Conjectures sur le spectre tempéré. Exemple de $SL(2)$ d'après Labesse et Langlands.

Dans un premier temps nous allons présenter les conjectures sur le spectre lisse (tempéré ou non) d'un groupe local et leur contrepartie globale sur le spectre automorphe cuspidal tempéré d'un groupe adélique. Ces conjectures sont essentiellement dûes à Langlands et ont été précisées par Kottwitz dans [K] puis généralisées par Arthur au cas non-tempéré dans [A1] [A2]. Elles semblent être inspirées d'une part des exemples fournis dans [LL] et des travaux simultanés ou postérieurs de Shelstad pour les groupes réels, et d'autre part d'une analogie - périlleuse - avec ce que l'on sait faire de l'autre côté de la formule des traces (côté géométrique, *cf* exposés précédents). Nous allons commencer par cette analogie.

1 Analogies, réelles ou désirées, entre côtés géométrique et spectral

G désigne un groupe réductif connexe sur un corps global F dont on note $|F|$ l'ensemble des places et $\mathbb{A}_F$ les adèles. On supposera G_{der} simplement connexe pour éviter les ennuis.

1.1 *Les objets* :

Côté Géométrique

- γ_0 est une classe de conjugaison semi-simple elliptique régulière de $G(F)$. On lui associe une distribution invariante dite intégrale orbitale $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{A}_F) \mapsto O_{\gamma_0}(f) \in \mathbb{C}$.
- La contribution des termes elliptiques réguliers au côté géométrique de la formule des traces :

$$T_e(f) = \sum_{\gamma \in \mathcal{E}} \tau(G_\gamma) O_\gamma(f)$$

Côté spectral

- π_0 est une représentation automorphe cuspidale tempérée de $G(A_F)$. On lui associe une distribution invariante dite caractère $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{A}_F) \mapsto C_{\pi_0}(f)$.
- La contribution du spectre cuspidal tempéré au côté spectral de la formule des traces :

$$T_c(f) = \sum_{\pi \in \mathcal{C}} m(\pi) C_\pi(f)$$

où $m(\pi)$ est la multiplicité de π dans $L^2_{disc}(Z(\mathbb{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))$.

1.2 *Instabilité locale* : Soit $v \in |F|$ et F_v le complété en v.

Côté géométrique

On s'intéresse à l'ensemble $S_v(\gamma_0)$ des classes de conjugaisons de $G(F_v)$ stablement conjuguées à γ_0. D'après les exposés précédents, cet ensemble est en bijection avec le dual d'un groupe abélien fini noté $\mathfrak{K}_v(\gamma_0)$. On a noté $\langle \kappa, \mathrm{inv}(\gamma_v, \gamma_0) \rangle$ l'accouplement correspondant, où $\kappa \in \mathfrak{K}_v(\gamma_0)$ et γ_v est stablement conjugué à γ_0.

Côté spectral

On s'attend à l'existence de
- Un ensemble fini Π_v, dit L-paquet local, de représentations lisses irréductibles tempérées de $G(F_v)$ contenant le facteur local π_{0v} de π en v.
- Un groupe fini $\mathfrak{S}_{\Pi_v}$ et une fonction $\langle , \rangle : \mathfrak{S}_{\Pi_v} \times \Pi_v \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

i) $\forall \pi \in \Pi_v$, la fonction $\langle ., \pi\rangle$ est centrale sur $\mathfrak{S}_{\Pi_v}$.

ii) les fonctions $\langle ., \pi\rangle$ pour $\pi \in \Pi_v$ sont linéairement indépendantes.

iii) si π est non-ramifiée, $\langle ., \pi\rangle = 1$.

Des exemples montrent que $\mathfrak{S}_{\Pi_v}$ peut ne pas être abélien, et que les fonctions $\langle ., \pi\rangle$ peuvent ne pas être des caractères effectifs.

1.3 *Instabilité globale* :

Côté géométrique

On s'intéresse à l'ensemble $S(\gamma_0)$ (en général infini) des classes de conjugaison de $G(\mathbb{A}_F)$ qui sont

i) partout stablement conjuguées à γ_0,

ii) presque partout conjuguées à γ_0.

Il y a un groupe abélien fini

$$\mathfrak{K}(\gamma_0)\text{''} = \text{''} \bigcap_{v\in|F|} \mathfrak{K}_v(\gamma_0)$$

et la condition ii) ci-dessus permet de définir un accouplement $\mathfrak{K}(\gamma_0) \times S(\gamma_0) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\langle \kappa, \gamma\rangle := \Pi_{v\in|F|}\langle \kappa, \mathrm{inv}(\gamma_0, \gamma_v)\rangle$$

Côté spectral

Admettant l'existence des paquets locaux comme ci-dessus, on s'intéresse à l'ensemble Π_0, dit L-paquet global, des représentations admissibles irréductibles $\pi = \otimes_v \pi_v$ de $G(\mathbb{A}_F)$ telles que

i) en toute place v, on a $\pi_v \in \Pi_v$,

ii) pour presque toute place v, π_v est non-ramifiée.

On voudrait alors isoler un certain groupe fini $\mathfrak{S}_{\Pi_0} \subset \Pi_{v\in|F|}\mathfrak{S}_{\Pi_v}$, la condition ii) ci-dessus permettant de définir un accouplement $\langle ., .\rangle : \mathfrak{S}_{\Pi_0} \times \Pi_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ comme du côté géométrique. Les requêtes sur ce groupe et cet accouplement sont calquées sur l'exemple géométrique :

1.4 *Distributions stables* :

Côté géométrique

Par définition de l'accouplement, l'intégrale orbitale stable d'une fonction $f_v \in \mathcal{C}_c^\infty(G(F_v))$ s'écrit :

$$SO_{\gamma_0}(f_v) = \sum_{\gamma_v\in S_v(\gamma_0)} \langle 1, \gamma_0\rangle O_{\gamma_v}(f_v)$$

Suivant Langlands, on dira qu'une distribution sur $G(F_v)$ est *stable* si elle est dans l'adhérence faible de l'espace engendré par les intégrales orbitales stables.
La formule et la définition ci-dessus s'expriment de la même manière sur $G(\mathbb{A}_F)$. On remarque juste que si l'ensemble $S(\gamma_0)$ est infini, seul un nombre fini de $O_\gamma(f)$, $\gamma \in S(\gamma_0)$ sont non nuls, à f fixée.

Côté spectral

Par analogie, on souhaite imposer à l'accouplement local en v la condition que la distribution

$$SC_{\Pi_v}(f_v) := \sum_{\pi\in\Pi_v} \langle 1, \pi\rangle C_\pi(f_v)$$

soit stable au sens ci-contre. On remarquera que :

– on peut raffiner en demandant que ce soit l'unique combinaison linéaire stable de caractères dans Π_v.
– dans les exemples, les nombres $\langle 1, \pi\rangle$ ne sont pas nécessairement égaux à 1.

On étend au global avec la même remarque que ci-contre.

1.5 *Endoscopie* :

Côté géométrique

Pour $\kappa \neq 1 \in \mathfrak{K}_v(\gamma_0)$, on s'intéresse à la κ-intégrale orbitale locale en v :

$$O^{\kappa}_{\gamma_0}(f_v) = \sum_{\gamma_v \in S_v(\gamma_0)} \langle \kappa, \gamma \rangle O_{\gamma_v}(f_v)$$

Les exposés précédents ont montré comment à $\kappa \neq 1$ on associe un quadruplet (H, s, η, γ_v^H) où (H, s, η) est un triplet endoscopique et γ_v^H est une classe de conjugaison *stable* de $H(F_v)$. Les classes stables obtenues de cette façon sont dites G-régulières. On a alors la conjecture de transfert : *Pour toute $f_v \in \mathcal{C}_c^\infty(G(F_v))$, il existe $f_v^H \in \mathcal{C}_c^\infty(H(F_v))$ telle que*

$$SO_{\gamma_v^H}(f_v^H) = O^{\kappa}_{\gamma_0}(f_v).$$

Côté spectral

Par analogie on voudrait savoir associer à tout élément $s \neq 1 \in \mathfrak{S}_{\Pi_v}$ un triplet endoscopique (H, s, η) et un L-paquet Π_v^H pour le groupe $H(F_v)$ tel que

$$SC_{\Pi_v^H}(f_v^H) = \delta \sum_{\pi \in \Pi_v} \langle s, \pi \rangle C_\pi(f_v)$$

où δ est un scalaire non nul et f_v^H est donné par la conjecture de transfert ci-contre. Les L-paquets de H obtenus ainsi sont dits G-cuspidaux.

Les égalités locales (géométriques ou spectrales) donnent par produit des égalités globales évidentes que l'on omet.

1.6 *Stabilisation* :

Côté géométrique

Pour H groupe endoscopique et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H(\mathbb{A}_F))$, posons

$$ST_e^G(f) = \tau(G) \sum_{\gamma G-\text{reg, ell.}} SO_\gamma(f)$$

(partie elliptique G-régulière de la formule des traces stable de H). Les exposés précédents ont montré que

$$T_e(f) = \sum_{(H,s,\eta)/\sim} \iota(G,H) ST_e^G(f^H)$$

où les fonctions $f^H \in \mathcal{C}_c^\infty(H(\mathbb{A}_F))$ se déduisent des tranferts locaux. Rappelons aussi que l'idée essentielle pour obtenir cette formule est d'effectuer une transformation de Fourier sur le groupe $\mathfrak{K}(\gamma_0)$ pour restaurer la symétrie rompue par la condition d'instabilité :

$$\sum_{\substack{\gamma \in S(\gamma_0) \\ inv(\gamma_0,\gamma)=0}} O_\gamma(f) = \sum_{\substack{\kappa \in \mathfrak{K}(\gamma_0) \\ \gamma \in S(\gamma_0)}} \langle \kappa, \gamma \rangle O_\gamma(f).$$

Par ailleurs, un ingrédient important était l'étude combinatoire de l'application $(H, s, \eta, \gamma^H) \mapsto (\gamma_0, \kappa)$ par Kottwitz.

Côté spectral

Pour H et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H(\mathbb{A}_F))$, posons

$$ST_c^G(f) = \sum_{\Pi \in \{L\text{-pa.}G\text{-cu}\}} |\mathfrak{S}_\Pi|^{-1} SC_\Pi(f)$$

(partie G-cuspidale tempérée de la formule des traces stable de H). Par analogie, on voudrait obtenir une formule du type

$$T_c(f) = \sum_{(H,s,\eta)/\sim} \iota(G,H) ST_c(f^H)$$

L'idée pour cela est toujours d'effectuer une sorte de transformée de Fourier sur les groupes $\mathfrak{S}_\Pi$ mais celle-ci reposera sur une nouvelle conjecture, dite conjecture de multiplicité qui affirme que pour $\pi \in \Pi$ on a

$$m(\pi) = \frac{d(\Pi)}{|\mathfrak{S}_\Pi|} \sum_{s \in \mathfrak{S}_\Pi} \langle s, \pi \rangle$$

où $d(\Pi)$ est une "multiplicité" du L-paquet Π.

Supposant cette conjecture vraie, et étudiant la combinatoire de l'application $(H, s, \eta, \Pi^H) \mapsto (\Pi, s)$, Kottwitz a montré la validité de la formule stabilisée ci-dessus.

2 Paramètres de Langlands

Nous noterons Γ le groupe de Galois absolu de F et W_F son groupe de Weil (valable pour F local ou global). Nous prendrons les L-groupes sous leur "forme de Weil", c'est-à-dire que ${}^LG = \widehat{G} \ltimes W_F$. Ce n'est pas seulement décoratif, c'est important pour relever certains cocycles ou prolonger le plongement η d'un triplet endoscopique en un morphisme de L-groupes. La plupart des définitions données ici sont tirées de [K] que l'on espère n'avoir pas trop déformé.

2.1 *Groupes de Langlands :* Si F est local posons $L_F = W_F$ dans le cas archimédien et $L_F := W_F \times SU_2(\mathbb{R})$ dans le cas non-archimédien. Lorsque F est global nous penserons à L_F comme à l'hypothétique groupe Tannakien automorphe de Langlands. On peut se restreindre à W_F si on veut éviter d'utiliser un objet aussi conjectural, mais on ne pourra alors paramétrer qu'une petite partie du spectre automorphe. Quoiqu'il en soit, voici quelques axiomes de base que l'on requiert pour L_F :

i) l'existence d'un épimorphisme $L_F \xrightarrow{p_F} W_F$ à noyau compact. (On suit ici Kottwitz qui remplace le groupe a priori pro-algébrique de Langlands par une version topologique, mieux adaptée pour les définitions à venir).

ii) pour toute place v, l'existence pour tout morphisme $W_{F_v} \xrightarrow{i_v} W_F$ d'un morphisme encore noté i_v rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} L_F \arrow[r, "p_F"] & W_F \\ L_{F_v} \arrow[u, dotted] \arrow[r, "p_{F_v}"] & W_{F_v} \arrow[u, "i_v"'] \end{tikzcd}$$

iii) l'existence d'un isomorphisme $F^*\backslash\mathbb{A}_F^* \xrightarrow{\sim} L_F^{ab}$ tel que la composée avec $L_F^{ab} \longrightarrow \Gamma^{ab}$ soit donnée par le corps de classes.

Définition 2.2 *(L-paramètres) Un L-paramètre est un morphisme continu $L_F \xrightarrow{\phi} {}^LG$ tel que*

i) le diagramme

$$\begin{tikzcd} L_F \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p_F"] & {}^LG \arrow[dl] \\ W_F & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

ii) l'image $\mathrm{im}\,\phi$ *est constituée d'éléments semi-simples.*

iii) si $\mathrm{im}\,\phi$ *est inclus dans un sous-groupe parabolique de* ${}^LG$ *alors celui-ci relève de* G (cf *[BCorv]),* i.e. *la classe de conjugaison de sous-groupes paraboliques de* $G(\overline{F})$ *associée contient un élément défini sur* F.

Définition 2.3 *(Équivalence) On dit que deux L-paramètres ϕ_1 et ϕ_2 sont équivalents si il existe $g \in \widehat{G}$ et $z = (z_l)_{l \in L_F}$ un* 1*-cocycle $L_F \longrightarrow \mathcal{Z}(\widehat{G})$ tels que*

i) $\forall l \in L_F,\ \ \phi_1(l) = g\phi_2(l)g^{-1}z_l$.

ii) Si F est local, z est nul dans $H^1(L_F, \mathcal{Z}(\widehat{G}))$. Si F est global, z est localement trivial, i.e. $z \in \ker^1(L_F, \mathcal{Z}(\widehat{G}))$.

Nous noterons $\Phi(G/F)$ l'ensemble des classes d'équivalence de L-paramètres de G sur F.

Définition 2.4 *($\mathfrak{S}_\phi$) Soit ϕ un L-paramètre. Dans le cas local on note C_ϕ le centralisateur dans $\widehat{G}$ de l'image de ϕ et on pose $\mathfrak{S}_\phi := \Pi_0(C_\phi/Z(\widehat{G})^\Gamma)$. Dans le cas global la même définition marche pour G semi-simple et simplement connexe, mais en général, on note*

$$S_\phi := \{g \in \widehat{G}, l \in L_F \mapsto g\phi(l)g^{-1}\phi(l)^{-1} \text{ soit un élément de } \ker^1(L_F, \mathcal{Z}(\widehat{G}))\}$$

puis $\mathfrak{S}_\phi := \Pi_0(S_\phi/\mathcal{Z}(\widehat{G})^\Gamma)$*. Dans tous les cas* $\mathfrak{S}_\phi$ *s'interprète comme le groupe des composantes connexes du groupe des auto-équivalences de* ϕ*.*

Remarquons que le groupe $\mathfrak{S}_\phi$ n'est pas nécessairement commutatif. En particulier, ce n'est pas un invariant de la classe d'équivalence de ϕ au sens ci-dessus ; seul l'ensemble des classes de conjugaisons de $\mathfrak{S}_\phi$ est un tel invariant, et par conséquent l'espace des fonctions centrales sur $\mathfrak{S}_\phi$ en est un autre.

Définition 2.5 *Un L-paramètre* ϕ *est dit*

i) tempéré *si* $\phi(L_F)$ *est relativement compact.*

ii) elliptique *si* $\phi(L_F)$ *n'est pas inclus dans un Levi propre, ou ce qui est équivalent (cf Kottwitz), si* $S_\phi^0 \subset \mathcal{Z}(\widehat{G})$*.*

2.6 *Groupes endoscopiques et L-paramètres elliptiques* : Soit ϕ un L-paramètre elliptique pour G. Fixons $s \in S_\phi$ et notons $\widehat{H}$ le centralisateur connexe de s dans $\widehat{G}$. De la définition de S_ϕ, on tire facilement que $\phi(L_F) \subset \mathcal{N}_{^LG}(\widehat{H})$ (le normalisateur de $\widehat{H}$ dans ^LG). On obtient par composition un morphisme $\overline{\phi} : L_F \longrightarrow \mathrm{Out}(\widehat{H})$ de L_F dans les automorphismes extérieurs de $\widehat{H}$. Comme $\mathrm{Out}(\widehat{H})$ est discret, ce morphisme doit se factoriser par Γ. On vérifie alors que l'inclusion $\eta : \widehat{H} \longrightarrow \widehat{G}$ est "Γ-équivariante à conjugaison près" pour l'action ainsi obtenue de Γ sur $\widehat{H}$. Par ailleurs on déduit de cette même action un groupe réductif H quasi-déployé sur F de L-groupe $\widehat{H} \rtimes \Gamma$. Le triplet (H, s, η) ainsi obtenu est un triplet endoscopique elliptique au sens de Kottwitz que nous rappelons ci-dessous :

Définition 2.7 *Un triplet endoscopique pour* G *est la donnée* (H, s, η)

i) d'un groupe réductif quasi-déployé H *sur* F*,*

ii) d'un élément $s \in \mathcal{Z}(\widehat{H})$*,*

iii) et d'un plongement $\eta : \widehat{H} \longrightarrow \widehat{G}$ Γ*-équivariant à conjugaison près et tel que* $\eta(\widehat{H}) = \widehat{G}^0_{\eta(s)}$*,*

soumis à la condition que l'image de s *dans* $\mathcal{Z}(\widehat{H})/\mathcal{Z}(\widehat{G})$ *soit fixe par* Γ *et son image par le morphisme*

$$\Pi_0((\mathcal{Z}(\widehat{H})/\mathcal{Z}(\widehat{G}))^\Gamma) \longrightarrow H^1(\Gamma, \mathcal{Z}(\widehat{G}))$$

(dont la définition a été donnée dans un exposé précédent) soit dans $\ker^1(\Phi, \mathcal{Z}(\widehat{G}))$*.*

Proposition 2.8 *(Langlands) Soit* (H, s, η) *un triplet endoscopique. L'hypothèse* G_{der} *simplement connexe permet d'étendre* η *en un morphisme* $^L\eta :^L H \longrightarrow^L G$ *de L-groupes.*

La preuve de cette proposition occupe l'essentiel de l'article "Stable conjugacy : definitions and lemmas" de Langlands. Il est nécessaire de travailler avec la forme de Weil des L-groupes (on a besoin de relever des cocycles qui ne se relèvent *a priori* pas avec la forme Galoisienne).

La proposition précédente permet de transférer les L-paramètres d'un groupe endoscopique vers le groupe G. Soit (H, s, η) un triplet endoscopique, et $\phi_H : L_F \longrightarrow {}^LH$ un L-paramètre, alors $\phi := {}^L\eta \circ \phi_H$ est un L-paramètre pour G et $\eta(s) \in \mathfrak{S}_\phi$. Malheureusement, ce procédé ne respecte pas les relations d'équivalence de L-paramètres sur H et G respectivement. On est amené en suivant Kottwitz à considérer une relation de G-équivalence sur les L-paramètres de H où, en reprenant les notations de la définition 2.3., on suppose le cocycle $(z_l)_{l \in L_F}$ à valeurs dans $\mathcal{Z}(\widehat{G})$ plutôt que dans $\mathcal{Z}(\widehat{H})$ (rappelons que le plongement η permet d'identifier $\mathcal{Z}(\widehat{G})$ à un sous-Γ-module de $\mathcal{Z}(\widehat{H})$). Le transfert ci-dessus induit alors une application bien définie

$$\{\text{cl. de } G\text{-équiv. de } L\text{-par. de} H\} \longrightarrow \{\text{Couples } ([\phi], [\epsilon])\}$$

où $[\phi]$ est une classe d'équivalence de L-paramètres pour G et $[\epsilon]$ est une classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_\phi$.

2.9 *Conjectures de paramétrisation, d'après Langlands et Kottwitz* : Nous sommes maintenant en mesure de préciser les conjectures (ou plutôt les desiderata) de la première section sur le côté spectral de la formule des traces :

Conjecture 2.10 *Supposons F local. Alors*

i) on peut partitionner le spectre lisse de $G(F)$ en

$$Irr(G(F)) = \bigsqcup_{\phi \in \Phi(G/F)} \Pi(\phi)$$

où $\Pi(\phi)$ est un ensemble fini non vide.

ii) si ϕ est tempéré elliptique, il existe un accouplement $\langle .,. \rangle : \mathfrak{S}_\phi \times \Pi(\phi)$ vérifiant les conditions de 1.2 et 1.4.

iii) si $s \in \mathfrak{S}_\phi$ et (H, s, η) est le triplet endoscopique associé comme ci-dessus, alors la condition 1.5. est remplie.

Supposons maintenant F global et soit ϕ un L-paramètre elliptique tempéré. Il lui correspond une famille $(\phi_v)_{v \in |F|}$ de L-paramètres locaux auxquels la conjecture locale ci-dessus fait correspondre des L-paquets locaux $\Pi(\phi_v)$. Nous avons déja défini le L-paquet global $\Pi(\phi)$ associé à ces données locales en 1.3. Ce L-paquet ne dépend évidemment que de la classe d'équivalence de ϕ. Posons alors $\mathfrak{S}_\Pi := \mathfrak{S}_\phi$, on s'aperçoit que la définition du $\mathfrak{S}_\phi$ global permet de définir un accouplement $\mathfrak{S}_\phi \times \Pi(\phi)$ comme produit des accouplement locaux. De plus, les conjectures locales impliquent la validité de 1.4 et 1.5 dans le cas global. Il reste alors à formuler la conjecture de multiplicité qui, elle, ne se réduit pas en un "produit" de conjectures locales :

Conjecture 2.11 *Supposons F global et supposons les conjectures locales vérifiées pour le groupe G sur les complétions F_v, $v \in |F|$. Alors, la multiplicité $m(\pi)$ de la représentation admissible π dans $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))$ est donnée par la formule :*

$$m(\pi) = \sum_{\phi \in \Phi^{ell}_{temp}(G/F), \pi \in \Pi(\phi)} \frac{1}{|\mathfrak{S}_\phi|} \sum_{s \in \mathfrak{S}_\phi} \langle s, \pi \rangle$$

La différence avec la formule proposée en 1.6 tient au fait que l'application $\phi \mapsto \Pi(\phi)$ n'est pas nécessairement injective : deux L-paramètres peuvent être localement partout équivalents sans être globalement équivalents. La multiplicité $d(\Pi)$ du L-paquet de la formule de 1.6 est donc juste le nombre de classes globales donnant les même familles de classes locales.

3 $SL(2)$, notations

Dans cette partie et les suivantes nous noterons G pour $GL(2)$ et S pour $SL(2)$. Les conjectures de la section précédentes sont connues pour le groupe G (peut-être encore incomplètes à l'époque de [LL]). On sait que dans ce cas les L-paquets locaux sont des singletons et que les multiplicités automorphes cuspidales sont égales à 0 ou 1. On va vérifier ces conjectures pour le groupe S qui donne déja des exemples de L-paquets non-triviaux et de multiplicités instables. Nous suivrons essentiellement [LL] en utilisant tout-de-même quelques résultats locaux pas encore établis à l'époque mais qui simplifient l'exposition.

3.1 *Conjugaison stable* : On commence par la remarque suivante, fondamentale et hautement simplificatrice : deux éléments rationnels $\gamma, \gamma' \in S(F)$ sont stablement conjugués si et seulement si ils sont conjugués sous $G(F)$. Ceci permet de simplifier la notion de distribution stable et de deviner la forme des L-paquets :

- Une distribution D est stable si et seulement si pour tout $g \in G(F)$, $D \circ \mathrm{Ad}(g) = D$.
- Si π est une (classe d'isomorphisme de) représentation admissible irréductible de $S(F)$ ou $S(\mathbb{A}_F)$, alors on *définit* son L-paquet comme étant son orbite par l'action adjointe de $G(F)$, resp. $G(\mathbb{A}_F)$.

Nous préciserons tout cela dans la partie "théorie locale". Auparavant, nous dressons la liste des données endoscopiques de S/F.

3.2 *L-groupes* : On a évidemment ${}^LG = GL(2,\mathbb{C}) \times W_F$ et ${}^LS = PGL(2,\mathbb{C}) \times W_F$. Nous noterons par la suite avec une $*$ en indice l'image d'un élément de $GL(2)$ dans $PGL(2)$.

3.3 *Triplets endoscopiques* : ils sont tous équivalents à des triplets (H, s, η) de l'une des formes suivantes :

i) $H = SL(2,F)$, $s = 1$ et $\eta = \mathrm{Id}$.

ii) $H = H_{E/F} = ker(\mathrm{Res}_{E/F}(\mathbb{G}_m) \xrightarrow{N_{E/F}} \mathbb{G}_m)$ où E/F est une extension quadratique, $s = -1 \in \widehat{H} = \mathbb{C}^*$ et

$$\begin{array}{rccc} \eta : & \widehat{H} = \mathbb{C}^* & \to & \widehat{S} = PGL(2,\mathbb{C}) \\ & z & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}_* \end{array}$$

Si le groupe de Galois de E/F est engendré par $\sigma_{E/F}$, on peut prolonger η en un morphisme de L-groupes en posant ${}^L\eta(\sigma_{E/F}) := (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \sigma_{E/F})$.

iii) $H = \mathbb{G}_m$, $s \in \widehat{H} = \mathbb{C}^*$ et η défini par la même formule que ci-dessus. Ces données ne sont pas elliptiques et n'apparaitront pas dans la suite.

3.4 *L-paramètres* : commençons par énoncer le lemme suivant très pratique et montré dans l'article [L2] de Labesse :

Lemme 3.5 *Si $\phi : L_F \longrightarrow {}^LS$ est un L-paramètre pour S, alors ϕ se relève en un L-paramètre $\widetilde{\phi} : L_F \longrightarrow {}^LG$ pour G.*

On voudrait maintenant calculer les groupes $\mathfrak{S}_\phi$ pour ϕ L-paramètre de S. Pour cela, faisons agir le groupe $\Phi(G_{ab}/F)$ qui s'identifie au groupe des L-paramètres pour G à valeurs dans le centre de ${}^LG$ (et donc au groupe des caractères de L_F) sur l'ensemble $\Phi(G/F)$. Le lemme précédent montre que $\Phi(S/F) \simeq \Phi(G/F)/\Phi(G_{ab}/F)$. Soit $\widetilde{\phi}$ un relevé de ϕ, on peut exhiber deux applications

$$\begin{array}{rcl} Stab_{\Phi(G_{ab}/F)}(\widetilde{\phi}) & \to & \mathfrak{S}_\phi \\ \omega & \mapsto & g_* \text{ où } \omega.\phi = g\phi g^{-1} \end{array}$$

(on notera toujours avec une $*$ en indice l'image dans $PGL(2)$ d'une matrice dans $GL(2)$) et

$$\begin{array}{rcl} S_\phi & \to & Stab_{\Phi(G_{ab}/F)}(\widetilde{\phi}) \\ s & \mapsto & s\phi s^{-1}\phi^{-1} \end{array} .$$

Ces deux application induisent des isomorphismes réciproques $Stab_{\Phi(G_{ab}/F)}(\widetilde{\phi}) \simeq \mathfrak{S}_\phi$. D'autre part, un peu de théorie de Clifford montre que (en notant $C_F = F^*$ ou $F^*\backslash\mathbb{A}_F^*$ selon que F est local ou global) :

Lemme 3.6 *Soit $\widetilde{\phi} \in \Phi(G/F)$. Si il existe un caractère non trivial ω de L_F tel que $\omega\widetilde{\phi} \simeq \widetilde{\phi}$, alors ω est quadratique, donc associé à une extension E/F de degré 2 et il existe un caractère lisse $\widetilde{\theta} : C_E \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tel que*

$$\widetilde{\phi} = \widetilde{\phi}(\widetilde{\theta}) : L_F \longrightarrow W_F \xrightarrow{{}^L\widetilde{\theta}} {}^L(Res_{E/F}\mathbb{G}_m) \xrightarrow{{}^L\eta} {}^LG = GL(2,\mathbb{C})$$

où ${}^L(Res_{E/F}\mathbb{G}_m) = \mathbb{C}^2 \rtimes \sigma_{E/F}$, le morphisme ${}^L\widetilde{\theta}$ est induit de $\widetilde{\theta}$ et le morphisme ${}^L\eta$ est défini par le plongement diagonal sur le facteur $\mathbb{C}^2$ et envoie $\sigma_{E/F}$ sur l'élément $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \sigma_{E/F}$.

En d'autres termes, si $\mathfrak{S}_\phi$ est non trivial alors ϕ provient d'un groupe endoscopique H du type ii), c'est à dire qu'il existe une extension quadratique E/F et un L-paramètre θ pour $H_{E/F}$ tel que $\phi = {}^L\eta \circ \theta$.

Dressons maintenant la liste des groupes $\mathfrak{S}_\phi$ possibles : ils sont tous associés à un L-paramètre de la forme $\phi = {}^L\eta \circ \theta$ et on a en posant $\overline{\theta} := \theta \circ \sigma_{E/F}$ et en notant $\widetilde{\theta}$ un prolongement de θ à C_E :

i) Si $\theta \neq \overline{\theta}$, ou ce qui est équivalent, si $(\widetilde{\theta}\widetilde{\overline{\theta}}^{-1})^2 \neq 1$, alors $\mathfrak{S}_\phi = S_\phi = \{\mathrm{Id}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_*\}$.

ii) Si $\theta = 1$, ou ce qui est équivalent, $\widetilde{\theta}\widetilde{\overline{\theta}}^{-1} = 1$, alors $\widetilde{\theta} = \mu \circ N_{E/F}$, $\widetilde{\phi}(\widetilde{\theta})_* = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu\omega \end{pmatrix}_*$ et

$\mathfrak{S}_\phi = \{\mathrm{Id}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_*\}$

iii) Si $\theta = \overline{\theta} \neq 1$, ou ce qui est équivalent, si $\widetilde{\theta}\widetilde{\overline{\theta}}^{-1}$ est d'ordre 2, alors

$$S_\phi = \mathfrak{S}_\phi = \{\mathrm{Id}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_*, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_*, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_*\} \simeq (\mathbb{Z}/2)^2$$

.

On veut ensuite vérifier que tous les éléments de $\mathfrak{S}_\phi$ sont de la forme $\eta(s)$ pour un certain triplet endoscopique. On calcule facilement dans les cas respectifs ci-dessus :

i) $\eta(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_*$.

ii) $\eta(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_*$.

iii) $\eta(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_*$.

Une difficulté semble apparaître dans le dernier cas où on obtient un seul élément de $\mathfrak{S}_\phi$. Pour obtenir les autres, on remarque qu'il y a des entrelacements entre différents L-paramètres dans le cas iii). Plus précisément, le caractère quadratique $\widetilde{\theta}\widetilde{\overline{\theta}}^{-1}$ de E^* définit une extension quadratique K/E qui contient deux autres extensions quadratiques E'/F et E''/F qui conduisent à deux autres triplets endoscopiques (H', s', η') et (H'', s'', η''). De plus, l'équation $\widetilde{\theta}' \circ N_{K/E'} = \widetilde{\theta}'' \circ N_{K/E''} = \widetilde{\theta} \circ N_{K/E}$ définit des caractères θ' et θ'' de $H'(F)$ et $H''(F)$ respectivement et on a avec des notations évidentes $\phi_{E,\theta} \simeq \phi_{E',\theta'} \simeq \phi_{E'',\theta''}$, ou plus précisément : il existe g', g'' dans ${}^LG$ tels que $\phi_{E,\theta} = g'\phi_{E',\theta'}g'^{-1} = g''\phi_{E'',\theta''}g''^{-1}$. On vérifie alors que

$$\{g'{}^L\eta'(s')g'^{-1}, g''{}^L\eta''(s'')g''^{-1}\} = \{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_*, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_*\}$$

4 $SL(2)$, théorie locale

Dans cette section, nous considérons le cas d'un corps F local. Le lemme suivant est une compilation de [LL, lemmes 2.4, 2.5, 2.6] :

Lemme 4.1 *i) Si $\widetilde{\pi} \in \mathrm{Irr}(G(F))$, alors $\widetilde{\pi}_{|S(F)}$ est semi-simple, sans multiplicité, de longueur $|\,Stab_{\widehat{G(F)_{ab}}}(\widetilde{\pi})|$ (l'ordre du stabilisateur de $\widetilde{\pi}$ sous l'action des caractères lisses de $G(F)$).*

ii) Si $\pi \in \mathrm{Irr}(S(F))$, il existe $\widetilde{\pi} \in \mathrm{Irr}(G(F))$ telle que $\pi \hookrightarrow \widetilde{\pi}_{|S(F)}$.

La preuve de ce lemme est essentiellement une adaptation facile de la théorie de Clifford pour des groupes topologiques et des représentations de dimension infinie, sauf l'assertion sur la multiplicité. Il est important de remarquer que cette dernière est fausse dans la situation pourtant très semblable où l'on remplace G par le groupe multiplicatif d'une algèbre à division et S par ses éléments de norme 1. Pour $SL(2)$, Langlands utilise les modèles de Whittaker (toujours pratiques pour les questions de multiplicité).

4.2 *Paramétrisation* : Considérons maintenant la correspondance de Langlands locale

$$\Phi(G/F) \xrightarrow{\sim} Irr(G(F))$$

pour le groupe G. Cette correspondance induit en particulier l'isomorphisme r_F de groupes abéliens donné par la réciprocité du corps de classes, entre le groupe multiplicatif $\Phi(G_{ab}/F)$ des L-paramètres à valeurs dans le centre de ${}^LG$ et le groupe $\widehat{G(F)_{ab}}$ des caractères lisses de $G(F)$. Ces deux groupes agissent respectivement sur $\Phi(G/F)$ et $Irr(G(F))$ et la correspondance de Langlands est r_F-équivariante.

Comme on l'a vu dans la section précédente, on a $\Phi(S/F) \simeq \Phi(G/F)/\Phi(G_{ab}/F)$, tandis que le lemme ci-dessus implique que $Irr(G(F))\,/\widehat{G(F)_{ab}} \simeq Irr(S(F))\,/G(F)$ (rappelons que $G(F)$ agit par conjugaison sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $S(F)$). Ainsi la correspondance pour G entraine une paramétrisation pour S que l'on peut résumer par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \Phi(G/F) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & Irr(G(F)) \arrow[d] \\ \Phi(S/F) \arrow[r, "\simeq"] & Irr(S(F))\,/G(F) \end{tikzcd}$$

Les L-paquets de S/F sont par définition les $G(F)$-orbites dans $Irr(S(F))$, mais le premier lemme montre que ce sont aussi les ensembles de facteurs de composition de la restriction d'une représentation irréductible $\widetilde{\pi}$ de $G(F)$ et que ces ensembles ont pour cardinal $|\,Stab_{\widehat{G(F)_{ab}}}(\widetilde{\pi})|$. Ce cardinal est aussi celui de $Stab_{\Phi(G_{ab}/F)}(\widetilde{\phi})$ si $\widetilde{\phi}$ est le paramètre correspondant à $\widetilde{\pi}$. Soit maintenant $\phi \in \Phi(S/F)$ et $\Pi(\phi)$ le L-paquet correspondant. On déduit des remarques ci-dessus et de la section précédente que pour tout ϕ on a l'égalité[1] de cardinaux $|\Pi(\phi)| = |\mathfrak{S}_\phi|$. Avec l'isomorphisme $\mathfrak{S}_\phi \simeq Stab_{\Phi(G_{ab}/F)}(\widetilde{\phi})$ de la section précédente, on pourrait même définir abstraitement un accouplement entre $\Pi(\phi)$ et $\mathfrak{S}_\phi$ moyennant le choix d'un point base dans $\Pi(\phi)$. Mais pour trouver le "bon" accouplement (dicté par les contraintes de l'analyse harmonique), on ne peut pas se passer de mettre la main à la pâte...

4.3 *Transfert* : Le groupe $SL(2)$ a ceci de particulier que tous ses groupes endoscopiques s'y plongent. On ne considèrera ici que les groupes endoscopiques attachés aux extensions quadratiques : ce sont des tores et l' énoncé du transfert y prend une forme plus simple. Supposons H attaché à l'extension quadratique E/F. Choisissons un plongement $H \hookrightarrow S$ défini sur F ainsi qu'une diagonalisation, c'est-à-dire un élément $s_E \in S(E)$ tel que $s_E H(E) s_E^{-1}$ soit inclus dans le tore diagonal. Ce dernier choix permet d'ordonner les valeurs propres $(\gamma_1, \gamma_2) \in E^*$ d'un élément γ de $H(F)$. Il permet aussi de définir $\gamma' \in H(F)$ par l'égalité $(\gamma_1', \gamma_2') = (\gamma_2, \gamma_1)$. Lorsque γ est régulier, l'élément γ' est un représentant de l'unique classe de conjugaison stablement conjuguée mais pas conjuguée à γ.

Fixons ensuite un élément $\gamma^0 \in H(F)_{reg}$ et un caractère ψ de F additif. On pose alors pour $\gamma \in H(F)$ régulier

$$\Delta(\gamma) = \frac{|\gamma_1 - \gamma_2|}{|\gamma_1\gamma_2|^{\frac{1}{2}}} \text{ et } d(\gamma) := \lambda(E/F,\psi)\kappa\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1^0 - \gamma_2^0}\right)\Delta(\gamma)$$

où $\lambda(E/F,\psi)$ est une constante définie par Jacquet-Langlands dans leur livre et κ est l'élément non trivial de $H^1(F,H)^D \simeq (F^*/N_{E/F}(E^*))^D$. Il est clair que $d(\gamma') = -d(\gamma)$.

Le transfert s'exprime comme suit, [LL, lemme 2.1] :

Proposition 4.4 *Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(S(F))$, la fonction $\gamma \in H(F)_{reg} \mapsto d(\gamma)(O_\gamma(f) - O_{\gamma'}(f))$ se prolonge en une fonction lisse à support compact sur $H(F)$, notée f^H.*

[1] Par la remarque suivant le premier lemme, cette égalité est fausse dans le cas algèbres à division dès qu'il y a des multiplicités

La preuve, longue de 4 ou 5 pages, est un calcul explicite de ce qu'on doit définir aux points singuliers pour le prolongement [LL Définition 2.3] ...

4.5 *Accouplements* : D'après ce qui a été dit jusqu'ici tout L-paquet non-trivial est associé à une extension E/F et un caractère lisse θ de E^*. Comme précédemment, on peut fixer un plongement $E^* = H(F) \hookrightarrow S(F)$, une diagonalisation, etc... Notons ω le caractère quadratique de F^* associé à l'extension E/F et $G(\omega) := ker(\omega \circ \det) \subset G(F)$. Dans le livre *Base Change for* $GL(2)$, lemme 5.18, Langlands prouve le résultat suivant :

Proposition 4.6 *Soit $\widetilde{\pi}(\theta)$ la représentation lisse irréductible de $G(F)$ associée au L-paramètre $\widetilde{\phi}(\theta) \in \Phi(G/F)$. Alors la restriction de $\widetilde{\pi}(\theta)$ à $G(\omega)$ est de longueur 2 et on peut ordonner les facteurs $\widetilde{\pi}(\theta)_{|G(\omega)} = \widetilde{\pi}(\theta)^+ \oplus \widetilde{\pi}(\theta)^-$ de telle sorte que*

$$\forall \gamma \in H(F)_{reg}, \quad \chi_{\widetilde{\pi}(\theta)^+_{|S(F)}}(\gamma) - \chi_{\widetilde{\pi}(\theta)^-_{|S(F)}}(\gamma) = \lambda(E/F, \psi)\omega\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1^0 - \gamma_2^0}\right) \frac{\theta(\gamma) + \theta(\gamma')}{\Delta(\gamma)}$$

Ici $\chi_?$ désigne la fonction-caractère associée par Harish-Chandra au caractère-distribution de la représentation admissible ?. La preuve utilise la construction explicite de la représentation $\widetilde{\pi}(\theta)$ par la méthode de Weil. On peut peut-être en imaginer une variante par les types de Bushnell-Kutzko.

Corollaire 4.7 *Avec les notations de la proposition ci-dessus,*

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(S(F)), \quad Tr\,\widetilde{\pi}(\theta)^+{}_{|S(F)}(f) - Tr\,\widetilde{\pi}(\theta)^-{}_{|S(F)}(f) = \theta(f^H)$$

Cette dernière formule fixe un unique accouplement $\langle ., \rangle : \mathfrak{S}_{\phi(\theta)} \times \Pi(\phi(\theta)) \longrightarrow \{\pm 1\}$ vérifiant les requêtes des paragraphes 1.2, 1.4 et 1.5. On ne va pas donner la liste précise (voir [S] pour celle-ci) de ce qu'on obtient, mais on remarque au passage que la fonction $\langle 1, . \rangle$ est constante de valeur 1 sur $\Pi(\phi)$ et que pour tout $\pi \in \Pi(\phi)$, la fonction $\langle ., \pi \rangle$ est un caractère irréductible de $\mathfrak{S}_\phi$. Ces deux propriétés sont mises en défaut dans le cas d'une algèbre à division : le paquet correspondant au cas où $|\mathfrak{S}_\phi| = 4$ est en fait un singleton, et on obtient $\langle 1, \pi \rangle = 2$ et $\langle s, \pi \rangle = 0$ pour $s \neq 1$ ce qui ne correspond pas à un caractère effectif de $(\mathbb{Z}/2)^2$.

5 $SL(2)$, théorie globale

Dans le paragraphe 1.6, nous avons grossièrement expliqué comment pour un groupe G général (disons quand-même à groupe dérivé simplement connexe), Kottwitz parvient à une stabilisation du terme cuspidal tempéré de la formule des traces sous la forme

$$T_c(f) = \sum_{(H,s,\eta)/\sim} \iota(G, H) ST_c^G(f^H)$$

en admettant (outre la paramétrisation, les accouplements, le transfert, etc...) une formule conjecturale pour la multiplicité automorphe d'une représentation irréductible admissible π de $G(\mathbb{A}_F)$.

Dans le cas $SL(2)$, il se passe plutôt le contraire : Labesse et Langlands démontrent directement la formule ci-dessus et en déduisent la formule de multiplicité voulue.

Il est bon d'expliciter chaque terme de la formule ci-dessus dans le cas qui nous intéresse :

- Tout d'abord, le terme $T_c(f)$: on considère la représentation régulière ρ de $S(\mathbb{A}_F)$ dans $L^2 := L^2(S(F)\backslash S(\mathbb{A}_F))$ et on note ρ_0 sa restriction à la partie *cuspidale* L_0^2. Rappelons que par Deligne on sait que cette partie est aussi tempérée. On a donc par définition $T_c(f) = Tr(\rho_0(f))$.
- On somme sur les triplets endoscopiques à isomorphisme près. Dans notre cas, ces triplets sont en bijection avec les caractères quadratiques de $F^*\backslash\mathbb{A}_F^*$. Si ϵ est trivial, on obtient $(SL(2), 1, \mathrm{Id})$, sinon ϵ définit une extension quadratique.

– les nombres $\iota(G,H)$: si $H = SL(2)$, ce nombre vaut 1. En général on a la formule de Kottwitz $\iota(G,H) = \tau_1(G)\tau_1(H)^{-1}\lambda^{-1}$ où τ_1 désigne le nombre de Tamagawa relatif. Ici, $\tau_1(SL(2)) = 1$ et $\tau_1(H) = 2$ lorsque H est un tore elliptique. Enfin λ est le cardinal du groupe des automorphismes du triplet endoscopique (H,s,η) et vaut 2 dans le cas d'un tore elliptique et 1 sinon. Pour H elliptique, on obtient donc $\iota(G,H) = \frac{1}{4}$
– Les termes $ST_c^G(f^H)$: rappelons que f^H est définie par les transferts locaux de la section précédente (au moins pour une fonction-test produit). Supposons H tore elliptique associé au caractère ϵ. Comme c'est un groupe commutatif, l'expression de sa trace cuspidale est particulièrement simple et déja stabilisée. Mais il faut ici faire attention à la subtilité suivante : le terme $ST_c^G(f^H)$ n'est pas exactement la (stabilisation de) la trace cuspidale de f^H, mais plutôt de la trace G-cuspidale, c'est-à-dire qu'on doit se restreindre aux représentations cuspidales qui le restent après transfert de H à G. Dans notre cas, notons $\Theta(\epsilon)$ le dual du groupe compact $H(F)\backslash H(\mathbb{A}_F)$: c'est un groupe discret et tout élément est "cuspidal" pour H. Mais le caractère trivial ne se transfère pas en quelque chose de cuspidal pour S. L'expression voulue est donc simplement

$$ST_c^G(f^H) = \sum_{\theta\in\Theta(\epsilon),\theta\neq 1} \theta(f^H)$$

– Il reste à expliciter $ST_c(f)$: ici encore, on peut tirer partie de ce que la conjugaison stable "coïncide" avec la conjugaison sous $G(\mathbb{A}_F)$. On pose *ad hoc* :

$$ST_c(f) := \int_{(G(F)S(\mathbb{A}_F)Z(\mathbb{A}_F))\backslash G(\mathbb{A}_F)} T_c(f^g)$$

où Z désigne le centre de G.

Remarquons maintenant que le déterminant fournit un isomorphisme

$$(G(F)S(\mathbb{A}_F)Z(\mathbb{A}_F))\backslash G(\mathbb{A}_F) \xrightarrow{\sim} (F^*\mathbb{A}_F^2)\backslash\mathbb{A}_F$$

ce qui donne envie de tordre la dernière formule ci-dessus par un caractère quadratique ϵ de $F^*\mathbb{A}_F^*$. Posons donc

$$T_c^\epsilon(f) := \int_{(G(F)S(\mathbb{A}_F)Z(\mathbb{A}_F))\backslash G(\mathbb{A}_F)} \epsilon(g)T_c(f^g).$$

Il est alors clair que

$$T_c(f) = \sum_\epsilon T_c^\epsilon(f).$$

Labesse et Langlands montrent les résultats suivants :

Théorème 5.1 *Soit ϵ un caractère quadratique non-trivial de $F^*\backslash\mathbb{A}_F^*$ et (H,s,η) la classe d'équivalence de triplets endoscopiques associée. Alors*

$$T_c^\epsilon(f) = \frac{1}{4}\left(\sum_{\theta\in\Theta(\epsilon),\theta\neq 1} \theta(f^H)\right) = \iota(G,H)ST_c^G(f^H)$$

Éléments de la preuve : Rappelons que l'opérateur $\rho(f)$ a pour noyau

$$K_f(x,y) = \sum_{\gamma\in S(F)} f(x\gamma y^{-1}).$$

Notons L_1^2 la partie Eisenstein de L^2 et δ_S la représentation triviale de $S(\mathbb{A}_F)$, de sorte que $L^2 = L_0^2 \oplus \delta_S \oplus L_1^2$, et $H_f(x,y)$ le noyau de la restriction de $\rho(f)$ à L_1^2. On a

$$T_c(f) + \delta_S(f) = \int_{S(F)\backslash S(\mathbb{A}_F)} (K_f(x,x) - H_f(x,x))\,dx.$$

On peut scinder le terme de droite en 2 termes convergents dont l'un est la trace elliptique

$$T_e(f) = \int_{S(F)\backslash S(\mathbb{A}_F)} \sum_{\gamma \text{ell}} f(x\gamma x^{-1}).$$

On obtient donc

$$T_c(f) + \delta(f) = T_e(f) + C(f)$$

pour un certain terme complémentaire $C(f)$ donné par la formule des traces de Selberg. De même on obtient pour ϵ non trivial :

$$T_c^\epsilon(f) = T_e^\epsilon(f) + C^\epsilon(f)$$

avec des définitions sous-entendues des termes de droite. On peut alors se raccrocher aux exposés précédents où la trace elliptique a déja été stabilisée. La formule obtenue était :

$$T_e(f) = \sum_{(H,s,\eta)/\sim} \iota(G,H) ST_e^G(f^H).$$

Il n'est pas difficile de voir en suivant le processus de stabilisation que si (H, s, η) est la classe de triplets endoscopiques associée au caractère ϵ, alors

$$\iota(G,H) ST_e^G(f^H) = T_e^\epsilon(f).$$

On a par définition la formule

$$ST_e^G(f^H) = \tau(H) \sum_{\gamma \in H(F)\backslash\{\pm 1\}} f^H(\gamma).$$

On peut alors appliquer la formule des traces pour H, c'est-à-dire la formule de Poisson, en faisant attention aux éléments rationnels non G-réguliers (*i.e.* ± 1) ainsi qu'aux caractères non G-cuspidaux (*i.e.* le caractère trivial δ_H, *cf* une remarque précédente). On obtient

$$ST_e^G(f^H) + \tau(H)(f^H(1) + f^H(-1)) = ST_c^G(f^H) + \delta_H(f^H),$$

ce qui nous donne

$$T_e^\epsilon(f) = \iota(G,H) ST_c^G(f^H) + \frac{1}{4}(\delta_H(f^H) - \tau(H)(f^H(1) + f^H(-1))).$$

Le travail supplémentaire consiste donc à montrer que

$$C^\epsilon(f) = \frac{1}{4}\left(\tau(H)(f^H(1) + f^H(-1)) - \delta_H(f^H)\right)$$

Rappelons que

$$C(f) = \int_{S(F)\backslash S(\mathbb{A}_F)} \left(\sum_{\gamma \text{par}} f(x\gamma x^{-1}) - H_f(x,x) \right) dx$$

et qu'on ne peut pas scinder en 2 termes convergents. Pour scinder quand-même, on choisit une suite de fonctions normalisées ϕ_i à support compact tendant dans L^2 vers la fonction constante 1, et on pose

$$\begin{aligned} C(f,\phi_i) &:= \int_{S(F)\backslash S(\mathbb{A}_F)} \phi_i(x) \left(\sum_{\gamma \text{par}} f(x\gamma x^{-1}) - H_f(x,x) \right) dx \\ &= \int_{S(F)\backslash S(\mathbb{A}_F)} \phi_i(x) \sum_{\gamma \text{par}} f(x\gamma x^{-1}) - \int_{S(F)\backslash S(\mathbb{A}_F)} \phi_i(x) H_f(x,x) \\ &= C'(f,\phi_i) + C''(f,\phi_i) \end{aligned}$$

D'après [L1], l'évaluation du terme $C'(f,\phi_i)$ fait intervenir le résidu en $z=1$ du prolongement analytique de certaines fonctions $Z(f,z;a)$ de la variable complexe z attachées à f et à $a \in \mathbb{A}_F^*$. On peut "epsiloniser" ces fonctions pour obtenir des fonctions $Z(f,z,\epsilon;a)$ dont les résidus en $z=1$ contribuent à $C^\epsilon(f)$. Ces contributions sont non nulles seulement si $a=\pm 1$, auquel cas un calcul montre que

$$\mathrm{Res}_{z=1} Z(f,z,\epsilon;\pm 1) = \frac{\tau(H)}{4} f^H(\pm 1)$$

D'autre part, en suivant le calcul de $C''(\phi_i,f)$ et en l'"epsilonisant" comme il faut, on montre que la seule contribution de ces termes à $C^\epsilon(f)$ est $-\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\, M(\epsilon)I(\epsilon,f)$ où $I(\epsilon,f)$ est l'opérateur induit par f sur la série principale $I(\epsilon)$ associée à ϵ vu comme caractère du tore maximal diagonal et $M(\epsilon)$ est un opérateur d'entrelacement de cette série principale. La dernière chose à montrer est alors :

$$\mathrm{Tr}\, M(\epsilon)I(\epsilon,f) = \delta_H(f^H),$$

égalité que l'on peut montrer place par place (car $M(\epsilon)$ est le produit d'un opérateur d'entrelacement produit en toutes les places par un quotient de fonctions L qui vaut ici 1). Le calcul local est expliqué dans [LL, lemme 3.6], avec références à des calculs du livre *Base Change for* $GL(2)$.

Remarque : Soit ϵ un caractère quadratique de $F^*\backslash\mathbb{A}_F^*$ et θ un caractère du groupe $H(F)\backslash H(\mathbb{A}_F)$ associé. Moyennant le choix d'un caractère additif de $F\backslash\mathbb{A}_F$, la construction de Weil (globale) permet de définir une représentation $\pi(\theta)$ de $S(\mathbb{A}_F)$. Posons

$$\pi^{\pm}(\theta) := \widehat{\bigoplus}_{g\in G(\mathbb{A}_F)/\ker(N_{E/F}\circ det),\epsilon(g)=\pm 1} \pi(\theta)^g$$

(somme hilbertiennes). Alors

$$\theta(f^H) = \mathrm{Tr}\,\pi^+(\theta) - \mathrm{Tr}\,\pi^-(\theta).$$

C'est cette formule qui apparaît dans le papier [L1].

Corollaire 5.2 *i) On a bien la formule* $T_c(f) = \sum_{(H,s,\eta)/\sim} \iota(G,H) ST_c^G(f^H)$.

ii) Soit π une représentation irréductible admissible de $S(\mathbb{A}_F)$. S'il existe $g\in G(\mathbb{A}_F)$ tel que $m(\pi^g)\neq m(\pi)$, alors π est dans le L-paquet $\Pi(\theta)$ associé à un caractère $\theta : E^*\backslash\mathbb{A}_E^* \longrightarrow \mathbb{C}$ pour une extension quadratique E/F.

iii) Dans ce cas, notons $\phi=\phi(\theta)$ le L-paramètre global associé ; on a

$$m(\pi) = \frac{1}{|\mathfrak{S}_\phi|}\sum_{s\in\mathfrak{S}_\phi} \langle s,\pi\rangle$$

Éléments de la preuve : On a déja expliqué le point i). Passons au point ii). Rappelons la formule $T_c(f) = \sum_\pi m(\pi)\,\mathrm{Tr}\,\pi(f)$ où π décrit le dual unitaire admissible de $S(\mathbb{A}_F)$ et $m(\pi)$ désigne la multiplicité de π dans L_0^2. Posons pour un caractère quadratique ϵ de $F^*\backslash\mathbb{A}_F^*$

$$m^\epsilon(\pi) := \int_{(G(F)S(\mathbb{A}_F)Z(\mathbb{A}_F))\backslash G(\mathbb{A}_F)} \epsilon(g)m(\pi^g),$$

de sorte que la trace ϵ-tordue d'une fonction-test f s'écrit :

$$T_c^\epsilon(f) = \sum_\pi m^\epsilon(\pi)\,\mathrm{Tr}\,\pi(f).$$

(Remarquons au passage que si $g\in G(F)$, π^g n'est pas nécessairement isomorphe à π, mais on a bien $m(\pi^g)=m(\pi)$.) Écrivons $f=\prod_{v\in|F|} f_v$ et rappelons que $f^H = \prod_v f_v^H$ où, par définition des accouplements locaux de la section précédente,

$$\forall v,\ \ \theta(f_v^H) = \sum_{\pi\in\Pi(\theta_v)} \langle s,\pi\rangle\,\mathrm{Tr}\,\pi(f_v),$$

en notant (H, s, η) la classe de triplets endoscopiques associée à ϵ. Le théorème précédent se réécrit formellement :

$$\sum_{\pi} m^{\epsilon}(\pi)\ Tr\,\pi(f) = \frac{1}{4}\left(\sum_{\theta\in\Theta(\epsilon)\setminus\{1\}}\ \sum_{\pi\in\Pi(\theta)} \langle s, \pi\rangle\ Tr\,\pi(f)\right)$$

Un raisonnement soigneux d'analyse fonctionnelle [LL, lemme 6.1] et un choix judicieux de fonctions-test permettent de montrer ce qui saute naïvement aux yeux : on a

$$m^{\epsilon}(\pi) = \begin{cases} \frac{1}{4}\langle s, \pi\rangle \text{ si } \pi\in\Pi(\theta) \text{ pour un } \theta\in\Theta(\epsilon)\setminus\{1\} \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$

Par ailleurs, il est clair que π est instable (c'est-à-dire qu'il existe g tel que $m(\pi^g) \neq m(\pi)$) si et seulement si il existe $\epsilon \neq 1$ tel que $m^{\epsilon}(\pi) \neq 0$, ce qui prouve le point ii).

Pour le point iii), il faut encore calculer $m^1(\pi)$, c'est-à-dire la "multiplicité stable de π". Supposons que la représentation irréductible admissible unitaire π de $S(\mathbb{A}_F)$ apparaît dans la restriction d'une représentation irréductible admissible unitaire $\widetilde{\pi}$ de $G(\mathbb{A}_F)$. Notons $G(\pi)$ le stabilisateur dans $G(\mathbb{A}_F)$ de la classe de π. On a le lemme suivant [LL, lemme 6.2], où l'on note $G(\pi) \subset G(\mathbb{A}_F)$:

Lemme 5.3 *Notons Y le groupe des caractères unitaires du groupe $F^*\backslash\mathbb{A}_F^*$, $X(\widetilde{\pi})$ le stabilisateur de la classe de $\widetilde{\pi}$ par l'action $\widetilde{\pi} \mapsto \widetilde{\pi}\otimes(\mu\circ det)$ et enfin $Y(\widetilde{\pi})$ l'ensemble des caractères unitaires μ de $\mathbb{A}_F^*$ tels que la représentation $\pi\otimes(\mu\circ det)$ soit automorphe et cuspidale. Alors*

$$m^1(\pi) = [G(F)G(\pi) : G(\mathbb{A}_F)]^{-1}|Y(\widetilde{\pi})/YX(\widetilde{\pi})|.$$

Remarquons que le groupe $G(F)G(\pi)$ est cocompact dans $G(\mathbb{A}_F)$ tandis que le groupe $G(\pi)$ est ouvert dans $G(\mathbb{A}_F)$ puisque $\widetilde{\pi}_{|S(\mathbb{A}_F)}$ se décompose discrètement. Donc le quotient $G(\mathbb{A}_F)/G(F)G(\pi)$ est fini et l'indice dans le lemme a bien un sens. La preuve de ce lemme repose à nouveau sur des arguments de type théorie de Clifford (sauf qu'il faut tenir compte de l'automorphie), plus le théorème de multiplicité 1 pour $GL(2)$.

Fixons maintenant un caractère quadratique ϵ et un caractère $\theta\in\Theta(\epsilon)$ non-triviaux. On peut étendre θ en un caractère $\widetilde{\theta} : E^*\backslash\mathbb{A}_E^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ et la construction globale de Weil fournit une représentation $\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})$ automorphe et cuspidale de $G(\mathbb{A}_F)$. Expliquons comment d'après [LL corollaire 6.6], on a $|Y(\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta}))/YX(\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta}))| = 1$: soit μ un caractère de $\mathbb{A}_F^*$ tel que $\widetilde{\pi}_\mu := \widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})\otimes(\mu\circ\det)$ soit aussi automorphe. Alors par le point ii), $\widetilde{\pi}_\mu = \widetilde{\pi}(\widetilde{\theta}')$ pour un autre caractère $\widetilde{\theta}'\in\Theta(\epsilon')$. Mais comme $\widetilde{\pi}_\mu \simeq \widetilde{\pi}_\mu\otimes(\epsilon\circ\det)$ (puisque la même chose est vraie pour $\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})$), on a nécessairement $\epsilon = \epsilon'$. En utilisant la fonctorialité $GL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow PGL(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{Ad} GL(3,\mathbb{C})$ et Cebotarev, on montre que $\widetilde{\theta}^{-1}\widetilde{\theta}'$ se factorise par un caractère ω de $F^*\backslash\mathbb{A}_F^*$ via la norme $N_{E/F}$, et on obtient $\widetilde{\pi}_\mu \simeq \widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})\otimes(\omega\circ\det)$.

Soit maintenant $\pi\in\Pi(\theta)$. On a donc

$$m^1(\pi) = [G(F)G(\pi) : G(\mathbb{A}_F)]^{-1}.$$

Nous distinguons deux cas : supposons d'abord que $\theta\neq\overline{\theta}$. Alors on trouve $m^1(\pi) = \frac{1}{2}$. D'autre part si $\epsilon'\notin\{\epsilon, 1\}$, on a par le point ii) $m^{\epsilon'}(\pi) = 0$. Enfin, après avoir remarqué que $\Pi(\theta) = \Pi(\overline{\theta})$, on a $m^{\epsilon}(\pi) = \frac{1}{4}\langle s, \pi\rangle + \frac{1}{4}\langle s, \pi\rangle$. De sorte que

$$m(\pi) = \frac{1}{2}\left(\langle 1, \pi\rangle + \langle s, \pi\rangle\right).$$

Supposons maintenant $\theta = \overline{\theta} \neq 1$. On définit comme dans la partie 3 deux extensions E' et E'', associées aux caractères quadratiques ϵ' et ϵ'', et deux caractères $\theta'\in\Theta(\epsilon')$ et $\theta''\in\Theta(\epsilon'')$ qui bien entendu vérifient aussi $\theta' = \overline{\theta'}$ et $\theta'' = \overline{\theta''}$. On obtient donc :

– $m^{\omega}(\pi) = 0$ si $\omega\notin\{1, \epsilon, \epsilon', \epsilon''\}$.

– $m^{\omega}(\pi) = \frac{1}{4}\langle s, \pi\rangle$ si $\omega \in \{\epsilon, \epsilon', \epsilon''\}$.
– $m^1(\pi) = \frac{1}{4}$.
ce qui donne bien :

$$m(\pi) = \frac{1}{4} \sum_{s \in \mathfrak{S}_{\phi(\theta)}} \langle s, \pi\rangle$$

compte tenu de la discussion à la fin de la partie 3.

Bibliographie

[A1] J. Arthur, *Unipotent automorphic representations : conjectures*, Astérisque.

[A2] J. Arthur, *Unipotent automorphic representations : global motivations*, Ann Arbor.

[K] R. Kottwitz, *Stable trace formula : Cuspidal tempered terms*, Duke Math. J., 51, 1984.

[L1] J.-P. Labesse, *L-indistinguishable representations and trace formula for* $SL(2)$, Lie groups and their representations, proceedings of a summer school in Budapest.

[L2] J.-P. Labesse, *Cohomologie, L-groupes et fonctorialité*, Compositio Math. 55. (1985).

[LL] J.-P. Labesse et R. Langlands, *L-indistinguishability for* $SL(2)$, Can. J. Math. XXXI, 1979.

[S] D. Shelstad, *Notes on L-indistinguishability*, Corvallis t.2.