \mathcal{B}^e(\mu, \nu)$ 
9:     Fin Pour
10:  Fin Pour
11: Fin Fonction
12: Fin Fonction

```

4.7.2 Application : $g_{i,j}(x,y) = w(x,y)\varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)$

Definition 54 Soit w une application de Γ_h à valeurs réelles. Notons $\mathcal{B}^{[w]}$ la matrice d'ordre n_q dont l'élément $(i,j) \in \{1, \dots, n_q\}^2$ est donné par

$$\mathcal{B}_{ij}^{[w]} = \int_{\Gamma_h} w(x,y)\varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)d\gamma(x,y). \quad (4.7.6)$$

▲

La propriété (4.7.1) sur le support de la fonction $g_{i,j}$ est évidemment vérifiée.

Definition 55 Soit $l \in \{1, \dots, n_{be}\}$. Notons $i = be(1, l)$ et $j = be(2, l)$. La matrice élémentaire associée à l'arête $\Gamma_h^{(l)}$ est définie par

$$\mathcal{B}^{[w],e}(\Gamma_h^{(l)}) = \int_{\Gamma_h^{(l)}} w(x,y) \begin{pmatrix} \varphi_i(x,y)\varphi_i(x,y) & \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y) \\ \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y) & \varphi_j(x,y)\varphi_j(x,y) \end{pmatrix} d\gamma(x,y) \quad (4.7.7)$$

▲

Notons

$$w_h(x, y) = \sum_{i=1}^{n_q} w_i \varphi_i(x, y)$$

où $\forall i \in \{1, \dots, n_q\}$

$$w_i = \begin{cases} w(q^i) & \text{si } q^i \in \Gamma_h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$w_h|_{\Gamma_h}$ est donc une approximation P_1 sur Γ_h de la fonction w et nous obtenons

$$w(x, y)|_{\Gamma_h^{(l)}} \approx \sum_{\lambda=1}^2 w_{\text{be}(\lambda, l)} \varphi_{\text{be}(\lambda, l)}(x, y)$$

Soit $l \in \{1, \dots, n_{\text{be}}\}$. Notons $i = \text{be}(1, l)$ et $j = \text{be}(2, l)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}^{[w], e}(\Gamma_h^{(l)}) \\ & \approx \\ & w_i \int_{\Gamma_h^{(l)}} \begin{pmatrix} \varphi_i^3(x, y) & \varphi_i^2(x, y) \varphi_j(x, y) \\ \varphi_i^2(x, y) \varphi_j(x, y) & \varphi_i(x, y) \varphi_j^2(x, y) \end{pmatrix} d\gamma(x, y) \\ & + \\ & w_j \int_{\Gamma_h^{(l)}} \begin{pmatrix} \varphi_i^2(x, y) \varphi_j(x, y) & \varphi_i(x, y) \varphi_j^2(x, y) \\ \varphi_i(x, y) \varphi_j^2(x, y) & \varphi_j^3(x, y) \end{pmatrix} d\gamma(x, y) \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables

$$\gamma_l(t) = (q^i - q^j)t + q^i,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}^{[w], e}(\Gamma_h^{(l)}) \\ & \approx \\ & w_i |\Gamma_h^{(l)}| \int_0^1 \begin{pmatrix} \varphi_i^3(\gamma_l(t)) & \varphi_i^2(\gamma_l(t)) \varphi_j(\gamma_l(t)) \\ \varphi_i^2(\gamma_l(t)) \varphi_j(\gamma_l(t)) & \varphi_i(\gamma_l(t)) \varphi_j^2(\gamma_l(t)) \end{pmatrix} dt \\ & + \\ & w_j |\Gamma_h^{(l)}| \int_0^1 \begin{pmatrix} \varphi_i^2(\gamma_l(t)) & \varphi_i(\gamma_l(t)) \varphi_j^2(\gamma_l(t)) \\ \varphi_i(\gamma_l(t)) \varphi_j^2(\gamma_l(t)) & \varphi_j^3(\gamma_l(t)) \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

où $|\Gamma_h^{(l)}| = \|q^{\text{be}(1, l)} - q^{\text{be}(2, l)}\|$.

Par définition des fonctions de base, nous avons $\forall l \in \{1, \dots, n_{\text{be}}\}, \forall p \in \{1, \dots, n_q\}$

$$\varphi_p(\gamma_l(t)) = \begin{cases} 1-t & \text{si } p = \text{be}(1, l), \\ t & \text{si } p = \text{be}(2, l), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons donc

Lemma 39 Soit $\mathcal{A} =]q^1, q^2[$ où q^1 et q^2 sont deux points distincts de \mathbb{R}^2 . Soit w une fonction de \mathcal{A} à valeurs réelles. La matrice élémentaire associée à l'arête \mathcal{A} est donnée par

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}^{[w], e}(\mathcal{A}) \\ & \approx \\ & w_1 |\mathcal{A}| \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^3 & t(1-t)^2 \\ t(1-t)^2 & t^2(1-t) \end{pmatrix} dt + w_2 |\mathcal{A}| \int_0^1 \begin{pmatrix} t(1-t)^2 & t^2(1-t) \\ t^2(1-t) & t^3 \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

où $w_1 = w(q^1)$ et $w_2 = w(q^2)$. Ce qui donne

$$\mathcal{B}^{[w],e}(\mathcal{A}) = \frac{|\mathcal{A}|}{12} \begin{pmatrix} 3w_1 + w_2 & w_1 + w_2 \\ w_1 + w_2 & w_1 + 3w_2 \end{pmatrix} \quad (4.7.8)$$

◆

Une autre façon d'obtenir la formule (4.7.8) est d'utiliser la formule numérique d'intégration de Simpson (??) qui sera exacte pour notre cas (puisque formule exacte pour les polynômes d'ordre inférieur ou égale à 3). Notons $i = \text{be}(1, l)$ et $j = \text{be}(2, l)$. Nous avons par construction des fonctions de base

$$\begin{aligned} \varphi_i(q^i) &= \varphi_j(q^j) = 1 \\ \varphi_i(q^j) &= \varphi_j(q^i) = 0 \\ \varphi_i\left(\frac{q^i + q^j}{2}\right) &= \varphi_j\left(\frac{q^i + q^j}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}^{[w],e}(\Gamma_h^{(l)}))_{1,1} &\approx w_i \frac{|\Gamma_h^{(l)}|}{6} \left(\varphi_i^3(q^i) + 4\varphi_i^3\left(\frac{q^i + q^j}{2}\right) + \varphi_i^3(q^j) \right) \\ &+ w_i \frac{|\Gamma_h^{(l)}|}{6} \left((\varphi_i^2 \varphi_j)(q^i) + 4(\varphi_i^2 \varphi_j)\left(\frac{q^i + q^j}{2}\right) + (\varphi_i^2 \varphi_j)(q^j) \right) \\ &\approx \frac{|\Gamma_h^{(l)}|}{12} (3w_i + w_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}^{[w],e}(\Gamma_h^{(l)}))_{1,2} &\approx w_i \frac{|\Gamma_h^{(l)}|}{6} \left((\varphi_i^2 \varphi_j)(q^i) + 4(\varphi_i^2 \varphi_j)\left(\frac{q^i + q^j}{2}\right) + (\varphi_i^2 \varphi_j)(q^j) \right) \\ &+ w_i \frac{|\Gamma_h^{(l)}|}{6} \left((\varphi_i \varphi_j^2)(q^i) + 4(\varphi_i \varphi_j^2)\left(\frac{q^i + q^j}{2}\right) + (\varphi_i \varphi_j^2)(q^j) \right) \\ &\approx \frac{|\Gamma_h^{(l)}|}{12} (w_i + w_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}^{[w],e}(\Gamma_h^{(l)}))_{2,2} &\approx w_i \frac{|\Gamma_h^{(l)}|}{6} \left((\varphi_i \varphi_j^2)(q^i) + 4(\varphi_i \varphi_j^2)\left(\frac{q^i + q^j}{2}\right) + (\varphi_i \varphi_j^2)(q^j) \right) \\ &+ w_i \frac{|\Gamma_h^{(l)}|}{6} \left(\varphi_j^3(q^i) + 4\varphi_j^3\left(\frac{q^i + q^j}{2}\right) + \varphi_j^3(q^j) \right) \\ &\approx \frac{|\Gamma_h^{(l)}|}{12} (w_i + 3w_j) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire

Algorithm 4.7.31 Matrice élémentaire associée à une arête du bord

Données : $|\mathcal{A}|$: longueur de l'arête \mathcal{A}
 w_1, w_2 : valeurs de la fonction w
aux extrémités de l'arête.

Résultat : $\mathcal{B}^{[w],e}$: matrice élémentaire 2×2

1: **Fonction** $\mathcal{B}^{[w],e} \leftarrow \text{BELEMMASSWMAT}(|\mathcal{A}|, w_1, w_2)$

2: $\mathcal{B}^{[w],e} \leftarrow \frac{|\mathcal{A}|}{12} \begin{pmatrix} 3w_1 + w_2 & w_1 + w_2 \\ w_1 + w_2 & w_1 + 3w_2 \end{pmatrix}$

3: **Fin Fonction**

L'algorithme d'assemblage de la matrice $\mathcal{B}^{[w]}$, basé sur l'algorithme 4.7.1, est donc

Algorithm 4.7.32 Algorithme optimisé avec matrice élémentaire pour le calcul de la matrice $\mathcal{B}^{[w]} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$ de composante

$$\mathcal{B}_{i,j}^{[w]} = \int_{\Gamma_h} w(x, y) \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) d\gamma(x, y).$$

Données : n_q : Nombre de nœuds du maillage
 n_{be} : nombre d'arêtes sur le bord.
 be : tableau de $2 \times n_{be}$ entiers
 lar : tableau de n_{be} réels
 $lar(l)$ est la longueur de $\Gamma_h^{(l)}$.
 n_q : nombre de nœuds du maillage.
 Tf : tableau de n_q réels
 $Tf(i) = w(Q^i)$ si $Q^i \in \Gamma_h$
 $Tf(i) = 0$ si $Q^i \notin \Gamma_h$

Résultat : $\mathcal{B}^{[w]}$: matrice creuse de dimensions $n_q \times n_q$.

```

1: Fonction  $\mathcal{B}^{[w]} \leftarrow \text{BMASSWASSEMBLING}(n_q, n_{be}, be, lar, Tf)$ 
2:    $\mathcal{B}^{[w]} \leftarrow 0$  ▷ Initialisation à 0 de la matrice creuse  $\mathcal{B}^{[w]}$ 
3:   Pour  $l \leftarrow 1$  à  $n_{be}$  faire ▷ boucle sur les arêtes de  $\Gamma_h$ 
4:      $\mathcal{B}^{[w],e} \leftarrow \text{BELEMMASSWMAT}(lar(l), Tf(be(1, l)), Tf(be(2, l)))$ 
5:     Pour  $\mu \leftarrow 1$  à 2 faire ▷ boucle sur les 2 extrémités de  $\Gamma_h^{(l)}$ 
6:        $i \leftarrow be(\mu, l)$ 
7:       Pour  $\nu \leftarrow 1$  à 2 faire ▷ boucle sur les 2 extrémités de  $\Gamma_h^{(l)}$ 
8:          $j \leftarrow be(\nu, l)$ 
9:          $\mathcal{B}^{[w]}(i, j) \leftarrow \mathcal{B}^{[w]}(i, j) + \mathcal{B}^{[w],e}(\mu, \nu)$ 
10:       Fin Pour
11:     Fin Pour
12: Fin Fonction

```

4.8 Assemblage de vecteurs

4.8.1 Composantes du type $\int_{\Omega_h} f(x, y) \varphi_i(x, y) dx dy$

Definition 56 Soit f une application «suffisamment régulière» de Ω_h à valeurs dans \mathbb{R} . Notons $\mathcal{S}^{[f]}$ le vecteur de dimension n_s dont l'élément $i \in \{1, \dots, n_s\}$ est donné par

$$\mathcal{S}_i^{[f]} = \int_{\Omega_h} f(x, y) \varphi_i(x, y) dx dy \quad (4.8.1)$$

▲

Notons f_h l'approximation P_1 de la fonction f :

$$f_h(x, y) = \sum_{j=1}^{n_s} f(Q^j) \varphi_j(x, y).$$

Nous avons alors

$$\mathbf{S}_i^{[f]} \approx \sum_{j=1}^{n_s} f(\mathbf{q}^j) \int_{\Omega_h} \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy$$

Notons \mathbf{F} le vecteur de dimension n_s , tel que $\mathbf{F}_i = f(\mathbf{q}^i)$. En utilisant la définition 30 de la matrice de masse \mathcal{M} nous obtenons l'écriture matricielle très simple

$$\mathbf{S}^{[f]} \approx \mathcal{M} \mathbf{F}$$

Algorithme 4.8.1 Algorithme de calcul du vecteur $\mathbf{S}^{[f]}$ de composante

$$\mathbf{S}_i^{[f]} = \int_{\Omega_h} f(x, y) \varphi_i(x, y) dx dy$$

Données : n_s : nombre de nœuds du maillage.
 \mathcal{M} : matrice de masse d'ordre n_s (voir définition 30)
 \mathbf{F} : vecteur de dimension n_s ,
tel que $\mathbf{F}_i = f(\mathbf{q}^i)$.
Résultat : $\mathbf{S}^{[f]}$: vecteur de dimension n_s .

1: **Fonction** $\mathbf{S}^{[f]} \leftarrow \text{VECSOURCE}(n_s, \mathcal{M}, \mathbf{F})$
2: $\mathbf{S}^{[f]} \leftarrow \mathcal{M} * \mathbf{F}$
3: **Fin Fonction**

4.8.2 Composantes du type $\int_{\Gamma_h} g(x, y) \varphi_i(x, y) d\Gamma_h(x, y)$

Définition 57 Soit g une application de Γ_h à valeurs réelles. Notons $\mathbf{V}^{[g]}$ le vecteur de dimension n_s dont l'élément $i \in \{1, \dots, n_s\}$ est donné par

$$\mathbf{V}_i^{[g]} = \int_{\Gamma_h} g(x, y) \varphi_i(x, y) d\Gamma_h(x, y) \quad (4.8.2)$$

▲

Notons

$$g_h(x, y) = \sum_{i=1}^{n_s} \mathbf{G}_i \varphi_i(x, y)$$

où \mathbf{G} est le vecteur de dimension n_s de composante $i \in \{1, \dots, n_s\}$

$$\mathbf{G}_i = \begin{cases} g(\mathbf{q}^i) & \text{si } \mathbf{q}^i \in \Gamma_h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$g_h|_{\Gamma_h}$ est donc une approximation P_1 sur Γ_h de la fonction g et nous obtenons

$$\forall (x, y) \in \Gamma_h^{(l)} \quad g(x, y) \approx \sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{G}_{\text{be}(\lambda, l)} \varphi_{\text{be}(\lambda, l)}(x, y)$$

En utilisant la matrice \mathcal{B} (voir définition 52), nous avons immédiatement

$$\mathbf{V}^{[g]} \approx \mathcal{B}\mathbf{G}$$

Algorithme 4.8.2 Algorithme de calcul du vecteur $\mathbf{V}^{[g]}$ de composante

$$\int_{\Gamma_h} g(x, y) \varphi_i(x, y) d\Gamma_h(x, y)$$

Données : n_s : nombre de nœuds du maillage.
 \mathcal{B} : matrice de masse d'ordre n_s (voir définition 52)
 \mathbf{G} : vecteur de dimension n_s ,
 $\mathbf{G}_i = \begin{cases} g(Q^i) & \text{si } Q^i \in \Gamma_h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Résultat : $\mathbf{V}^{[g]}$: vecteur de dimension n_s .

1: **Fonction** $\mathbf{V}^{[g]} \leftarrow \text{VECSOURCEBORD}(n_s, \mathcal{B}, \mathbf{G})$
2: $\mathbf{V}^{[g]} \leftarrow \mathcal{B} * \mathbf{G}$
3: **Fin Fonction**

4.8.3 Condition de Dirichlet

La prise en compte des conditions de Dirichlet ne se fera qu'une fois la matrice globale et le second membre assemblé. En effet, pour faciliter la programmation, les algorithmes d'assemblage ne tiennent pas compte des conditions de Dirichlet.

Algorithme 4.8.3 Modification de la matrice et du second membre pour tenir compte des conditions de Dirichlet

Données : LD : Liste des numéros du bord Dirichlet.
 n_s : nombre de nœuds du maillage.
 \mathbb{A} : matrice d'ordre n_s .
 \mathbf{b} : vecteur de dimension n_s .
 \mathbf{G} : vecteur de dimension n_s ,

$$\mathbf{G}_i = \begin{cases} g_D(q^i) & \text{si } q^i \in \overline{\Gamma_h^D} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Résultat : \mathbb{A} : matrice d'ordre n_s .
 \mathbf{b} : vecteur de dimension n_s .

```

1: Fonction [ $\mathbb{A}, \mathbf{b}$ ]  $\leftarrow$  CLDIRICHLET( $n_s, \mathbb{A}, \mathbf{b}, \text{ql}, LD, \mathbf{G}$ )
2:    $LB \leftarrow 0$  ▷ tableau de dimension  $n_s$ 
3:   Pour  $l \leftarrow 1$  à  $n_a$  faire ▷ boucle sur les arêtes du bord
4:     Si  $\text{bel}(l) \in LD$  alors ▷ i.e. ]  $q^{\text{be}(1,l)}$ ;  $q^{\text{be}(2,l)}$  [ $\subset \Gamma_h^D$ 
5:       Pour  $\alpha \leftarrow 1$  à 2 faire
6:          $i \leftarrow \text{be}(\alpha, l)$ 
7:         Si  $LB(i) == 0$  alors
8:            $LB(i) \leftarrow 1$ 
9:            $\mathbb{A}(i, :) \leftarrow 0$  ▷ Mise à zéro de la ligne  $i$ 
10:           $\mathbb{A}(i, i) \leftarrow 1$ 
11:           $\mathbf{b}(i) \leftarrow \mathbf{G}(i)$ 
12:        Fin Si
13:      Fin Pour
14:    Fin Si
15:  Fin Pour
16: Fin Fonction

```

4.9 Validations des algorithmes

Pour la validation des différents algorithmes, on utilise la méthode des éléments finis P_1 comme une méthode d'intégration sur le domaine Ω .

Soient u et v deux fonctions définies sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} . On note \mathbf{U} et \mathbf{V} les deux vecteurs de \mathbb{R}^{n_q} de composantes respectives $u_i = u(q^i)$ et $v_i = v(q^i)$.

Soit T le triangle quelconque de sommets (q^1, q^2, q^3) . On note $\tilde{\mathbf{U}}$ et $\tilde{\mathbf{V}}$ les deux vecteurs de \mathbb{R}^3 de composantes respectives $u_\alpha = u(q^\alpha)$ et $v_\beta = v(q^\beta)$.

4.9.1 Matrices \mathcal{M} et $\mathcal{M}^e(T)$

Sur Ω , on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\Omega) &= \int_{\Omega} u(x, y)v(x, y)dxdy \\
&\approx \int_{\Omega} \Pi_h(u)(x, y)\Pi_h(v)(x, y)dxdy \\
&\approx \int_{\Omega_h} \left(\sum_{i=1}^{ns} u_i \varphi_i(x, y) \right) \left(\sum_{j=1}^{ns} v_j \varphi_j(x, y) \right) dx dy \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j \int_{\Omega_h} \varphi_i(x, y)\varphi_j(x, y)dxdy \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j \mathcal{M}_{j,i} = \langle \mathcal{M}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle.
\end{aligned}$$

Sur le triangle T , on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(T) &= \int_T u(x, y)v(x, y)dxdy \approx \int_T \Pi_h(u)(x, y)\Pi_h(v)(x, y)dxdy \\
&\approx \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \tilde{u}_{\alpha} \tilde{v}_{\beta} \int_T \tilde{\varphi}_{\alpha}(x, y)\tilde{\varphi}_{\beta}(x, y)dxdy \approx \langle \mathcal{M}^e(T)\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle.
\end{aligned}$$

Propriété 1 Les matrices \mathcal{M} et $\mathcal{M}^e(T)$ sont symétriques et on a

$$\int_{\Omega} u(x, y)v(x, y)dxdy \approx \langle \mathcal{M}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle, \quad (4.9.1)$$

$$\int_T u(x, y)v(x, y)dxdy \approx \langle \mathcal{M}^e(T)\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle. \quad (4.9.2)$$

L'équation (4.9.1) est exacte si $\Omega = \Omega_h$, $u = \Pi_h(u)$ et $v = \Pi_h(v)$. L'équation (4.9.2) est exacte si u et v sont affines sur T .

Test 1		Test 2	
Ω	= Cercle unité	Ω	= $[0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	= 1	$u(x, y)$	= 1
$v(x, y)$	= 1	$v(x, y)$	= 1
$\mathcal{I}(\Omega) = \pi$	$\approx \langle \mathcal{M}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = \Omega_h $	$\mathcal{I}(\Omega) = 1$	= $\langle \mathcal{M}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
$\mathcal{I}(T)$	= $ T $.	$\mathcal{I}(T)$	= $ T $.

Test 3		Test 4	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$	Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= x + y$	$u(x, y)$	$= -2x + y$
$v(x, y)$	$= x - y$	$v(x, y)$	$= 5x - 3y$
$\mathcal{I}(\Omega) = 0$	$= \langle \mathcal{M}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$	$\mathcal{I}(\Omega) = -\frac{19}{12}$	$= \langle \mathcal{M}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

4.9.2 Matrices $\mathcal{M}^{[c]}$ et $\mathcal{M}^{e,[c]}(T)$

Sur Ω , on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\Omega) &= \int_{\Omega} c(x, y)u(x, y)v(x, y)dxdy \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j \int_{\Omega_h} c(x, y)\varphi_i(x, y)\varphi_j(x, y)dxdy \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j \mathcal{M}_{j,i}^{[c]} = \langle \mathcal{M}^{[c]}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle \\
&\approx \langle \mathcal{M}^{[\Pi_h(c)]}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle.
\end{aligned}$$

Sur le triangle T on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(T) &= \int_T c(x, y)u(x, y)v(x, y)dxdy \\
&\approx \int_T \Pi_h(u)(x, y)\Pi_h(v)(x, y)dxdy \\
&\approx \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \tilde{u}_{\alpha}\tilde{v}_{\beta} \int_T c(x, y)\tilde{\varphi}_{\alpha}(x, y)\tilde{\varphi}_{\beta}(x, y)dxdy \approx \langle \mathcal{M}^{e,[c]}(T)\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle \\
&\approx \langle \mathcal{M}^{e,[\Pi_h(c)]}(T)\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle
\end{aligned}$$

Propriété 2 Les matrices $\mathcal{M}^{[c]}$ et $\mathcal{M}^{e,[c]}(T)$ sont symétriques et on a

$$\int_{\Omega} c(x, y)u(x, y)v(x, y)dxdy \approx \langle \mathcal{M}^{[\Pi_h(c)]}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle, \quad (4.9.3)$$

$$\int_T c(x, y)u(x, y)v(x, y)dxdy \approx \langle \mathcal{M}^{e,[\Pi_h(c)]}(T)\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle. \quad (4.9.4)$$

L'équation (4.9.1) est exacte si $\Omega = \Omega_h$, et si les fonctions u , v et c sont dans X_h^1 . L'équation (4.9.2) est exacte si u , v et c sont affines sur T .

Test 1	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= 1$
$v(x, y)$	$= 1$
$c(x, y)$	$= 1$
$\mathcal{I}(\Omega) = \Omega = 1$	$= \langle \mathcal{M}^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = \Omega_h $
$\mathcal{I}(T)$	$= T .$

Test 2		Test 3	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$	Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= x + y$	$u(x, y)$	$= 3x + y$
$v(x, y)$	$= x - y$	$v(x, y)$	$= -x + 2y$
$c(x, y)$	$= x + y$	$c(x, y)$	$= 2x - 3y$
$\mathcal{I}(\Omega) = 0$	$= \langle \mathcal{M}^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$	$\mathcal{I}(\Omega) = -\frac{5}{3}$	$= \langle \mathcal{M}^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

4.9.3 Matrices \mathcal{R} et $\mathcal{R}^e(T)$

Sur Ω , on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\Omega) &= \int_{\Omega} \langle \nabla u(x, y), \nabla v(x, y) \rangle dx dy \\
&\approx \int_{\Omega_h} \langle \nabla \Pi_h(u)(x, y), \nabla \Pi_h(v)(x, y) \rangle dx dy \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j \int_{\Omega_h} \langle \nabla \varphi_i(x, y), \nabla \varphi_j(x, y) \rangle dx dy \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j \mathcal{R}_{j,i} \approx \langle \mathcal{R} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle.
\end{aligned}$$

Sur le triangle T on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(T) &= \int_T \langle \nabla u(x, y), \nabla v(x, y) \rangle dx dy \\
&\approx \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \tilde{u}_{\alpha} \tilde{v}_{\beta} \int_T \langle \nabla \tilde{\varphi}_{\alpha}(x, y), \nabla \tilde{\varphi}_{\beta}(x, y) \rangle dx dy \\
&\approx \langle \mathcal{R}^e(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle.
\end{aligned}$$

Propriété 3 Les matrices \mathcal{R} et $\mathcal{R}^e(T)$ sont symétriques et on a

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u(x, y), \nabla v(x, y) \rangle dx dy \approx \langle \mathcal{R}U, V \rangle, \quad (4.9.5)$$

$$\int_T \langle \nabla u(x, y), \nabla v(x, y) \rangle dx dy \approx \langle \mathcal{R}^e(T)\tilde{U}, \tilde{V} \rangle. \quad (4.9.6)$$

L'équation (4.9.5) est exacte si $\Omega = \Omega_h$, et si $u, v \in X_h^1$. L'équation (4.9.6) est exacte si u et v sont affines sur T .

Test 1	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= 1$
$v(x, y)$	$=$ quelconque
$\mathcal{I}(\Omega) = 0$	$= \langle \mathcal{R}U, V \rangle$
et on a	$\mathcal{R}U = 0$
$\mathcal{I}(T) = 0$	$= \langle \mathcal{R}^e(T)\tilde{U}, \tilde{V} \rangle$
et on a	$\mathcal{R}^e(T)\tilde{U} = 0$

Test 2	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= x + y$
$v(x, y)$	$= x - y$
$\mathcal{I}(\Omega) = 0$	$= \langle \mathcal{R}U, V \rangle$

Test 3	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= 3x + y$
$v(x, y)$	$= -x + 2y$
$\mathcal{I}(\Omega) = -1$	$= \langle \mathcal{R}U, V \rangle$

4.9.4 Matrices $\mathcal{R}^{[M]}$ et $\mathcal{R}^{[M],e}(T)$

Sur le domaine Ω , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\Omega) &= \int_{\Omega} \langle \mathbb{M}(x, y) \nabla u(x, y), \nabla v(x, y) \rangle dx dy \\ &\approx \int_{\Omega_h} \langle \mathbb{M}(x, y) \nabla \Pi_h(u)(x, y), \nabla \Pi_h(v)(x, y) \rangle dx dy \\ &\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j \int_{\Omega_h} \langle \mathbb{M}(x, y) \nabla \varphi_i(x, y), \nabla \varphi_j(x, y) \rangle dx dy \\ &\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j \mathcal{R}_{j,i}^{[M]} \approx \langle \mathcal{R}^{[M]}U, V \rangle \\ &\approx \langle \mathcal{R}^{[\Pi_h(\mathbb{M})]}U, V \rangle. \end{aligned}$$

Sur un triangle T on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(T) &= \int_T \langle \mathbb{M}(x, y) \nabla u(x, y), \nabla v(x, y) \rangle dx dy \\
&\approx \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \tilde{u}_\alpha \tilde{v}_\beta \int_T \langle \mathbb{M}(x, y) \nabla \tilde{\varphi}_\alpha(x, y), \nabla \tilde{\varphi}_\beta(x, y) \rangle dx dy \\
&\approx \langle \mathcal{R}^{[\mathbb{M}],e}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle.
\end{aligned}$$

Propriété 4 Si \mathbb{M} est symétrique alors les matrices $\mathcal{R}^{[\mathbb{M}]}$ et $\mathcal{R}^{[\mathbb{M}],e}(T)$ le sont aussi et on a

$$\int_{\Omega} \langle \mathbb{M}(x, y) \nabla u(x, y), \nabla v(x, y) \rangle dx dy \approx \langle \mathcal{R}^{[\Pi_h(\mathbb{M})]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle, \quad (4.9.7)$$

$$\int_T \langle \mathbb{M}(x, y) \nabla u(x, y), \nabla v(x, y) \rangle dx dy \approx \langle \mathcal{R}^{[\Pi_h(\mathbb{M})],e}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle. \quad (4.9.8)$$

L'équation (4.9.7) est exacte si $\Omega = \Omega_h$, et si u, v et chacune des composantes de \mathbb{M} sont dans X_h^1 . L'équation (4.9.8) est exacte si u, v et chacune des composantes de \mathbb{M} sont affines sur T .

Test 1	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= 1$
$v(x, y)$	$=$ quelconque
$\mathbb{M}(x, y)$	$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathcal{I}(\Omega) = 0$	$= \langle \mathcal{R}^{[\mathbb{M}]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
et on a	$\mathcal{R}^{[\mathbb{M}]} \mathbf{U} = 0$
$\mathcal{I}(T) = 0$	$= \langle \mathcal{R}^{[\Pi_h(\mathbb{M})],e}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle$
et on a	$\mathcal{R}^{[\Pi_h(\mathbb{M})],e}(T) \tilde{\mathbf{U}} = 0$

Test 2		Test 3	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$	Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= 1$	$u(x, y)$	$= 3x + y$
$v(x, y)$	$= x - y$	$v(x, y)$	$= -x + 2y$
$\mathbb{M}(x, y)$	$= \begin{pmatrix} x + y & 3x + y \\ 3x + y & x - 2y \end{pmatrix}$	$\mathbb{M}(x, y)$	$= \begin{pmatrix} x + y & 3x + y \\ 3x + y & x - 2y \end{pmatrix}$
$\mathcal{I}(\Omega) = 0$	$= \langle \mathcal{R}^{[\mathbb{M}]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$	$\mathcal{I}(\Omega) = 6$	$= \langle \mathcal{R}^{[\mathbb{M}]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

4.9.5 Matrices $\mathcal{K}_x^{[c]}$ et $\mathcal{K}_x^{e,[c]}(T)$

Sur le domaine Ω , on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\Omega) &= \int_{\Omega} c(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) v(x, y) dx dy \\
&\approx \int_{\Omega_h} c(x, y) \frac{\partial \Pi_h(u)}{\partial x}(x, y) \Pi_h(v)(x, y) dx dy \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j \int_{\Omega_h} c(x, y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j (\mathcal{K}_x^{[c]})_{j,i} \approx \langle \mathcal{K}_x^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle \\
&\approx \langle \mathcal{K}_x^{[\Pi_h(c)]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle.
\end{aligned}$$

Sur un triangle T on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(T) &= \int_T c(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) v(x, y) dx dy \\
&\approx \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \tilde{u}_{\alpha} \tilde{v}_{\beta} \int_T c(x, y) \frac{\partial \tilde{\varphi}_{\alpha}}{\partial x}(x, y) \tilde{\varphi}_{\beta}(x, y) dx dy \\
&\approx \langle \mathcal{K}_x^{e,[c]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle \\
&\approx \langle \mathcal{K}_x^{e,[\Pi_h(c)]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle
\end{aligned}$$

Propriété 5 On a

$$\int_{\Omega} c(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) v(x, y) dx dy \approx \langle \mathcal{K}_x^{[\Pi_h(c)]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle, \quad (4.9.9)$$

$$\int_T c(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) v(x, y) dx dy \approx \langle \mathcal{K}_x^{e,[\Pi_h(c)]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle. \quad (4.9.10)$$

L'équation (4.9.9) est exacte si $\Omega = \Omega_h$, et si u, v et c sont dans X_h^1 . L'équation (4.9.10) est exacte si u, v et c sont affines sur T .

Test 1	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= 1$
$v(x, y)$	$=$ quelconque
$c(x, y)$	$=$ quelconque
$\mathcal{I}(\Omega) = 0$	$= \langle \mathcal{K}_x^{[\Pi_h(c)]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
et on a	$\mathcal{K}_x^{[\Pi_h(c)]} \mathbf{U} = 0$
$\mathcal{I}(T) = 0$	$= \langle \mathcal{K}_x^{e, [\Pi_h(c)]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle$
et on a	$\mathcal{K}_x^{e, [\Pi_h(c)]}(T) \tilde{\mathbf{U}} = 0$

Test 2		Test 3	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$	Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= 2x + y$	$u(x, y)$	$= 2x - 8y$
$v(x, y)$	$= x - y$	$v(x, y)$	$= 6x + 4y$
$c(x, y)$	$= -x + y$	$c(x, y)$	$= -2x + 3y$
$\mathcal{I}(\Omega) = -\frac{1}{3}$	$= \langle \mathcal{K}_x^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$	$\mathcal{I}(\Omega) = 5$	$= \langle \mathcal{K}_x^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

4.9.6 Matrices $\mathcal{K}_y^{[c]}$ et $\mathcal{K}_y^{e, [c]}(T)$

De manière similaire au paragraphe précédent, on obtient

Propriété 6 On a

$$\int_{\Omega} c(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) v(x, y) dx dy \approx \langle \mathcal{K}_y^{[\Pi_h(c)]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle, \quad (4.9.11)$$

$$\int_T c(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) v(x, y) dx dy \approx \langle \mathcal{K}_y^{e, [\Pi_h(c)]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle. \quad (4.9.12)$$

L'équation (4.9.11) est exacte si $\Omega = \Omega_h$, et si u, v et c sont dans X_h^1 . L'équation (4.9.12) est exacte si u, v et c sont affines sur T .

On note

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\Omega) &= \int_{\Omega} c(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) v(x, y) dx dy, \\ \mathcal{I}(T) &= \int_T c(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) v(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Test 1	
Ω	= $[0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	= 1
$v(x, y)$	= quelconque
$c(x, y)$	= quelconque
$\mathcal{I}(\Omega) = 0$	= $\langle \mathcal{K}_y^{[\Pi_h(c)]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
et on a	$\mathcal{K}_y^{[\Pi_h(c)]} \mathbf{U} = 0$
$\mathcal{I}(T) = 0$	= $\langle \mathcal{K}_y^{e, [\Pi_h(c)]} (T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle$
et on a	$\mathcal{K}_y^{e, [\Pi_h(c)]} (T) \tilde{\mathbf{U}} = 0$

Test 2		Test 3	
Ω	= $[0, 1] \times [0, 1]$	Ω	= $[0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	= $2x + y$	$u(x, y)$	= $2x - 3y$
$v(x, y)$	= $x - y$	$v(x, y)$	= $2x - 2y$
$c(x, y)$	= $-x + y$	$c(x, y)$	= $-2x + 3y$
$\mathcal{I}(\Omega) = -\frac{1}{6}$	= $\langle \mathcal{K}_y^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$	$\mathcal{I}(\Omega) = \frac{5}{2}$	= $\langle \mathcal{K}_y^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

4.9.7 Matrices $\mathcal{G}_x^{[c]}$ et $\mathcal{G}_x^{e, [c]}(T)$

Sur le domaine Ω , on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\Omega) &= \int_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial x}(x, y) u(x, y) v(x, y) dx dy \\
&\approx \int_{\Omega_h} \frac{\partial c}{\partial x} \Pi_h(u)(x, y) \Pi_h(v)(x, y) dx dy \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j \int_{\Omega_h} \frac{\partial c}{\partial x} \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j (\mathcal{G}_x^{[c]})_{j,i} \approx \langle \mathcal{G}_x^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle \\
&\approx \langle \mathcal{G}_x^{[\Pi_h(c)]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle.
\end{aligned}$$

Sur un triangle T on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(T) &= \int_T \frac{\partial c}{\partial x}(x, y) u(x, y) v(x, y) dx dy \\
&\approx \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \tilde{u}_\alpha \tilde{v}_\beta \int_T \frac{\partial c}{\partial x}(x, y) \tilde{\varphi}_i(x, y) \tilde{\varphi}_j(x, y) dx dy \\
&\approx \langle \mathcal{G}_x^{e, [c]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle \\
&\approx \langle \mathcal{G}_x^{e, [\Pi_h(c)]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle
\end{aligned}$$

Propriété 7 On a

$$\int_\Omega \frac{\partial c}{\partial x}(x, y) u(x, y) v(x, y) dx dy \approx \langle \mathcal{G}_x^{[\Pi_h(c)]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle, \quad (4.9.13)$$

$$\int_T \frac{\partial c}{\partial x}(x, y) u(x, y) v(x, y) dx dy \approx \langle \mathcal{G}_x^{e, [\Pi_h(c)]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle. \quad (4.9.14)$$

L'équation (4.9.13) est exacte si $\Omega = \Omega_h$, et si u , v et c sont dans X_h^1 . L'équation (4.9.14) est exacte si u , v et c sont affines sur T .

Test 1	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$=$ quelconque
$v(x, y)$	$=$ quelconque
$c(x, y)$	$= 1$
$\mathcal{I}(\Omega) = 0$	$= \langle \mathcal{G}_x^{[\Pi_h(c)]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
et on a	$\mathcal{G}_x^{[\Pi_h(c)]} = 0$
$\mathcal{I}(T) = 0$	$= \langle \mathcal{G}_x^{e, [\Pi_h(c)]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle$
et on a	$\mathcal{G}_x^{e, [\Pi_h(c)]}(T) = 0$

Test 2	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= 2x + y$
$v(x, y)$	$= x - y$
$c(x, y)$	$= -x + y$
$\mathcal{I}(\Omega) = -\frac{1}{12}$	$= \langle \mathcal{G}_x^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

Test 3	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= 2x - 2y$
$v(x, y)$	$= x + 4y$
$c(x, y)$	$= -2x + 3y$
$\mathcal{I}(\Omega) = 1$	$= \langle \mathcal{G}_x^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

4.9.8 Matrices $\mathcal{G}_y^{[c]}$ et $\mathcal{G}_y^{e,[c]}(T)$

De manière similaire au paragraphe précédent, on obtient

Propriété 8 On a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial y}(x, y) u(x, y) v(x, y) dx dy \approx \langle \mathcal{G}_y^{[\Pi_h(c)]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle, \quad (4.9.15)$$

$$\int_T \frac{\partial c}{\partial y}(x, y) u(x, y) v(x, y) dx dy \approx \langle \mathcal{G}_y^{e, [\Pi_h(c)]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle. \quad (4.9.16)$$

L'équation (4.9.15) est exacte si $\Omega = \Omega_h$, et si u, v et c sont dans X_h^1 . L'équation (4.9.16) est exacte si u, v et c sont affines sur T .

Test 1	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$=$ quelconque
$v(x, y)$	$=$ quelconque
$c(x, y)$	$= 1$
$\mathcal{I}(\Omega) = 0$	$= \langle \mathcal{G}_y^{[\Pi_h(c)]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
et on a	$\mathcal{G}_y^{[\Pi_h(c)]} = 0$
$\mathcal{I}(T) = 0$	$= \langle \mathcal{G}_y^{e, [\Pi_h(c)]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle$
et on a	$\mathcal{G}_y^{e, [\Pi_h(c)]}(T) = 0$

Test 2	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= 2x + y$
$v(x, y)$	$= x - y$
$c(x, y)$	$= -x + y$
$\mathcal{I}(\Omega) = \frac{1}{12}$	$= \langle \mathcal{G}_y^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

Test 3	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= 2x - 2y$
$v(x, y)$	$= 5x + 4y$
$c(x, y)$	$= -2x + 3y$
$\mathcal{I}(\Omega) = \frac{1}{2}$	$= \langle \mathcal{G}_y^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

4.9.9 Matrices $\mathcal{K}_{\nabla}^{[\mathbf{p}]}$ et $\mathcal{K}_{\nabla}^{e, [\mathbf{p}]}(T)$

Sur le domaine Ω , on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\Omega) &= \int_{\Omega} \langle \mathbf{p}(x, y), \nabla u(x, y) \rangle v(x, y) dx dy \\
&\approx \int_{\Omega_h} \langle \mathbf{p}(x, y), \nabla \Pi_h(u)(x, y) \rangle \Pi_h(v)(x, y) dx dy \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j \int_{\Omega_h} \langle \mathbf{p}(x, y), \nabla \varphi_i(x, y) \rangle \varphi_j(x, y) dx dy \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j (\mathcal{K}_{\nabla}^{[\mathbf{p}]})_{j,i} \approx \langle \mathcal{K}_{\nabla}^{[\mathbf{p}]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle \\
&\approx \langle \mathcal{K}_{\nabla}^{[\Pi_h(\mathbf{p})]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle.
\end{aligned}$$

Sur un triangle T on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(T) &= \int_T \langle \mathbf{p}(x, y), \nabla u(x, y) \rangle v(x, y) dx dy \\
&\approx \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \tilde{u}_{\alpha} \tilde{v}_{\beta} \int_T \langle \mathbf{p}(x, y), \nabla \tilde{\varphi}_{\alpha}(x, y) \rangle \tilde{\varphi}_{\beta}(x, y) dx dy \\
&\approx \langle \mathcal{K}_{\nabla}^{e, [\mathbf{p}]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle \\
&\approx \langle \mathcal{K}_{\nabla}^{e, [\Pi_h(\mathbf{p})]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle
\end{aligned}$$

Propriété 9 On a

$$\int_{\Omega} \langle \mathbf{p}(x, y), \nabla u(x, y) \rangle v(x, y) dx dy \approx \langle \mathcal{K}_{\nabla}^{[\Pi_h(\mathbf{p})]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle, \quad (4.9.17)$$

$$\int_T \langle \mathbf{p}(x, y), \nabla u(x, y) \rangle v(x, y) dx dy \approx \langle \mathcal{K}_{\nabla}^{e, [\Pi_h(\mathbf{p})]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle. \quad (4.9.18)$$

L'équation (4.9.17) est exacte si $\Omega = \Omega_h$, et si u , v et les composantes de \mathbf{p} sont dans X_h^1 . L'équation (4.9.18) est exacte si u , v et les composantes de \mathbf{p} sont affines sur T .

Test 1	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= 1$
$v(x, y)$	$= \text{quelconque}$
$\mathbf{p}(x, y)$	$= \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$
$\mathcal{I}(\Omega) = 0$	$= \langle \mathcal{K}_{\nabla}^{[\Pi_h(\mathbf{p})]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
et on a	$\mathcal{K}_{\nabla}^{[\Pi_h(\mathbf{p})]} \mathbf{U} = 0$
$\mathcal{I}(T) = 0$	$= \langle \mathcal{K}_{\nabla}^{e, [\Pi_h(\mathbf{p})]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle$
et on a	$\mathcal{K}_{\nabla}^{e, [\Pi_h(\mathbf{p})]}(T) \tilde{\mathbf{U}} = 0$

Test 2		Test 3	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$	Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= 2x + y$	$u(x, y)$	$= 2x - 3y$
$v(x, y)$	$= x - y$	$v(x, y)$	$= 3x - 2y$
$\mathbf{p}(x, y)$	$= \begin{pmatrix} -x + y \\ x - 2y \end{pmatrix}$	$\mathbf{p}(x, y)$	$= \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x + y \end{pmatrix}$
$\mathcal{I}(\Omega) = -\frac{1}{12}$	$= \langle \mathcal{K}_{\nabla}^{[\Pi_h(\mathbf{p})]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$	$\mathcal{I}(\Omega) = -\frac{49}{12}$	$= \langle \mathcal{K}_{\nabla}^{[\Pi_h(\mathbf{p})]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

4.9.10 Matrices $\mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]}$ et $\mathcal{G}_{\text{div}}^{e, [\mathbf{p}]}(T)$

Sur le domaine Ω , on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\Omega) &= \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{p}(x, y)) u(x, y) v(x, y) dx dy \\
&\approx \int_{\Omega_h} \text{div}(\mathbf{p}(x, y)) \Pi_h(u)(x, y) \Pi_h(v)(x, y) dx dy \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j \int_{\Omega_h} \text{div}(\mathbf{p}(x, y)) \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j (\mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]})_{j,i} \approx \langle \mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle \\
&\approx \langle \mathcal{G}_{\text{div}}^{[\Pi_h(\mathbf{p})]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle.
\end{aligned}$$

Sur un triangle T on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(T) &= \int_T \operatorname{div}(\mathbf{p}(x, y)) u(x, y) v(x, y) dx dy \\
&\approx \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \tilde{u}_\alpha \tilde{v}_\beta \int_T \operatorname{div}(\mathbf{p}(x, y)) \tilde{\varphi}_i(x, y) \tilde{\varphi}_j(x, y) dx dy \\
&\approx \langle \mathcal{G}_{\operatorname{div}}^{e, [\mathbf{p}]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle \\
&\approx \langle \mathcal{G}_{\operatorname{div}}^{e, [\mathbf{\Pi}_h(\mathbf{p})]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle
\end{aligned}$$

Propriété 10 On a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{p}(x, y)) u(x, y) v(x, y) dx dy \approx \langle \mathcal{G}_{\operatorname{div}}^{[\mathbf{\Pi}_h(\mathbf{p})]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle, \quad (4.9.19)$$

$$\int_T \operatorname{div}(\mathbf{p}(x, y)) u(x, y) v(x, y) dx dy \approx \langle \mathcal{G}_{\operatorname{div}}^{e, [\mathbf{\Pi}_h(\mathbf{p})]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle. \quad (4.9.20)$$

L'équation (4.9.19) est exacte si $\Omega = \Omega_h$, et si u, v et les composantes de \mathbf{p} sont dans X_h^1 . L'équation (4.9.20) est exacte si u, v et les composantes de \mathbf{p} sont affines sur T .

Test 1	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$=$ quelconque
$v(x, y)$	$=$ quelconque
$\mathbf{p}(x, y)$	$= \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$
$\mathcal{I}(\Omega) = 0$	$= \langle \mathcal{G}_{\operatorname{div}}^{[\mathbf{\Pi}_h(\mathbf{p})]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
et on a	$\mathcal{G}_{\operatorname{div}}^{[\mathbf{\Pi}_h(\mathbf{p})]} = 0$
$\mathcal{I}(T) = 0$	$= \langle \mathcal{G}_{\operatorname{div}}^{e, [\mathbf{\Pi}_h(\mathbf{p})]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle$
et on a	$\mathcal{G}_{\operatorname{div}}^{e, [\mathbf{\Pi}_h(\mathbf{p})]}(T) = 0$

Test 2		Test 3	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$	Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= 2x + y$	$u(x, y)$	$= 2x - 3y$
$v(x, y)$	$= x - y$	$v(x, y)$	$= 3x - 2y$
$\mathbf{p}(x, y)$	$= \begin{pmatrix} -x + y \\ x - 2y \end{pmatrix}$	$\mathbf{p}(x, y)$	$= \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x + y \end{pmatrix}$
$\mathcal{I}(\Omega) = -\frac{1}{4}$	$= \langle \mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$	$\mathcal{I}(\Omega) = \frac{3}{2}$	$= \langle \mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

4.9.11 Matrices $\mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]}$ et $\mathcal{D}_{\text{div}}^{e, [\mathbf{p}]}(T)$

Sur le domaine Ω , on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\Omega) &= \int_{\Omega} \text{div}[\mathbf{p}(x, y)u(x, y)]v(x, y)dx dy \\
&\approx \int_{\Omega_h} \text{div}[\mathbf{p}(x, y)\Pi_h(u)(x, y)]\Pi_h(v)(x, y)dx dy \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j \int_{\Omega_h} \text{div}[\mathbf{p}(x, y)\varphi_i(x, y)]\varphi_j(x, y)dx dy \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j (\mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]})_{j,i} \approx \langle \mathcal{G}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle \\
&\approx \langle \mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle.
\end{aligned}$$

Sur un triangle T on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(T) &= \int_T \text{div}[\mathbf{p}(x, y)u(x, y)]v(x, y)dx dy \\
&\approx \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \tilde{u}_{\alpha} \tilde{v}_{\beta} \int_T \text{div}[\mathbf{p}(x, y)\tilde{\varphi}_{\alpha}(x, y)]\tilde{\varphi}_{\beta}(x, y)dx dy \\
&\approx \langle \mathcal{D}_{\text{div}}^{e, [\mathbf{p}]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle \\
&\approx \langle \mathcal{D}_{\text{div}}^{e, [\mathbf{p}]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle
\end{aligned}$$

Propriété 11 On a

$$\int_{\Omega} \text{div}[\mathbf{p}(x, y)u(x, y)]v(x, y)dx dy \approx \langle \mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{p}]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle, \quad (4.9.21)$$

$$\int_T \text{div}[\mathbf{p}(x, y)u(x, y)]v(x, y)dx dy \approx \langle \mathcal{D}_{\text{div}}^{e, [\mathbf{p}]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle. \quad (4.9.22)$$

L'équation (4.9.21) est exacte si $\Omega = \Omega_h$, et si u, v et les composantes de \mathbf{p} sont dans X_h^1 . L'équation (4.9.22) est exacte si u, v et les composantes de \mathbf{p} sont affines sur T .

Test 1	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$=$ quelconque
$v(x, y)$	$=$ quelconque
$\mathbf{p}(x, y)$	$= \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$
$\mathcal{I}(\Omega) = 0$	$= \langle \mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{I}_h(\mathbf{p})]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
et on a	$\mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{I}_h(\mathbf{p})]} \mathbf{U} = 0$
$\mathcal{I}(T) = 0$	$= \langle \mathcal{D}_{\text{div}}^{e, [\mathbf{I}_h(\mathbf{p})]}(T) \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle$
et on a	$\mathcal{D}_{\text{div}}^{e, [\mathbf{I}_h(\mathbf{p})]}(T) \tilde{\mathbf{U}} = 0$

Test 2		Test 3	
Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$	Ω	$= [0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	$= 2x + y$	$u(x, y)$	$= 2x - 3y$
$v(x, y)$	$= x - y$	$v(x, y)$	$= 3x - 2y$
$\mathbf{p}(x, y)$	$= \begin{pmatrix} -x + y \\ x - 2y \end{pmatrix}$	$\mathbf{p}(x, y)$	$= \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x + y \end{pmatrix}$
$\mathcal{I}(\Omega) = -\frac{1}{3}$	$= \langle \mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{I}_h(\mathbf{p})]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$	$\mathcal{I}(\Omega) = -\frac{31}{12}$	$= \langle \mathcal{D}_{\text{div}}^{[\mathbf{I}_h(\mathbf{p})]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

4.9.12 Matrices \mathcal{B} et $\mathcal{B}^e(E)$

Sur Ω , on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\Gamma) &= \int_{\Gamma} u(x, y)v(x, y)d\gamma(x, y) \\
&\approx \int_{\Gamma_h} \Pi_h(u)(x, y)\Pi_h(v)(x, y)d\gamma(x, y) \\
&\approx \int_{\Gamma_h} \left(\sum_{i=1}^{ns} u_i\varphi_i(x, y) \right) \left(\sum_{j=1}^{ns} v_j\varphi_j(x, y) \right) d\gamma(x, y) \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j \int_{\Gamma_h} \varphi_i(x, y)\varphi_j(x, y)d\gamma(x, y) \\
&\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} u_i v_j \mathcal{B}_{j,i} = \langle \mathcal{B}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle.
\end{aligned}$$

Sur l'arrête E , sur bord Γ_h , on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(E) &= \int_E u(x, y)v(x, y)dx dy \approx \int_T \Pi_h(u)(x, y)\Pi_h(v)(x, y)d\gamma(x, y) \\
&\approx \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \tilde{u}_{\alpha}\tilde{v}_{\beta} \int_T \tilde{\varphi}_{\alpha}(x, y)\tilde{\varphi}_{\beta}(x, y)dx dy \approx \langle \mathcal{M}^e(T)\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle.
\end{aligned}$$

Propriété 12 Les matrices \mathcal{B} et $\mathcal{B}^e(E)$ sont symétriques et on a

$$\int_{\Gamma} u(x, y)v(x, y)d\gamma(x, y) \approx \langle \mathcal{B}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle, \quad (4.9.23)$$

$$\int_E u(x, y)v(x, y)d\gamma(x, y) \approx \langle \mathcal{B}^e(E)\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle. \quad (4.9.24)$$

L'équation (4.9.23) est exacte si $\Gamma = \Gamma_h$, $u = \Pi_h(u)$ et $v = \Pi_h(v)$. L'équation (4.9.24) est exacte si u et v sont affines sur E .

Test 1		Test 1	
Ω	= $[0, 1] \times [0, 1]$	Ω	= $[0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	= 1	$u(x, y)$	= ??
$v(x, y)$	= 1	$v(x, y)$	= ??
$\mathcal{I}(\Gamma) = 4$	= $\langle \mathcal{B}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$	$\mathcal{I}(\Gamma) = ??$	= $\langle \mathcal{B}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = ??$

Test 3		Test 4	
Ω	= $[0, 1] \times [0, 1]$	Ω	= $[0, 1] \times [0, 1]$
$u(x, y)$	= ??	$u(x, y)$	= ??
$v(x, y)$	= ??	$v(x, y)$	= ??
$\mathcal{I}(\Omega) = ??$	= $\langle \mathcal{M}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$	$\mathcal{I}(\Omega) = ??$	$\approx \langle \mathcal{M}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

4.10 Résumé

Soient Ω un domaine de \mathbb{R}^2 et Ω_h un maillage associé (voir ...)

Soient $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$.

On note \mathbf{U} (resp. \mathbf{V}) le vecteur de \mathbb{R}^{n_q} tel que $U_i = u(q^i)$ (resp. $V_i = v(q^i)$).

Soit \mathbb{M} une fonction continue de Ω à valeurs dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice $\mathbb{M}(x, y)$ est symétrique. On note

$$\mathbb{M}(x, y) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}(x, y)$$

4.10.1 $\mathcal{I} = \iint_{\Omega} u(x, y)v(x, y)dxdy$

Matrice globale $\mathcal{M} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$

$\mathcal{M} \leftarrow \text{MassAssembling}(n_q, n_{me}, me, areas)$

Matrice élémentaire $\mathcal{M}^e(T) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$

$\mathcal{M}^e \leftarrow \text{ElemMassMat}(|T|)$

Approximation \mathbb{P}_1 de \mathcal{I} $\langle \mathcal{M}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

avec

$$\mathcal{M}^e(T) = \frac{|T|}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4.10.2 \quad \mathcal{I} = \iint_{\Omega} c(x, y) u(x, y) v(x, y) dx dy$$

Matrice globale	$\mathcal{M}^{[c]} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$
(algo. 4.6.9)	$\mathcal{M} \leftarrow \text{MassFAssembling}(n_q, n_{me}, me, areas, c)$
Matrice élémentaire	$\mathcal{M}^{e, [c]}(T) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$
(algo. 4.6.8)	$\mathcal{M}^e \leftarrow \text{ElemMassFMat}(T , \tilde{c})$
Approximation \mathbb{P}_1 de \mathcal{I}	$\langle \mathcal{M}^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

avec

$$\mathcal{M}^{e, [c]}(T) \approx \frac{|T|}{30} \begin{pmatrix} 3\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 + \tilde{c}_3 & \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 + \frac{\tilde{c}_3}{2} & \tilde{c}_1 + \frac{\tilde{c}_2}{2} + \tilde{c}_3 \\ \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 + \frac{\tilde{c}_3}{2} & \tilde{c}_1 + 3\tilde{c}_2 + \tilde{c}_3 & \frac{\tilde{c}_1}{2} + \tilde{c}_2 + \tilde{c}_3 \\ \tilde{c}_1 + \frac{\tilde{c}_2}{2} + \tilde{c}_3 & \frac{\tilde{c}_1}{2} + \tilde{c}_2 + \tilde{c}_3 & \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 + 3\tilde{c}_3 \end{pmatrix}$$

$$4.10.3 \quad \mathcal{I} = \iint_{\Omega} \langle \nabla u(x, y), \nabla v(x, y) \rangle dx dy$$

Matrice globale	$\mathcal{R} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$
(algo. 4.6.11)	$\mathcal{R} \leftarrow \text{StiffAssembling}(n_q, n_{me}, q, me, areas)$
Matrice élémentaire	$\mathcal{R}^e(T) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$
(algo. 4.6.10)	$\mathcal{R}^e \leftarrow \text{ElemStiffMat}(T , q^1, q^2, q^3)$
Approximation \mathbb{P}_1 de \mathcal{I}	$\langle \mathcal{R} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

$$\text{où } \mathcal{R}^e(T) = \frac{1}{4|T|} \begin{pmatrix} \langle U, U \rangle & \langle U, V \rangle & \langle U, W \rangle \\ \langle V, U \rangle & \langle V, V \rangle & \langle V, W \rangle \\ \langle W, U \rangle & \langle W, V \rangle & \langle W, W \rangle \end{pmatrix}$$

avec $U = q^2 - q^3$, $V = q^3 - q^1$ et $W = q^1 - q^2$.

$$4.10.4 \quad \mathcal{I} = \iint_{\Omega} \langle \mathbb{M}(x, y) \nabla u(x, y), \nabla v(x, y) \rangle dx dy$$

Matrice globale	$\mathcal{R}^{[M]} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$
(algo. 4.6.11)	$\mathcal{R}^{[M]} \leftarrow \text{StiffMAAssembling}(n_q, n_{me}, q, me, areas, TM)$
Matrice élémentaire	$\mathcal{R}^{[M], e}(T) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$
(algo. 4.6.12)	$\mathcal{R}^{[M], e} \leftarrow \text{ElemStiffMMat}(T , q^1, q^2, q^3, TM)$
Approximation \mathbb{P}_1 de \mathcal{I}	$\langle \mathcal{R}^{[M]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

où

$$\mathcal{R}^{[M],e} \leftarrow \frac{1}{4|T|} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{w} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbb{A}\mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbb{A}\mathbf{w} \rangle \\ \langle \mathbf{w}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{w}, \mathbb{A}\mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{w}, \mathbb{A}\mathbf{w} \rangle \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathbf{u} = q^2 - q^3, \quad \mathbf{v} = q^3 - q^1, \quad \mathbf{w} = q^1 - q^2$$

et

$$\mathbb{A} \leftarrow \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^3 m_{11}(q^\alpha) & -\sum_{\alpha=1}^3 m_{12}(q^\alpha) \\ -\sum_{\alpha=1}^3 m_{12}(q^\alpha) & \sum_{\alpha=1}^3 m_{22}(q^\alpha) \end{pmatrix}$$

$$4.10.5 \quad \mathcal{I} = \iint_{\Omega} c(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) v(x, y) dx dy$$

Matrice globale	$\mathcal{K}_x^{[c]} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$
(algo. 4.6.15)	$\mathcal{K}_x^{[c]} \leftarrow \text{KcxAssembling}(n_q, n_{me}, \mathfrak{q}, me, \mathbf{c})$
Matrice élémentaire	$\mathcal{K}_x^{e,[c]}(T) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$
(algo. 4.6.14)	$\mathcal{K}_x^{e,[c]}(T) \leftarrow \text{ElemKcxMat}(q_y^1, q_y^2, q_y^3, \tilde{c})$
Approximation \mathbb{P}_1 de \mathcal{I}	$\langle \mathcal{K}_x^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

où

$$\mathcal{K}_x^{e,[c]}(T) = \frac{1}{24} \mathbf{V} \mathbf{U}^t$$

avec

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 + \tilde{c}_3 \\ \tilde{c}_1 + 2\tilde{c}_2 + \tilde{c}_3 \\ \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 + 2\tilde{c}_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} q_y^2 - q_y^3 \\ q_y^3 - q_y^1 \\ q_y^1 - q_y^2 \end{pmatrix}$$

$$4.10.6 \quad \mathcal{I} = \iint_{\Omega} c(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) v(x, y) dx dy$$

Matrice globale	$\mathcal{K}_y^{[c]} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$
(algo. 4.6.17)	$\mathcal{K}_y^{[c]} \leftarrow \text{KcyAssembling}(n_q, n_{me}, \mathfrak{q}, me, \mathbf{c})$
Matrice élémentaire	$\mathcal{K}_y^{e,[c]}(T) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$
(algo. 4.6.16)	$\mathcal{K}_y^{e,[c]}(T) \leftarrow \text{ElemKcxMat}(q_x^1, q_x^2, q_x^3, \tilde{c})$
Approximation \mathbb{P}_1 de \mathcal{I}	$\langle \mathcal{K}_y^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

où

$$\mathcal{K}_y^{e,[c]}(T) = \frac{1}{24} \mathbf{V} \mathbf{U}^t$$

avec

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 + \tilde{c}_3 \\ \tilde{c}_1 + 2\tilde{c}_2 + \tilde{c}_3 \\ \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 + 2\tilde{c}_3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_x^3 - \mathbf{q}_x^2 \\ \mathbf{q}_x^1 - \mathbf{q}_x^3 \\ \mathbf{q}_x^2 - \mathbf{q}_x^1 \end{pmatrix}$$

$$4.10.7 \quad \mathcal{I} = \iint_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial x}(x, y) u(x, y) v(x, y) dx dy$$

Matrice globale	$\mathcal{G}_x^{[c]} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$
(algo. 4.6.19)	$\mathcal{G}_x^{[c]} \leftarrow \text{GcxAssembling}(n_q, n_{me}, \mathbf{q}, me, \mathbf{c})$
Matrice élémentaire	$\mathcal{G}_x^{e,[c]}(T) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$
(algo. 4.6.18)	$\mathcal{G}^e \leftarrow \text{ElemGcxMat}(\mathbf{q}_y^1, \mathbf{q}_y^2, \mathbf{q}_y^3, \tilde{c})$
Approximation \mathbb{P}_1 de \mathcal{I}	$\langle \mathcal{G}_x^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

où

$$\mathcal{G}_x^{e,[c]}(T) = \frac{\nu_x}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\nu_x = \tilde{c}_1(\mathbf{q}_y^2 - \mathbf{q}_y^3) + \tilde{c}_2(\mathbf{q}_y^3 - \mathbf{q}_y^1) + \tilde{c}_3(\mathbf{q}_y^1 - \mathbf{q}_y^2).$$

$$4.10.8 \quad \mathcal{I} = \iint_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial y}(x, y) u(x, y) v(x, y) dx dy$$

Matrice globale	$\mathcal{G}_y^{[c]} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$
(algo. 4.6.19)	$\mathcal{G}_y^{[c]} \leftarrow \text{GcyAssembling}(n_q, n_{me}, \mathbf{q}, me, \mathbf{c})$
Matrice élémentaire	$\mathcal{G}_y^{e,[c]}(T) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$
(algo. 4.6.18)	$\mathcal{G}^e \leftarrow \text{ElemGcyMat}(\mathbf{q}_x^1, \mathbf{q}_x^2, \mathbf{q}_x^3, \tilde{c})$
Approximation \mathbb{P}_1 de \mathcal{I}	$\langle \mathcal{G}_y^{[c]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

où

$$\mathcal{G}_y^{e,[c]}(T) = \frac{\nu_y}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\nu_y = \tilde{c}_1(\mathbf{q}_x^3 - \mathbf{q}_x^2) + \tilde{c}_2(\mathbf{q}_x^1 - \mathbf{q}_x^3) + \tilde{c}_3(\mathbf{q}_x^2 - \mathbf{q}_x^1).$$

$$4.10.9 \quad \mathcal{I} = \iint_{\Omega} \langle \mathbf{p}(x, y), \nabla u(x, y) \rangle v(x, y) dx dy$$

Matrice globale	$\mathcal{K}_{\nabla}^{[\mathbf{p}]} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$
	$\mathcal{K}_{\nabla}^{[\mathbf{p}]} \leftarrow \mathcal{K}_x^{[p_1]} + \mathcal{K}_y^{[p_2]}$
<hr/>	
Matrice élémentaire	$\mathcal{K}_{\nabla}^{e, [\mathbf{p}]}(T) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$
	$\mathcal{K}_{\nabla}^{e, [\mathbf{p}]}(T) \leftarrow \mathcal{K}_x^{e, [p_1]}(T) + \mathcal{K}_y^{e, [p_2]}(T)$
<hr/>	
Approximation \mathbb{P}_1 de \mathcal{I}	$\langle \mathcal{K}_{\nabla}^{[\mathbf{p}]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

$$4.10.10 \quad \mathcal{I} = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{p}(x, y)) u(x, y) v(x, y) dx dy$$

Matrice globale	$\mathcal{G}_{\operatorname{div}}^{[\mathbf{p}]} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$
	$\mathcal{G}_{\operatorname{div}}^{[\mathbf{p}]} \leftarrow \mathcal{G}_x^{[p_1]} + \mathcal{G}_y^{[p_2]}$
<hr/>	
Matrice élémentaire	$\mathcal{G}_{\operatorname{div}}^{e, [\mathbf{p}]}(T) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$
	$\mathcal{G}_{\operatorname{div}}^{e, [\mathbf{p}]}(T) \leftarrow \mathcal{G}_x^{e, [p_1]}(T) + \mathcal{G}_y^{e, [p_2]}(T)$
<hr/>	
Approximation \mathbb{P}_1 de \mathcal{I}	$\langle \mathcal{G}_{\operatorname{div}}^{[\mathbf{p}]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

$$4.10.11 \quad \mathcal{I} = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{p}(x, y)) u(x, y) v(x, y) dx dy$$

Matrice globale	$\mathcal{D}_{\operatorname{div}}^{[\mathbf{p}]} \in \mathcal{M}_{n_q, n_q}(\mathbb{R})$
	$\mathcal{D}_{\operatorname{div}}^{[\mathbf{p}]} \leftarrow \mathcal{G}_x^{[p_1]} + \mathcal{G}_y^{[p_2]}$
<hr/>	
Matrice élémentaire	$\mathcal{D}_{\operatorname{div}}^{e, [\mathbf{p}]}(T) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$
	$\mathcal{D}_{\operatorname{div}}^{e, [\mathbf{p}]}(T) \leftarrow \mathcal{G}_{\operatorname{div}}^{e, [\mathbf{p}]} + \mathcal{K}_{\nabla}^{e, [\mathbf{p}]}(T)$
<hr/>	
Approximation \mathbb{P}_1 de \mathcal{I}	$\langle \mathcal{D}_{\operatorname{div}}^{[\mathbf{p}]} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$

Matrice	Matrice élémentaire
\mathcal{M}	$\mathcal{M}^e(T) = \frac{ T }{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\mathcal{M}^{[c]}$	$\mathcal{M}^{e,[c]}(T) \approx \frac{ T }{30} \begin{pmatrix} 3c_1 + c_2 + c_3 & c_1 + c_2 + \frac{c_3}{2} & c_1 + \frac{c_2}{2} + c_3 \\ c_1 + c_2 + \frac{c_3}{2} & c_1 + 3c_2 + c_3 & \frac{c_1}{2} + c_2 + c_3 \\ c_1 + \frac{c_2}{2} + c_3 & \frac{c_1}{2} + c_2 + c_3 & c_1 + c_2 + 3c_3 \end{pmatrix}$
\mathcal{R}	$\mathcal{R}^e(T) = \frac{1}{4 T } \begin{pmatrix} \langle U, U \rangle & \langle U, V \rangle & \langle U, W \rangle \\ \langle V, U \rangle & \langle V, V \rangle & \langle V, W \rangle \\ \langle W, U \rangle & \langle W, V \rangle & \langle W, W \rangle \end{pmatrix}$ avec $U = q^2 - q^3$, $V = q^3 - q^1$ et $W = q^1 - q^2$.

4.10.12 Matrices globales

Formulation intégrale	Approximation P_1
$\iint_{\Omega} u(x, y)v(x, y)dxdy$	$\langle \mathcal{M}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
$\iint_{\Omega} c(x, y)u(x, y)v(x, y)dxdy$	$\langle \mathcal{M}^{[c]}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
$\iint_{\Omega} \langle \nabla u(x, y), \nabla v(x, y) \rangle dxdy$	$\langle \mathcal{R}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
$\iint_{\Omega} \langle \mathbb{M}(x, y) \nabla u(x, y), \nabla v(x, y) \rangle dxdy$	$\langle \mathcal{R}^{[\mathbb{M}]}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
$\iint_{\Omega} c(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)v(x, y)dxdy$	$\langle \mathcal{K}_x^{[c]}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
$\iint_{\Omega} c(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)v(x, y)dxdy$	$\langle \mathcal{K}_y^{[c]}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
$\iint_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial x}(x, y)u(x, y)v(x, y)dxdy$	$\langle \mathcal{G}_x^{[c]}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
$\iint_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial y}(x, y)u(x, y)v(x, y)dxdy$	$\langle \mathcal{G}_y^{[c]}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
$\iint_{\Omega} \langle \mathbf{p}(x, y), \nabla u(x, y) \rangle v(x, y)dxdy$	$\langle \mathcal{K}_{\nabla}^{[\mathbf{p}]}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{p}(x, y)u(x, y)v(x, y)dxdy$	$\langle \mathcal{G}_{\operatorname{div}}^{[\mathbf{p}]}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$
$\iint_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{p}(x, y)u(x, y)) v(x, y)dxdy$	$\langle \mathcal{D}_{\operatorname{div}}^{[\mathbf{p}]}\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$