CARACTÈRES À VALEURS DANS LE CENTRE DE BERNSTEIN

J.-F. DAT

Abstract. Let G be a reductive p-adic group, we are interested in finitely generated projective smooth G-modules. Let P be such a module, consider it as a $\mathfrak{Z}$-module, where $\mathfrak{Z}$ is the Bernstein center of the category of smooth G-modules. Then we can form $P \otimes_{\mathfrak{Z},\chi} \mathbb{C}$ for every complex-valued character of $\mathfrak{Z}$: it is a finite length smooth representation of G. We describe its image in the Grothendieck group of finite length smooth G-modules. To do this, we define under suitable assumptions a $\mathfrak{Z}$-valued character on the $\mathfrak{Z}$-admissible (but not admissible!) representation P. The case of $ind_K^G(1)$ where K is a special compact open subgroup of G is an interesting example. Some of his properties are discussed and extended to other representations of K using Bushnell and Kutzko's theory of types, when $G = GL(n)$.

0. Introduction

0.1. **Le problème et les résultats.** Dans ce travail, F est un corps local non archimédien de corps résiduel $\mathbb{F}_q$ et G désigne l'ensemble des F-points d'un groupe réductif connexe $\mathfrak{G}$ défini sur F. On note $\mathfrak{Z}$ le centre de la catégorie des représentations lisses de G. Soit P une représentation lisse projective de G, on s'intéresse aux représentations du type $P \otimes_{\mathfrak{Z},\chi} \mathbb{C}$ où χ est un caractère complexe de $\mathfrak{Z}$.

Supposons que P est dans la sous-catégorie abélienne des représentations de support supercuspidal contenant (M, ρ), où M est un sous-groupe de Levi et ρ est une représentation supercuspidale de M ; les résultats principaux sont les suivants :

i) (Lemme 1.2) Il existe un entier n_P et un ensemble dense Ω de caractères complexes de $\mathfrak{Z}$ tel que pour tout $\chi \in \Omega$, on a l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie :

$$[P \otimes_{\mathfrak{Z},\chi} \mathbb{C}] = n_P [i_M^G(\rho_\chi)]$$

où ρ_χ désigne la représentation ρ tordue par un caractère non ramifié de M induisant χ sur $\mathfrak{Z}$.

ii) (Corollaire 1.1) Avec une hypothèse de *régularité* sur la classe d'inertie de (M, ρ), le résultat précédent est vrai pour tout caractère χ de $\mathfrak{Z}$. On définit pour cela un caractère-distribution sur P à valeurs dans $\mathfrak{Z}$.

iii) (Proposition 3.1) Prenons l'exemple du bloc de l'Iwahori et de $P = ind_K^G(1)$ où K est un compact spécial. Alors $n_P = 1$.

Cet exemple montre que – sous l'hypothèse de régularité – le bloc de l'Iwahori a la propriété suivante : il existe un projectif P_u (égal à $ind_K^G(1)$) tel que $End_G(P_u) \simeq \mathfrak{Z}_u$ (centre du bloc de l'Iwahori) et tel que la réduction de P_u modulo un caractère de son algèbre d'endomorphismes $End_G(P_u)$ est égale dans le groupe de Grothendieck à l'induite parabolique d'un caractère non ramifié du sous-groupe parabolique minimal. On peut conjecturer que cette propriété se généralise à un bloc quelconque de G.

iv) (Théorème 4.1) Pour $G = GL(n)$, on généralise iii) à un bloc quelconque. La partie 2 est destinée à préparer le terrain à la partie 3 en adaptant les idées de la partie 1 dans le langage des types de Bushnell-Kutzko. Elle contient aussi des résultats (Propositions 2.1 et 2.2) qui se déduisent simplement des concepts puissants de [7] mais qu'il a semblé utile de démontrer ici.

L'auteur tient à remercier sa directrice de thèse Marie-France Vignéras pour l'intérêt qu'elle a apporté à ces travaux et les conseils qu'elle a patiemment répété lors de leur rédaction.

0.2. **Notations.** On utilisera les notations suivantes :

- $Mod(G)$ pour la catégorie des représentations complexes lisses de G et $Irr(G)$ pour l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations lisses irréductibles.
- $Mod_f(G)$ pour la catégorie des représentations complexes lisses de longueur finie de G et $R(G)$ pour le groupe de Grothendieck de $Mod_f(G)$ qui est isomorphe au groupe abélien libre de base $Irr(G)$. L'image de $\pi \in Mod_f(G)$ dans $R(G)$ est notée $[\pi]$.
- $Proj_f(G)$ pour la catégorie des représentations complexes lisses projectives de type fini de G et $K(G)$ pour le groupe de Grothendieck de $Proj_f(G)$.
- $X(G)$ pour l'ensemble des caractères non-ramifiés.
- $\mathcal{H}(G)$ pour l'algèbre des mesures localement constantes à support compact que l'on identifiera à l'algèbre de convolution $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ des fonctions lisses à support compact, via le choix d'une mesure de Haar dg.
- $\mathcal{H}(G, H)$ pour l'algèbre des fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ bi-invariantes par le sous-groupe ouvert compact H de G. Plus généralement, si (J, τ) est un couple formé d'un sous-groupe ouvert compact et d'une représentation lisse de celui-ci, on notera selon les conventions de [7] $\mathcal{H}(G, \tau)$ l'algèbre d'entrelacement :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(G,\tau) &= \{\Psi : G \to End_R(E^*),\ \ \Psi(j_1 g j_2) = \check{\tau}(j_1)\Psi(g)\check{\tau}(j_2)\} \\ &= End_G(ind_J^G(\tau))^\circ \end{aligned}$$

  où E^* est le dual de l'espace E de la représentation τ et $\check{\tau}$ est la contragrédiente de τ, le $\circ$ en exposant désignant l'algèbre opposée.
- $i_{M,Q}^G(\rho)$ (resp. $r_{G,Q}^M(\pi)$) pour l'induction parabolique normalisée par rapport à Q (resp. la restriction paraboliqe normalisée par rapport à Q). Ici, Q est un sous-groupe parabolique et M une de ses composantes de Levi.
- Si H est un groupe et σ un automorphisme de H, on notera indifféremment h^σ ou $\sigma(h)$ l'action de σ sur h. Si de plus σ est la conjugaison par un certain w, on pourra encore utiliser la notation whw^{-1}. Si τ est une représentation

de H, on notera τ^σ la représentation de même espace donnée par $\tau^\sigma(x) := \tau(\sigma^{-1}(x))$.

1. Généralités

On note $\mathfrak{Z}$ le centre de la catégorie $Mod(G)$. De manière abstraite, c'est l'anneau des endomorphismes du foncteur identité de $Mod(G)$; il agit donc naturellement sur les G-modules. En particulier, si V est un G-module irréductible, $\mathfrak{Z}$ agit sur V via un caractère $\omega_\pi : \mathfrak{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$: on a alors la partition suivante (en notant $X^*(\mathfrak{Z})$ pour l'ensemble des caractères complexes de $\mathfrak{Z}$) :

$$Irr(G) = \coprod_{\chi \in X^*(\mathfrak{Z})} \{V \in Irr(G),\ \ \omega_\pi = \chi\}$$

induisant une décomposition en somme directe de $R(G)$:

$$R(G) = \bigoplus_{\chi \in X^*(\mathfrak{Z})} R_\chi(G) \tag{1}$$

Plus précisément, on définit une sous-catégorie pleine $Mod_\chi(G)$ de $Mod_f(G)$ en prenant pour objets les $(V, \pi) \in Mod_f(G)$ vérifiant :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \ \forall z \in \mathfrak{Z},\ \ (\pi(z) - \chi(z))^n V = 0$$

On obtient une décomposition :

$$Mod_f(G) \simeq \bigoplus_{\chi \in X^*(\mathfrak{Z})} Mod_\chi(G)$$

induisant la décomposition (1) en prenant les groupes de Grothendieck.

Considérons maintenant le cas de $P \in Proj_f(G)$; on sait ([3, 3.3]) que P est $\mathfrak{Z}$-admissible. Par conséquent, son quotient $P \otimes_{\mathfrak{Z},\chi} \mathbb{C}$ est un G-module de longueur finie ([3, 3.12]) pour tout caractère $\chi : \mathfrak{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$. On obtient donc un morphisme :

$$K(G) \longrightarrow \prod_{\chi \in X^*(\mathfrak{Z})} R_\chi(G) \tag{2}$$

que l'on se propose d'étudier.

1.1. **Décomposition de Bernstein.** Rappelons les résultats suivants de [3] avec les notations de [7, 1] : une paire cuspidale est un couple (M, ρ) avec M un sous-groupe de Levi de G et $\rho \in Irr(M)$ une irréductible cuspidale de M. On considère comme d'habitude les deux relations d'équivalence suivantes sur l'ensemble des paires cuspidales de G :

– La G-conjugaison (définition évidente) : on note $(M, \rho)^G$ la classe de (M, ρ) et $\Psi(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison de paires cuspidales.
– La G-inertie, définie par :

  $$(M, \rho) \sim (M', \rho') \text{ si et seulement si } \exists g \in G \text{ et } \exists \chi \in X(M),\ \ \rho \simeq \chi.\rho'^g$$

  On note $[M, \rho]_G$ la G-classe d'inertie de (M, ρ) et $\mathfrak{S}(G)$ pour l'ensemble des classes d'inertie.

On a une surjection canonique $\Psi(G) \xrightarrow{pr_G} \mathfrak{S}(G)$; la fibre au-dessus de $\mathfrak{s}$ est notée $\Psi_\mathfrak{s}$. On peut énoncer les résultats de [3] comme ceci :

Théorème 1.1. (Bernstein)

- *Il existe une structure de variété algébrique sur* $\Psi(G)$ *et un isomorphisme* $\mathfrak{Z} \simeq \mathcal{O}(\Psi(G))$.
- *Les composantes connexes de* $\Psi(G)$ *sont les fibres de* pr_G *d'où la décomposition en produit d'anneaux intègres :*
$$\mathfrak{Z} = \prod_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)} \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$$
avec $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}} \simeq \mathcal{O}(\Psi_{\mathfrak{s}})$.
- *A la décomposition précédente correspond une décomposition de* $\mathrm{Mod}(G)$ *en produit de blocs :*
$$Mod(G) = \prod_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)} Mod_{\mathfrak{s}}(G)$$
où $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{s}}(G)$ *est la sous-catégorie abélienne indécomposable de* $\mathrm{Mod}(G)$ *dont les objets sont les représentations dont chacun des sous-quotients irréductibles est aussi sous-quotient d'une induite parabolique d'une paire cuspidale de* $\mathfrak{s}$.

Il est intéressant pour la suite de rappeler d'où vient la structure de variété algébrique sur $\Psi(G)$ annoncée par le théorème 1.1. Soit $\mathfrak{s}$ une classe d'inertie et $(M,\rho) \in \mathfrak{s}$; notons $\mathfrak{s}_M = [M,\rho]_M$ la classe de M-inertie de (M,ρ). L'application :
$$\begin{array}{rcl} X(M) & \rightarrow & \Psi_{\mathfrak{s}_M} \\ \chi & \mapsto & (M,\rho\chi)^M \end{array}$$
fait de $\Psi_{\mathfrak{s}_M}$ un espace homogène sous le tore algébrique $X(M)$ et même principal homogène sous un tore quotient de $X(M)$, et munit donc $\Psi_{\mathfrak{s}_M}$ d'une structure de variété algébrique affine. Notons maintenant $W_{\mathfrak{s}_M} = \mathcal{N}_G([M,\rho]_M)/M$ le normalisateur réduit de $\mathfrak{s}_M$ dans G : il agit sur $\Psi_{\mathfrak{s}_M}$ et l'application canonique $\Psi(M) \longrightarrow \Psi(G)$ induit une bijection $\Psi_{\mathfrak{s}} \simeq \Psi_{\mathfrak{s}_M}/W_{\mathfrak{s}_M}$; on en déduit une structure de variété algébrique affine sur $\Psi_{\mathfrak{s}}$ (non nécessairement lisse, mais irréductible) telle que la bijection ci-dessus soit un isomorphisme. En passant aux algèbres de fonctions, on obtient :

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}_M}^{W_{\mathfrak{s}_M}} \tag{3}$$

1.2. **Première étude. Irréductibilité générique.** L'étude du morphisme (2) se réduit avec des notations évidentes à l'étude pour chaque classe d'inertie $\mathfrak{s}$ de :

$$K_{\mathfrak{s}}(G) \xrightarrow{\phi_{\mathfrak{s}}} \prod_{\chi \in X^*(\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}})} R_\chi(G) \tag{4}$$

où on a fait un léger abus de notation pour $R_\chi(G)$.

Fixons $\mathfrak{s}$ une classe d'inertie et $\chi \in X^*(\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}})$ un caractère de $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$.

Fait 1.1. *Il existe un "élément canonique"* r_χ *dans* $R_\chi(G)$.

En effet, d'après la description du théorème 1.1, χ correspond à un point de la variété $\Psi_{\mathfrak{s}}$ (*i.e.* $X^*(\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}) \simeq \Psi_{\mathfrak{s}}$), c'est à dire une classe de conjugaison de paires cuspidales dont on choisit un représentant que l'on note (M_χ, ρ_χ). On choisit un sous-groupe parabolique Q de sous-groupe de Levi M_χ et on pose :

$$r_\chi = [i^G_{M_\chi, Q}(\rho_\chi)]$$

dont on sait qu'il ne dépend pas du sous-groupe parabolique choisi (ni des autres choix effectués).

On peut donc définir le plongement diagonal :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \prod_{\chi \in X^*(\mathfrak{Z}_\mathfrak{s})} R_\chi(G) \\ 1 & \mapsto & (r_\chi)_{\chi \in X^*(\mathfrak{Z}_\mathfrak{s})} \end{array}$$

dont on notera l'image $\mathbb{Z}^{\mathrm{diag}}$.

On peut maintenant traduire la propriété dite d' "irréductibilité générique" de la manière suivante :

Lemme 1.1. *Il existe un ouvert dense $\Omega_\mathfrak{s}$ de $\Psi_\mathfrak{s}$, tel que pour tout χ dans $\Omega_\mathfrak{s}$, r_χ engendre $R_\chi(G)$.*

Considérons alors la projection de (4) sur la partie générique :

$$K_\mathfrak{s}(G) \xrightarrow{\phi_{\Omega_\mathfrak{s}}} \prod_{\chi \in \Omega_\mathfrak{s}} R_\chi(G)$$

et notons $\mathbb{Z}^{\mathrm{diag}}_{\Omega_\mathfrak{s}}$ l'image du plongement diagonal de $\mathbb{Z}$ dans le membre de droite :

Lemme 1.2. $\phi_{\Omega_\mathfrak{s}}(K(G)) \subset \mathbb{Z}^{diag}_{\Omega_\mathfrak{s}}$

Preuve. $\Omega_\mathfrak{s}$ est déterminé par le lemme 1.1 ; soit $P \in Proj_f(G)$ et $\chi \in \Omega_\mathfrak{s}$, il existe $n_\chi \in \mathbb{N}$ tel que $[P \otimes_{\mathfrak{Z},\chi} \mathbb{C}] = n_\chi . r_\chi$. Il s'agit de montrer que $\chi \mapsto n_\chi$ est constante.

D'après [3, 3.9-3.13], il existe un sous-groupe ouvert compact H de G et un idempotent central $e_\mathfrak{s}$ de $\mathcal{H}(G,H)$ tels que :

$$\begin{array}{ccc} Mod_\mathfrak{s}(G) & \to & e_\mathfrak{s}\mathcal{H}(G,H)e_\mathfrak{s} - Mod \\ V & \mapsto & V^H \end{array}$$

soit une équivalence de catégories. De plus, d'après [3, 3.14], $e_\mathfrak{s}\mathcal{H}(G,H)e_\mathfrak{s} \otimes_\mathfrak{Z} \mathcal{O}(\Omega_\mathfrak{s})$ est une algèbre d'Azumaya sur $\mathcal{O}(\Omega_\mathfrak{s})$ dont on note le rang N^2. On a en particulier pour $\chi \in \Omega_\mathfrak{s}$:

$$n_\chi . N = dim_\mathbb{C}(P \otimes_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{s},\chi} \mathbb{C})^H$$

Posons $P^H_\Omega = P^H \otimes_\mathfrak{Z} \mathcal{O}(\Omega_\mathfrak{s})$: par équivalence de catégories et par extension des scalaires, c'est un module projectif sur $e_\mathfrak{s}\mathcal{H}(G,H)e_\mathfrak{s} \otimes_\mathfrak{Z} \mathcal{O}(\Omega_\mathfrak{s})$. D'après [4, 5,ex. 14], una algèbre d'Azumaya est projective sur son centre, donc P^H est aussi projectif sur $\mathcal{O}(\Omega_\mathfrak{s})$: il admet donc un rang (voir paragraphe 1.3 : $\Omega_\mathfrak{s}$ est connexe) qui est égal pour tout $\chi \in \Omega_\mathfrak{s}$ à $dim_\mathbb{C}(P^H_\Omega \otimes_{\mathcal{O}(\Omega_\mathfrak{s}),\chi} \mathbb{C})$ c'est à dire à $dim_\mathbb{C}(P \otimes_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{s},\chi} \mathbb{C})^H$. □

Ce lemme amène aux questions naturelles suivantes : peut-on étendre ce résultat à tout $\Psi_\mathfrak{s}$ (*i.e.* a-t-on $\phi_\mathfrak{s}(K_\mathfrak{s}(G)) \subset \mathbb{Z}^{\mathrm{diag}}$) ? Est-ce que le générateur $(r_\chi)_{\chi \in \Psi_\mathfrak{s}}$ est dans l'image de $K_\mathfrak{s}(G)$?

1.3. **Intermède sur les traces.**

Définition 1.1. Soit A un anneau commutatif, P un A-module projectif de type fini et $u \in End_A(P)$. Alors on définit l'application trace sur $End_A(P)$ comme la composée :

$$Tr : End_A(P) \xrightarrow{\nu^{-1}} P \otimes_A P^* \xrightarrow{\epsilon} A$$

où $P^* = Hom_A(P, A)$, $\epsilon(p \otimes p*) = p^*(p)$ et ν est le morphisme canonique $P \otimes_A P^* \longrightarrow End_A(P)$ dont on voit qu'il est bijectif en réalisant P comme un facteur direct d'un A-module libre de type fini.

On définit alors $\dim_A(P) := Tr(1_P)$. Si P est libre, $\dim_A(P)$ est juste le A-rang de P.

On s'intéresse au cas particulier où A est l'anneau de fonctions d'une variété algébrique complexe. Soit P un A-module projectif de type fini et $u \in End_A(P)$, alors pour tout caractère $\chi : A \longrightarrow \mathbb{C}$, u induit une application $\mathbb{C}$-linéaire u_χ du $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $P_\chi := P \otimes_{A,\chi} \mathbb{C}$. Le diagramme suivant est commutatif ($(P^*)_\chi \simeq P_\chi^*$) :

$$\begin{tikzcd}
End_A(P) \arrow[r] \arrow[d] & P \otimes_A P^* \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "\chi"] \\
End_{\mathbb{C}}(P_\chi) \arrow[r] & P_\chi \otimes_{\mathbb{C}} P_\chi^* \arrow[r] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Cela montre que $Tr_{\mathbb{C}}(u_\chi) = \chi(Tr_A(u))$. En particulier, $\dim_A(P)$ apparaît comme une fonction localement constante. Si A est connexe, c'est le rang projectif (voir [1] par exemple).

Considérons le cas d'un épimorphisme fini $Y \xrightarrow{\pi} X$ de variétés complexes affines tel que l'inclusion $A \hookrightarrow B$ des anneaux de fonctions fasse de B un A-module projectif de type fini. Soit $\chi \in X$ un caractère complexe de A, alors le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $B \otimes_{A,\chi} \mathbb{C}$ est un B-module qui se décompose en somme directe

$$B \otimes_{A,\chi} \mathbb{C} = \bigoplus_{\overline{\chi} \in \pi^{-1}(\chi)} (B \otimes_{A,\chi} \mathbb{C})_{\overline{\chi}}$$

où $(B \otimes_{A,\chi} \mathbb{C})_{\overline{\chi}}$ est la partie $\overline{\chi}$-isotypique (*i.e.* dont tous les sous-quotients irréductibles sont isomorphes à $\overline{\chi}$) du B-module $B \otimes_{A,\chi} \mathbb{C}$. Notons $m_{\overline{\chi}}$ sa dimension complexe : on aura besoin plus loin du fait suivant :

Fait 1.2. *Pour tout $b \in B$ et tout $\chi \in X$,*

$$\chi(Tr_A(b)) = \sum_{\overline{\chi} \in \pi^{-1}(\chi)} m_{\overline{\chi}} \overline{\chi}(b)$$

1.4. **Classes d'inertie régulières. Caractères.** Soit $\mathfrak{s}$ une classe d'inertie, (M, ρ) une paire cuspidale dans $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}_M = [M, \rho]_M$ sa M-classe d'inertie, rappelons que le morphisme canonique de variétés $\Psi_{\mathfrak{s}_M} \longrightarrow \Psi_{\mathfrak{s}}$ correspond à un morphisme $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}} \longrightarrow \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}_M}$ induisant l'isomorphisme (3). La définition suivante ne dépend pas du "point base" (M, ρ) :

Définition 1.2. On dit que la classe d'inertie $\mathfrak{s}$ est régulière si $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}_M}$ est un module projectif (de type fini) sur $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}_M}^{W_{\mathfrak{s}_M}}$.

Lemme 1.3. *Soit $\mathfrak{s}$ une classe d'inertie régulière et $P \in Proj_f(G)_{\mathfrak{s}}$. Alors pour tout sous-groupe ouvert compact H, P^H est un $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$-module projectif de type fini.*

Preuve. Le type fini vient de [3, 3.3]. Pour la projectivité on utilise un progénérateur classique du bloc $Mod_{\mathfrak{s}}(G)$: choisissons un "point base" (M, ρ) et notons $\chi_{un} = \mathcal{O}(X(M))$ l'algèbre de fonctions du tore $X(M)$ munie de l'action canonique de M (appelée caractère universel dans [3]). Choisissons un sous-groupe parabolique Q contenant M et notons $P_{\mathfrak{s}} = i_{M,Q}^G(\rho \otimes \chi_{un})$. Alors tout projectif de type fini dans $Mod_{\mathfrak{s}}(G)$ est facteur direct d'une somme finie de copies de $P_{\mathfrak{s}}$. Il suffit donc de montrer que $P_{\mathfrak{s}}^H$ est $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$-projectif pour tout H. Par les formules de Mackey, on a :

$$\begin{aligned} P_{\mathfrak{s}}^H \quad \simeq \quad & \bigoplus_{g \in P\backslash G/H} (\rho \otimes \chi_{un})^{P \cap H^g} \\ & \bigoplus_{g \in P\backslash G/H} \rho^{M \cap H^g} \otimes \chi_{un} \end{aligned}$$

ce qui montre que $P_{\mathfrak{s}}^H$ est libre sur χ_{un} donc $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$-projectif par hypothèse de régularité. (En effet χ_{un} est clairement libre sur $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}_M}$ puisque celle-ci est l'algèbre des fonctions régulières d'un tore quotient de $X(M)$). $\square$

Ce lemme montre que pour tout $P = (V, \pi) \in Proj_f(G)_{\mathfrak{s}}$, où $\mathfrak{s}$ est une classe d'inertie régulière, on peut définir un caractère $\Theta_P \in \mathcal{H}(G)^* \otimes \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$ à valeurs dans le centre $\mathfrak{Z}$ du bloc $Mod_{\mathfrak{s}}(G)$ par la formule :

$$\forall f \in \mathcal{H}(G, H), \;\; \Theta_P(f) := Tr_{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}}(\pi(f)_{|V^H})$$

On alors la propriété suivante :

Proposition 1.1. *Soit $\mathfrak{s}$ une classe d'inertie régulière et $P, Q \in Proj_f(G)_{\mathfrak{s}}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\Theta_P = \Theta_Q$

ii) $[P \otimes_{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}, \chi} \mathbb{C}] = [Q \otimes_{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}, \chi} \mathbb{C}]$ *dans le groupe $R(G)$ pour tout caractère complexe $\chi : \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}} \longrightarrow \mathbb{C}$.*

iii) $[P \otimes_{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}, \chi} \mathbb{C}] = [Q \otimes_{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}, \chi} \mathbb{C}]$ *dans le groupe $R(G)$ pour tout caractère complexe dans un ensemble dense de $\Psi_{\mathfrak{s}}$.*

Preuve. Supposons i) vrai. Alors d'après les propriétés de la trace (voir 1.3), les caractères des représentations de longueur finie $P \otimes_{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}, \chi} \mathbb{C}$ et $Q \otimes_{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}, \chi} \mathbb{C}$ sont égaux, ce qui est équivalent à ii) d'après l'indépendance linéaire des caractères. Le fait que ii) implique iii) est évident. Le fait que iii) implique i) vient du même argument que précédemment associé au fait que deux fonctions régulières d'une variété complexe sont égales si et seulement si elles le sont sur un ensemble dense. $\square$

Voici un exemple de Θ_P : considérons le même progénérateur $P_{\mathfrak{s}} = i_{M,Q}^G(\rho \otimes \chi_{un})$ que dans la preuve du lemme 1.3. D'après cette preuve, $P_{\mathfrak{s}}^H$ est libre de type fini sur $\chi_{un} = \mathcal{O}(X(M))$: on peut donc définir un caractère $\overline{\Theta}_{P_{\mathfrak{s}}}$ à valeurs dans χ_{un}. Ce caractère peut se calculer par la formule de Van Dijck et on a pour tout caractère $\overline{\chi}$ non ramifié de M :

$$\overline{\chi}(\overline{\Theta}_{P_{\mathfrak{s}}}) = \Theta_{i_{M,Q}^G(\rho.\overline{\chi})}$$

où le membre de droite désigne le caractère ordinaire de la représentation admissible $i_{M,Q}^G(\rho.\overline{\chi})$. D'autre part on a :

$$\Theta_{P_{\mathfrak{s}}} = Tr_{\chi_{un}/\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}}(\overline{\Theta}_{P_{\mathfrak{s}}})$$

En particulier, d'après le fait 1.2 et en remarquant que pour tout $\chi \in \Psi_{\mathfrak{s}}$, $\Theta_{i_{M,Q}^G(\rho.\overline{\chi})}$ est indépendant du choix de $\overline{\chi}$ dans la préimage de χ par $X(M) \longrightarrow \Psi_{\mathfrak{s}_M} \longrightarrow \Psi_{\mathfrak{s}}$, on a :

$$\chi(\Theta_{P_{\mathfrak{s}}}) = N.\Theta_{i_{M,Q}^G(\rho.\overline{\chi})}$$

où N est le rang projectif de χ_{un} en tant que $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$-module.

Corollaire 1.1. *Soit $\mathfrak{s}$ une classe d'inertie régulière : $\phi_{\mathfrak{s}}(K(G)) \subset \mathbb{Z}^{diag}$*

Preuve. D'après le calcul ci-dessus, $\phi_{\mathfrak{s}}(P_{\mathfrak{s}}) = N.(r_\chi)_{\chi\in\Psi_{\mathfrak{s}}}$. Soit $P \in Proj_f(G)$, le lemme 1.2 montre qu'il existe un entier N_P tel que $[P \otimes_{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}},\chi} \mathbb{C}] = N_P r_\chi = \frac{N_P}{N}[P_{\mathfrak{s}} \otimes_{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}},\chi} \mathbb{C}]$ pour χ générique, et la proposition 1.1 montre que c'est vrai pour tout χ. $\square$

Remarque . A propos de régularité : l'exemple de [3, 2.18] montre que pour $G = GL(n, H)$ où H est une algèbre à division sur F, toutes les classes d'inertie sont régulières.

Au contraire [3, 2.19] fournit un exemple de non régularité : c'est la classe d'inertie correspondant au bloc de l'Iwahori pour $G = SL(n, F)$. Le bloc de l'Iwahori est l'objet de l'étude d'une section ultèrieure ; on déduira la classification des groupes déployés pour lesquels ce bloc est régulier de [13].

2. Bloc décrit par un type

2.1. **Centres...** Soit $\mathfrak{s}$ une classe d'inertie, $(M, \rho) \in \mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}_M = [M, \rho]_M$. On suppose qu'il existe un $\mathfrak{s}$-type (J, τ) au sens de [7] couvrant un $\mathfrak{s}_M$-type (J_M, τ_M). Rappelons que ceci entraine (entre autres) l'existence pour chaque sous-groupe parabolique Q de sous-groupe de Levi M d'un morphisme d'algèbres : $\mathcal{H}(M, \tau_M) \xrightarrow{t_Q} \mathcal{H}(G, \tau)$ rendant le diagramme de foncteurs suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} Mod_{\mathfrak{s}}(G) \arrow[r, "\sim", "\mathfrak{M}_\tau"'] & \mathcal{H}_G - Mod \\ Mod_{\mathfrak{s}_M}(M) \arrow[u, "i_{M,\overline{Q}}^G"] \arrow[r, "\sim", "\mathfrak{M}_{\tau_M}"'] & \mathcal{H}_M - Mod \arrow[u, "\mathcal{H}_G\otimes_{\mathcal{H}_M,t_Q}-."'] \end{tikzcd} \tag{5}$$

que l'on explique brièvement :

- On a noté $\mathcal{H}_G = \mathcal{H}(G, \tau)$ et $\mathcal{H}_M = \mathcal{H}(M, \tau_M)$. Cette dernière est commutative : (voir [7, 5.5]).
- Les flèches horizontales sont des équivalences de catégories définies par : $\mathfrak{M}_\tau(V) = Hom_J(\tau, V)$ et $\mathfrak{M}_{\tau_M}(U) = Hom_{J_M}(\tau_M, U)$.

Remarquons que les équivalences de catégories $\mathfrak{M}_\tau$ et $\mathfrak{M}_{\tau_M}$ induisent des isomorphismes $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}} \xrightarrow{m_\tau} \mathcal{Z}(\mathcal{H}_G)$ et $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}_M} \xrightarrow{m_{\tau_M}} \mathcal{H}_M$. D'autre part, soit $n \in \mathcal{N}_G(M)$, on sait (voir [10, 1.9]) que n normalise $\mathfrak{s}_M$ si et seulement si $ind_{J_M}^M(\tau_M)^n \simeq ind_{J_M}^M(\tau_M)$. Notons donc V_{un} l'espace sous-jacent à $\rho_{un} = ind_{J_M}^M(\tau_M)$: pour chaque $w \in W_{\mathfrak{s}_M}$ on peut choisir un représentant n_w dans $\mathcal{N}_G(M)$ et un élément $\overline{w} \in Aut_{\mathbb{C}}(V_{un})$ réalisant l'isomorphisme entre $\rho_{un}^{n_w}$ et ρ_{un}. Ce choix est unique modulo multiplication par un inversible de $\mathcal{H}_M$. On obtient un automorphisme d'algèbre :

$$\begin{array}{cccc} w: & End_M(\rho_{un}) & \to & End_M(\rho_{un}) \\ & \Phi & \mapsto & \overline{w}\Phi\overline{w}^{-1} \end{array}$$

qui ne dépend ni du choix de n_w ni de celui de $\overline{w}$. Ceci définit une action de $W_{\mathfrak{s}_M}$ sur $\mathcal{H}_M = End_M(\rho_{un})$ et l'isomorphisme m_{τ_M} est $W_{\mathfrak{s}_M}$-équivariant. Pour un caractère χ de $\mathcal{H}_M$ (identifié à un élément de $\Psi_{\mathfrak{s}_M}$ via m_{τ_M}), on note $\rho_\chi := \rho_{un} \otimes_{\mathcal{H}_M,\chi} \mathbb{C}$: on a pour tout $w \in W_{\mathfrak{s}_M}$:

$$w(\rho_\chi) \simeq \rho_{\chi^w}$$

La proposition qui suit paraitra peut-être évidente à qui est familier de [3] mais on en donne quand-même une démonstration (en traduisant dans le langage des algèbres les idées de [3]). On a d'abord besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soit Q un sous-groupe parabolique contenant M, alors $\mathcal{H}_G$ est un module libre de rang $|W_{\mathfrak{s}_M}|$ sur $\mathcal{H}_M$ via le morphisme t_Q.*

Preuve. Remarquons d'abord que $\mathcal{H}_G$ est $\mathcal{H}_M$-projectif via t_Q : le diagramme (5) est équivalent au diagramme obtenu en changeant la flèche verticale de gauche par $i_{M,Q}^G$ et celle de droite par $Hom_{\mathcal{H}_M,t_Q}(\mathcal{H}_G,.)$ (voir [7]). Comme l'induction parabolique est un foncteur exact, on en déduit la projectivité. Le rang projectif se déduit de la démonstration de [7, 11.5] (qui n'utilise pas les hypothèses [7, 11.2]) : il est égal à $|W_{\mathfrak{s}_M}|$.

On sait par ailleurs que $\mathcal{H}_M$ est une algèbre de polynômes de Laurent ; sur de telles algèbres les projectifs de type fini sont libres (voir [11, V.4.10]). □

Proposition 2.1. *Soit Q un sous-groupe parabolique contenant M, alors t_Q induit un isomorphisme*

$$t_Q : \mathcal{H}_M^{W_{\mathfrak{s}_M}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(\mathcal{H}_G)$$

Cet isomorphisme est en fait indépendant du choix de Q.

Preuve. Pour tout caractère χ de $\mathcal{H}_M$, on pose $\mathcal{I}_Q(\chi) = \mathcal{H}_G \otimes_{\mathcal{H}_M,t_Q,\chi} \mathbb{C}$. On aura besoin des faits suivants :

i) Le morphisme $\mathcal{H}_G \longrightarrow \prod_{\chi\in\Omega} \mathcal{I}_Q(\chi)$ est injectif si Ω est dense dans $\Psi_{\mathfrak{s}_M}$. (Vient du lemme 2.1).

ii) $Res_{\mathcal{H}_G,t_Q}^{\mathcal{H}_M}(\mathcal{I}_Q(\chi)) \simeq \bigoplus_{w\in W_{\mathfrak{s}_M}} \chi^w$ pour tout χ en position générale (*i.e* $\mathrm{Stab}_W(\chi) = \{1_W\}$). Pour χ quelconque, il subsiste une égalité dans le groupe de Grothendieck des $\mathcal{H}_M$-modules de dimension finie. (Vient de la propriété équivalente pour les groupes : celle-ci fait intervenir $\mathcal{N}_G(M)/M$ tout entier ; il faut projeter sur $Mod_{\mathfrak{s}_M}(M)$ pour obtenir celle qui nous intéresse).

iii) $\mathcal{I}_Q(\chi)$ est irréductible pour χ générique.

iv) Pour tout couple de sous-groupes paraboliques Q et Q', $[\mathcal{I}_Q(\chi)] = [\mathcal{I}_{Q'}(\chi)]$ dans le groupe de Grothendieck des $\mathcal{H}_G$-modules de dimension finie. (Vient encore une fois de la propriété semblable pour les groupes : voir [2]). En particulier, on déduit de iii) que pour χ générique, l'égalité vient en fait d'un isomorphisme de G-modules.

Montrons d'abord que $t_Q(\mathcal{H}_M^{W_{\mathfrak{s}_M}}) \subset \mathcal{Z}(\mathcal{H}_G)$. Soit $x \in \mathcal{H}_M^W$, et $f \in \mathcal{H}_G$: d'après ii) et l'invariance de x par W, on voit que pour χ en position générale, $t_Q(x)$ agit à gauche sur $\mathcal{H}_G \otimes_{\mathcal{H}_M, t_Q, \chi} \mathbb{C}$ par multiplication par $\chi(x)$, ce qui montre que l'image de $t_Q(x)f - ft_Q(x)$ dans $\mathcal{I}_Q(\chi)$ est nulle pour un tel χ. Par i), on en déduite que $t_Q(x)f - ft_Q(x) = 0$ et donc $t_Q(x) \in \mathcal{Z}(\mathcal{H}_G)$.

Soit maintenant $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{H}_G)$. Soit $M_B(z)$ la matrice de la multiplication par z dans une $t_Q(\mathcal{H}_M)$-base B de $\mathcal{H}_G$. D'après iii), la réduction de cette matrice modulo χ est scalaire pour χ générique : elle est donc elle-même scalaire, égale à un certain $t_Q(x)$. D'après ii) il est clair que x doit être invariant par W, la surjectivité est donc montrée.

Montrons maintenant que l'isomorphisme ne dépend pas du choix de Q : soit Q' un autre sous-groupe parabolique contenant M et $x \in \mathcal{H}_M^W$, alors d'après iv) on voit que pour χ générique, l'image de $t_Q(x) - t_{Q'}(x)$ dans $\mathcal{I}_Q(\chi)$ est nulle, donc d'après i), $t_Q(x) = t_{Q'}(x)$. $\square$

Notation . On notera t l'isomorphisme de la proposition ci-dessus. Il s'inscrit dans un diagramme commutatif d'isomorphismes

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}} \arrow[r, "m_\tau"] \arrow[d, "(3)"] & \mathcal{Z}(\mathcal{H}_G) \\ \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}_M}^{W_{\mathfrak{s}_M}} \arrow[r, "m_{\tau_M}"] & \mathcal{H}_M^{W_{\mathfrak{s}_M}} \arrow[u, "t"'] \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de gauche est l'isomorphisme (3).

La proposition suivante ne sert pas dans la suite ; elle montre que lorsque les sous-groupes paraboliques Q et Q' sont conjugués par un élément de $W_{\mathfrak{s}_M}$, alors les morphismes t_Q et $t_{w(Q)}$ sont "conjugués" dans $\mathcal{H}_G$:

Proposition 2.2. *Soit $w \in W_{\mathfrak{s}_M}$, alors il existe $T_w \in \mathcal{H}_G^*$ tel que :*

$$\forall x \in \mathcal{H}_M, \ \ t_{w(Q)}(x) = T_w . t_Q(w^{-1}(x)). T_w{}^{-1}$$

Preuve. On passe encore une fois par les représentations de groupes : on sait que pour tout $\sigma \in Mod(M)$ et tout $w \in \mathcal{N}_G(M)$ il y a un isomorphisme canonique évident $i_{M,Q}^G(\sigma) \simeq i_{M,w(Q)}^G(w(\sigma))$. Par le diagramme suivant, où on note toujours $\rho_{un} = ind_{J_M}^M(\tau_M)$:

$$\begin{tikzcd} i_{M,\overline{Q}}^G(\rho_{un}) \arrow[r, equal] & i_{M,w(\overline{Q})}^G(\rho_{un}^w) \\ i_{M,w(\overline{Q})}^G(\rho_{un}) \arrow[u, dashed, "\Phi_w"] \arrow[ur, "\overline{w}^{-1}"] & \end{tikzcd}$$

on définit un isomorphisme de G-modules $i^G_{M,w(\overline{Q})}(\rho_{un}) \xrightarrow{\Phi_w} i^G_{M,\overline{Q}}(\rho_{un})$ qui est de plus $\mathcal{H}_M$-équivariant si on fait agir $x \in \mathcal{H}_M$ via $i^G_{M,w(\overline{Q})}(x)$ sur le membre de gauche et via $i^G_{M,\overline{Q}}(x^w)$ sur le membre de droite.

Appliquons maintenant le foncteur $\mathfrak{M}_\tau$: en utilisant $\rho_{un\tau_M} = \mathcal{H}_M$ et le diagramme commutatif 5, on obtient un isomorphisme

$$\mathcal{H}_G \xrightarrow{\mathfrak{M}_\tau(\Phi_w)} \mathcal{H}_G$$

de $(\mathcal{H}_G, \mathcal{H}_M)$-bimodules où l'action de $\mathcal{H}_G$ est par multiplication à gauche et celle de $\mathcal{H}_M$ par multiplication à droite par $t_{w(Q)}(x)$ sur le membre de gauche et par $t_Q(x^{w^{-1}})$ sur le membre de droite. Un tel isomorphisme est nécessairement la multiplication par un $T_w \in \mathcal{H}_G^*$ vérifiant :

$$t_{w(Q)}(x).T_w = T_w.t_Q(x^{w^{-1}})$$

□

2.2. **Caractères.** On continue avec les mêmes notations.

Lemme 2.2. – *Pour tout sous-groupe ouvert compact H de M, $ind_{J_M}^M(\tau_M)^H$ est un $\mathcal{H}_M$-module libre de type fini.*

– *Pour tout sous-groupe ouvert compact H de G et tout sous-groupe parabolique Q de Levi M, $ind_J^G(\tau)^H$ est libre de type fini pour l'action de $\mathcal{H}_M$ via $\mathcal{H}_M \xrightarrow{t_Q} \mathcal{H}_G$.*

Preuve. Pour le premier point, on peut utiliser le lemme 1.3 puisque $\mathfrak{s}_M$ est clairement une M-classe d'inertie régulière et $ind_{J_M}^M(\tau_M)$ est M-projectif. Ceci donne la projectivité et le type fini ; la liberté vient encore de [11, V.4.10].

D'autre part, on sait qu'il existe un isomorphisme :

$$ind_J^G(\tau) \xrightarrow{\sim} i^G_{M,\overline{Q}}(ind_{J_M}^M(\tau_M)) \tag{6}$$

qui est équivariant pour l'action de $\mathcal{H}_M$ via t_Q sur le membre de gauche et par induction sur le membre de droite (voir [10]). Ce morphisme avec une décomposition de Mackey semblable à celle de la démonstration du lemme 1.3 montre la deuxième assertion. □

On peut donc définir un caractère $\Theta_{\mathfrak{s}_M}$ du M-module ρ_{un} à valeurs dans $\mathcal{H}_M$ et qui correspond via m_{τ_M} au $\Theta_{\rho_{un}}$ à valeurs dans $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}_M}$ défini dans la première partie.

De même, on peut définir pour chaque sous-groupe parabolique Q un caractère $\overline{\Theta}_{\mathfrak{s}}^Q$ de la représentation $ind_J^G(\tau)$ à valeurs dans $\mathcal{H}_M$.

Lemme 2.3. – *$\overline{\Theta}_{\mathfrak{s}}^Q$ est indépendant de Q (notation $\overline{\Theta}_{\mathfrak{s}}$). De plus, il est à valeurs dans $\mathcal{H}_M^{W_\mathfrak{s}}$.*

– *Si la classe d'inertie $\mathfrak{s}$ est régulière,*

$$\begin{aligned} \Theta_{ind_J^G(\tau)} &= t(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_M/\mathcal{H}_M^W}\overline{\Theta}_{\mathfrak{s}}) \\ &= |W_{\mathfrak{s}_M}| t(\overline{\Theta}_{\mathfrak{s}}) \end{aligned}$$

en identifiant toujours $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$ et $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_G)$ via m_τ.

Preuve. L'indépendance du parabolique vient de ce que pour tout caractère χ de $\mathcal{H}_M$, on a par la $\mathcal{H}_M$-équivariance de (6) :

$$\chi(\overline{\Theta}_{\mathfrak{s}}^{Q}) = \Theta_{i_{M,Q}^G(\rho_\chi)} = \Theta_{i_{M,Q'}^G(\rho_\chi)} = \chi(\overline{\Theta}_{\mathfrak{s}}^{Q'})$$

où les deux Θ du milieu désignent les caractères "ordinaires" des représentations admissibles en indice. Pour voir que les valeurs de $\overline{\Theta}_{\mathfrak{s}}$ sont invariantes par $W_{\mathfrak{s}_M}$, on écrit de même :

$$\chi^w(\overline{\Theta}_{\mathfrak{s}}) = \Theta_{i_{M,Q}^G(w(\rho_\chi))} = \Theta_{i_{M,Q}^G(\rho_\chi)} = \chi(\overline{\Theta}_{\mathfrak{s}})$$

pour tout $w \in W_{\mathfrak{s}_M}$.

La seconde assertion vient de ce que lorsque la classe est régulière, le rang de $\mathcal{H}_M$ sur $\mathcal{H}_M^{W_{\mathfrak{s}_M}}$ est $|W_{\mathfrak{s}_M}|$. □

2.3. **Formules classiques.** La formule de Van Dijk ([14]) pour les induites paraboliques et la formule de Sally-Frobenius ([12]) pour les induites à support compact admissibles se généralisent simplement en des formules pour $\Theta_{\mathfrak{s}_M}$ ou $\overline{\Theta}_{\mathfrak{s}}$.

Notation . Fixons un sous-groupe ouvert compact spécial K de G ; pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ on définit :

$$f_K(x) = \int_K f(kxk^{-1})dk$$

Si Q est un sous-groupe parabolique et $dq = dm.dn$ est une mesure de Haar sur Q, on note comme Harish-Chandra :

$$f^{(Q)}(m) = \delta_P{}^{\frac{1}{2}}(m) \int_N f(mn)dn$$

On supposera par la suite que $\mathrm{Vol}(K, dg) = \mathrm{Vol}(K \cap Q, dq) = 1$.

Proposition 2.3. *Pour tout sous-groupe parabolique Q de sous-groupe de Levi M, on a :*

$$\overline{\Theta}_{\mathfrak{s}}(f) = \Theta_{\mathfrak{s}_M}(f_K{}^{(Q)})$$

Preuve. La démonstration est exactement la même que celle de [14] en utilisant l'isomorphisme $\mathcal{H}_M$-équivariant (6). □

La suite de cette section est consacrée à l'adaptation de la formule de Frobenius pour les caractères induits ; cela ne sera pas utilisé par la suite.

Notation . Rappelons ici le contexte de [7, (5.5)] concernant le $[M, \rho]_M$-type cuspidal (J_M, τ_M) et dans lequel nous nous plaçons dorénavant :

- l'ensemble d'entrelacement $\mathcal{I}_M(\tau_M) := \widetilde{J_M}$ de τ_M dans M est un sous-groupe ouvert compact modulo le centre de M et tel que $J_M = \widetilde{J_M} \cap M^0$.
- il existe une extension $\widetilde{\tau_M}$ de τ_M à $\widetilde{J_M}$ telle que $\rho \simeq ind_{\widetilde{J_M}}^M(\widetilde{\tau_M})$.

Dans un tel contexte, on a un isomorphisme

$$I_\rho : \ \mathbb{C}[\widetilde{J_M}/J_M] \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_M \tag{7}$$

(qui n'est pas canonique puisqu'il vient de l'isomorphisme

$$ind_{J_M}^M(\tau_M) \simeq ind_{\widetilde{J_M}}^M(\widetilde{\tau_M} \otimes \mathbb{C}[\widetilde{J_M}/J_M]) \tag{8}$$

et dépend donc du prolongement $\widetilde{\tau_M}$ de τ_M, c'est à dire du "point base" ρ).

Lemme 2.4. *Soit H un sous-groupe ouvert compact de M, on pose*

$$\Gamma_H = \{x \in M, \ \ \tau_M^{J \cap H^x} \neq 0\}$$

Alors, $\widetilde{J_M}\backslash\Gamma_H$ est fini.

Preuve. Appliquons les formules de Mackey en utilisant (8) :

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}_{J_M}^M(\tau_M)^H &\simeq \bigoplus_{x \in \widetilde{J_M}\backslash M/H} (\widetilde{\tau_M} \otimes \mathbb{C}[\widetilde{J_M}/J_M])^{\widetilde{J_M}\cap H^x} \\ &\simeq \bigoplus_{x \in \widetilde{J_M}\backslash M/H} \tau_M^{J_M \cap H^x} \otimes \mathbb{C}[\widetilde{J_M}/J_M] \end{aligned}$$

On en déduit : $\rho^H \simeq \bigoplus_{x\in\widetilde{J_M}\backslash M/H} \tau_M^{J_M\cap H^x}$ et par admissibilité de ρ le lemme annoncé. □

On définit maintenant la fonction $\lambda_\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(G) \otimes \mathbb{C}[\widetilde{J_M}/J_M]$ lisse à support compact et à valeurs dans $\mathbb{C}[\widetilde{J_M}/J_M]$ par :

$$\lambda_\rho(x) = \begin{cases} \mathrm{Tr}_{\widetilde{\tau_M}}(x).\overline{x} & \text{si } x \in \widetilde{J_M} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $Tr_{\widetilde{\tau_M}}$ désigne le caractère de la $\widetilde{J_M}$-représentation de dimension finie $\widetilde{\tau_M}$ et $\overline{x}$ est l'image de $x \in \widetilde{J_M}$ dans $\mathbb{C}[\widetilde{J_M}/J_M]$. On désignera par la même lettre λ_ρ la distribution $\lambda_\rho.dm$ à valeurs dans $\mathbb{C}[\widetilde{J_M}/J_M]$ et pour tout $x \in M$, λ_ρ^x est la conjuguée de λ_ρ par x définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(G), \ \ \lambda_\rho^x(f) := \int_M f(x.m.x^{-1})\lambda_\rho(m)dm$$

Proposition 2.4. *Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$, alors on a la formule suivante où la somme est en fait finie :*

$$\Theta_{\mathfrak{s}_M}(f) = I_\rho\left(\sum_{x\in\widetilde{J_M}\backslash M} \lambda_\rho^x(f)\right)$$

Preuve. C'est essentiellement la même que celle de [12] ; le centre y est supposé compact mais on pallie ici l'inconvénient d'un centre non compact en considérant des caractères à valeurs dans ce centre. □

3. Bloc de l'Iwahori

Cette partie est un cas particulier de la partie précédente dans laquelle un rôle intéressant est joué par les représentations sphériques. On supposera pour simplifier les notations que G est déployé mais cela n'a aucune incidence sur les résultats.

3.1. **Préliminaires.** On fixe un tore maximal déployé T de groupe de Weyl W, dont on note T^0 le sous-groupe compact maximal, et un sous-groupe ouvert compact maximal K de G fixant un point spécial de l'appartement associé à T. On choisit un Iwahori I et on note B le sous-groupe de Borel associé à I dans ce contexte.

On note $\mathfrak{u}$ la classe d'inertie $[T,1]_G$; il est connu que $(I,1)$ est un $\mathfrak{u}$-type. Voici les correspondances avec les notations de la partie précédente :

$$\begin{array}{rcl} (M,\rho) & \longleftrightarrow & (T,1) \\ \mathcal{H}(G,\tau) & \longleftrightarrow & \mathcal{H}(G,I) \\ (J_M,\tau_M) & \longleftrightarrow & (T^0,1) \\ \mathcal{H}(M,\tau_M) & \longleftrightarrow & \mathcal{H}(T,T^0) \\ W_{\mathfrak{s}_M} & \longleftrightarrow & W \\ t_Q & \longleftrightarrow & t_B \\ \Theta_{\mathfrak{s}_M},\ \overline{\Theta}_{\mathfrak{s}} & \longleftrightarrow & \Theta_{T^0},\ \overline{\Theta}_{\mathfrak{u}} \\ (\widetilde{J_M},\widetilde{\tau_M}) & \longleftrightarrow & (T,1) \\ \mathbb{C}[\widetilde{J_M}/J_M] & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[T/T^0] \end{array}$$

On fixe un isomorphisme W-équivariant $\mathcal{H}(T,T^0) \simeq \mathbb{C}[T/T^0]$, ce qui n'est en général pas possible dans le contexte général de la partie précédente à moins que $W_{\mathfrak{s}_M}$ ne normalise $\widetilde{J_M}$. On note toujours $t:\ \mathbb{C}[T/T^0]^W \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(\mathcal{H}(G,I))$ l'isomorphisme obtenu par restriction de l'un queconque des $t_{B'}$ avec B' un sous-groupe de Borel contenant T. On identifiera $\mathcal{Z}(\mathcal{H}(G,I))$ avec le centre $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{u}}$ du bloc de l'Iwahori.

3.2. **Régularité.** L'hypothèse de régularité de la classe d'inertie $\mathfrak{u}$ s'énonce :

$$\mathbb{C}[T/T^0] \text{ est projectif de type fini sur } \mathbb{C}[T/T^0]^W.$$

Soit $\check{G}$ le dual de Langlands de G et $\check{T}$ le tore maximal de $\check{G}$ dual de T (de même groupe de Weil W), alors on a $\mathbb{C}[T/T^0] \simeq \mathcal{O}(\check{T})$ et $\mathbb{C}[T/T^0]^W \simeq \mathcal{O}(\check{T})^W$. L'étude de l'extension $\mathcal{O}(\check{T})^W \subset \mathcal{O}(\check{T})$ dans [13] se traduit par la classification suivante (rappelons que G est déployé) :

Théorème 3.1. (Pittie-Steinberg) $\mathfrak{u}$ *est régulière si et seulement si la composante semisimple de* $\check{G}$ *est un produit de facteurs simples simplement connexes ou de type* SO_{2n+1}.

On suppose à partir de maintenant que $\mathfrak{u}$ est régulière. Rappelons (lemme 1.3) que l'on peut alors associer à chaque projectif de type fini de $Mod_{\mathfrak{u}}(G)$ un caractère à valeurs dans le centre $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{u}}$ de $Mod_{\mathfrak{u}}(G)$. On notera en particulier Θ_I celui de $ind_I^G(1)$. Rappelons les relations suivantes (2.2,2.3) :

- $\Theta_I = |W| t(\overline{\Theta}_{\mathfrak{u}})$
- $\overline{\Theta}_{\mathfrak{u}}(f) = \Theta_{T^0}(f_K{}^B)$, $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$.
- $\Theta_{T^0}(h) = \sum_{x\in T/T^0} \left(\int_{x.T^0} h(t)dt\right) x$, $\forall h \in \mathcal{C}_c^\infty(T)$

3.3. **Partie sphérique.** Toujours sous l'hypothèse de régularité de $\mathfrak{u}$, on note Θ_K le caractère à valeurs dans $\mathfrak{Z}_\mathfrak{u}$ du projectif de type fini $ind_K^G(1)$ défini grâce au lemme 1.3.

Proposition 3.1. – *$\Theta_I = |W|.\Theta_K$ où $|W|$ désigne le cardinal de W.*
- *On a $\phi_\mathfrak{u}(ind_K^G(1)) = (r_\chi)_{\chi\in\Psi_\mathfrak{u}}$, ce qui se reformule en :*
- *Pour tout caractère χ du centre $\mathfrak{Z}_\mathfrak{u} \simeq \mathcal{Z}(\mathcal{H}(G,I))$ identifié via t à $\mathbb{C}[T/T^0]^W$ et tout prolongement $\widetilde{\chi}$ de χ à $\mathbb{C}[T/T^0]$ vu comme représentation lisse de T, on a :*
$$[ind_K^G(1) \otimes_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{u},\chi} \mathbb{C}] = [i_{T,B}^G(\widetilde{\chi})]$$
où la notation $[.]$ désigne l'image d'un G-module de longueur finie dans le groupe de Grothendieck de G.

Preuve. On sait d'après le corollaire 1.1 qu'il existe $n_K \in \mathbb{N}$ tel que
$$\phi_\mathfrak{u}(ind_K^G(1)) = n_K.(r_\chi)_{\chi\in\Psi_\mathfrak{u}}$$
Chacune des trois assertions de la proposition est équivalente à dire que $n_K = 1$. Il suffit de calculer n_K en un seul caractère pour démontrer cette dernière égalité. On donne ici une démonstration pour χ W-régulier dans le langage des groupes p-adiques, mais on peut trouver une démonstration sous une hypothèse plus faible (χ "spécial") dans [9] dans le langage des algèbres de Hecke.
- Pour χ caractère de $\mathbb{C}[T/T^0]$, on notera $M_\chi = \mathbb{C}[T/T^0] \otimes_{\mathbb{C}[T/T^0]^W,\chi} \mathbb{C}$ et on le considèrera comme une représentation lisse de T. Les caractères de $\mathbb{C}[T/T^0]$ qui apparaissent dans M_χ sont les prolongements de χ à $\mathbb{C}[T/T^0]$. Plus précisément, soit $\widetilde{\chi}$ un de ces prolongements, alors dans le groupe de Grothendieck de T, on a :
$$[M_\chi]_T = \sum_{w\in W} [\widetilde{\chi}^w]_T$$
- Soit B' un autre sous-groupe de Borel contenant T, l'égalité ci-dessus montre que
$$[M_\chi]_T = [r_{G,B'}^T \circ i_{T,B}^G(\widetilde{\chi})]_T \tag{9}$$
- Considérons la composée suivante :
$$ind_K^G(1) \longrightarrow ind_I^G(1) \xrightarrow{\sim} i_{T,B}^G(\mathbb{C}[T/T^0])$$
On sait alors d'une part que ce morphisme est $\mathbb{C}[T/T^0]^W$-équivariant si on le fait agir sur le terme de gauche par le centre $\mathfrak{Z}_\mathfrak{u}$ via t et sur le terme de droite via induction (voir isomorphisme (6)), et d'autre part que le morphisme obtenu par réciprocité de Frobenius est un isomorphisme (voir [7, (10.3)] par exemple). On en déduit, pour tout caractère χ de $\mathbb{C}[T/T^0]^W$, que :
$$r_{G,B}^T(ind_K^G(1) \otimes_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{u},\chi} \mathbb{C}) \simeq M_\chi \tag{10}$$

Pour tout caractère $\widetilde{\chi}$ de $\mathbb{C}[T/T^0]$ prolongeant un caractère χ de $\mathbb{C}[T/T^0]^W$, on sait que $i_{T,B}^G(\widetilde{\chi})^K$ est de dimension 1, donc qu'il existe un unique sous-quotient irréductible sphérique (i.e. ayant un vecteur non nul fixe par K) π_χ de $i_{T,B}^G(\widetilde{\chi})$ (il ne dépend que de χ). De plus, il existe un conjugué $\widetilde{\chi}^w$ de $\widetilde{\chi}$

tel que π_χ est un quotient de $i_{T,B}^G(\widetilde{\chi}^w)$. Dans ces conditions, le morphisme $ind_K^G(1) \longrightarrow i_{T,B}^G(\widetilde{\chi})$ se factorise :

$$ind_K^G(1) \otimes_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{u},\chi} \mathbb{C} \longrightarrow i_{T,B}^G(\widetilde{\chi}) \tag{11}$$

car $\mathfrak{Z}_\mathfrak{u}$ (identifié à $\mathbb{C}[T/T^0]^W$ via t) agit sur le membre de droite par le caractère χ.

Lemme 3.1. *Pour un caractère W-régulier χ (*i.e.* ayant $|W|$ prolongements distincts à $\mathbb{C}[T/T^0]$) de $\mathbb{C}[T/T^0]^W$, il existe un prolongement $\widetilde{\chi}$ tel que*

$$ind_K^G(1) \otimes_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{u},\chi} \mathbb{C} \simeq i_{T,B}^G(\widetilde{\chi})$$

Preuve. On choisit un prolongement $\widetilde{\chi}$ de χ à $\mathbb{C}[T/T^0]$ tel que (avec les notations des remarques ci-dessus) π_χ soit un quotient de $i_{T,B}^G(\widetilde{\chi})$. Puisque χ est W-régulier, π_χ est l'unique quotient irréductible de $i_{T,B}^G(\widetilde{\chi})$. On en déduit que le morphisme (11) qui lui correspond est surjectif. Appelons N son noyau. Alors, d'après (10) et (9), on voit que $r_{G,B}^T(N)$ est nul dans le groupe de Grothendieck de T donc nul tout court. Puisque N appartient au bloc de l'Iwahori, cela implique que N est lui-même nul. $\square$

Ceci démontre la proposition. $\square$

3.4. **Lien avec l'isomorphisme de Satake.** Dans cette partie, on retrouve (dans le cas particulier où $\mathfrak{u}$ est régulière) un résultat annoncé par X. Lazarus dont l'énoncé est semblable au troisième alinea de la proposition 3.1 sauf qu'il fait agir $\mathbb{C}[T/T^0]^W$ sur $ind_K^G(1)$ en l'identifiant avec $\mathcal{H}(G,K)$ via l'inverse de l'isomorphisme de Satake.

Commençons par rappeler la construction de Satake ([8, 4.2]) :

$$\begin{array}{cccc} S_B: & \mathcal{H}(G,K) & \rightarrow & \mathbb{C}[T/T^0]^W \\ & f & \mapsto & t \mapsto \delta_P{}^{\frac{1}{2}}(t) \int_U f(tu)du \end{array}$$

On voit facilement que la formule de S_B est indépendante de B ; on la notera donc S. Une question naturelle est de se demander si la composition :

$$\mathbb{C}[T/T^0]^W \xrightarrow{t} \mathcal{Z}(\mathcal{H}(G,I)) \subset \mathcal{H}(G,I) \xrightarrow{1_K * .. * 1_K} \mathcal{H}(G,K) \xrightarrow{S} \mathbb{C}[T/T^0]^W$$

est l'identité. La réponse est oui et passe par le lemme suivant :

Lemme 3.2. *Pour toute $h \in \mathcal{Z}(\mathcal{H}(G,I))$, on a :*

$$\Theta_K(h) = \Theta_I(1_K * h^* * 1_K)^*$$

où l'étoile désigne l'involution venant de $g \mapsto g^{-1}$.

Preuve. Remarquons d'abord que $1_K * h * 1_K = h * 1_K = 1_K * h$. Considérons l'isomorphisme :

$$\begin{array}{cccc} * & ind_K^G(1)^I & \rightarrow & ind_I^G(1)^K \\ & f & \mapsto & f^* \end{array}$$

où on voit un élément $f \in ind_K^G(1)^I$ comme une fonction I-invariante à gauche et K-invariante à droite sur G. L'étoile désigne l'involution venant de $g \mapsto g^{-1}$. Il existe aussi une telle involution sur le centre $\mathfrak{Z}_\mathfrak{u}$ (qui a la même définition si on identifie $\mathfrak{Z}_\mathfrak{u}$ et $\mathcal{Z}(\mathcal{H}(G,I))$) et on la note encore : $z \mapsto z^*$. On remarque que l'isomorphisme ci-dessus n'est pas $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{u}}$-équivariant mais vérifie : $(zf)^* = z^* f^*$. Notant π_I (resp. π_K) l'action de $\mathcal{H}(G)$ sur $ind_I^G(1)$ (resp. $ind_K^G(1)$), on s'aperçoit que si $h \in \mathcal{Z}(\mathcal{H}(G,I))$, alors : $(\pi_I(h).f)^* = \pi_K(1_K * h^*).f^*$.

En effet $(\pi_I(h).f)^* = (h * f)^* = (f * h)^* = h^* * f^* = (h^* * 1_K) * f = \pi_K(1_K * h^*).f^*$, l'avant dernière égalité venant de ce que f^* est K-invariante à gauche.

On déduit de tout cela que $\Theta_K(h) = \Theta_I(1_K * h^* * 1_K)^*$ □

Corollaire 3.1. *La composition :*

$$\mathbb{C}[T/T^0]^W \xrightarrow{t} \mathcal{Z}(\mathcal{H}(G,I)) \subset \mathcal{H}(G,I) \xrightarrow{1_K * .. * 1_K} \mathcal{H}(G,K) \xrightarrow{S} \mathbb{C}[T/T^0]^W$$

est l'identité. En particulier, les deux structures de $\mathbb{C}[T/T^0]^W$-module obtenues sur $ind_K^G(1)$ via action du centre et isomorphisme t ou via action de $\mathcal{H}(G,K)$ et isomorphisme de Satake sont équivalentes.

Preuve. Remarquons tout d'abord que si f est bi-invariante par K alors : ${f_K}^B = S_B(f)$, ce qui se voit sur les formules, et $\Theta_{T^0}({f_K}^B) = {f_K}^B$ en identifiant $\mathcal{H}(T,T^0)$ et $\mathbb{C}[T/T^0]$ et simplement parce que ${f_K}^B$ est T^0-invariante. On a donc dans ce cas :

$$\overline{\Theta}_{\mathfrak{u}}(f) = S(f)$$

Soit maintenant $h \in \mathcal{Z}(\mathcal{H}(G,I))$, on a :

$$\begin{aligned}
\Theta_I(h^*) &= |W|.\Theta_K(h^*) && \text{d'après proposition 3.1.}\\
&= |W|\Theta_I(1_K * h * 1_K)^* && \text{d'après le lemme 3.2.}\\
&= |W|^2 t\left(\overline{\Theta}_{\mathfrak{u}}(1_K * h * 1_K)\right)^* && \text{(voir fin du 3.2.)}\\
&= |W|^2 t\left(S(1_K * h * 1_K)\right)^* && \text{(voir début de la preuve.)}
\end{aligned}$$

On peut d'autre part calculer $\Theta_I(h^*)$: h^* est centrale dans $\mathcal{H}(G,I)$ donc agit par multiplication sur $ind_I^G(1)^I \simeq \mathcal{H}(G,I)$ qui est un $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{u}}$-module libre de rang $|W|^2$, donc $\Theta_I(h^*) = |W|^2.h^*$. On en déduit, en composant avec $*$: $h = t \circ S(1_K * h * 1_K)$, soit en posant $h = t(\theta)$:

$$\theta = S(1_K * t(\theta) * 1_K)$$

□

Remarque . i) A propos de l'involution $*$: de manière générale, pour chacune des algèbres $\mathbb{C}[T/T^0]$, $\mathbb{C}[T/T^0]^W$, $\mathcal{Z}(\mathcal{H}(G,I))$, $\mathcal{H}(G,K)$ elle est définie par composition avec l'anti-isomorphisme $g \mapsto g^{-1}$. On voit facilement que t et S commutent avec elle. L'isomorphisme $\mathcal{Z}(\mathcal{H}(G,I)) \simeq \mathfrak{Z}_{\mathfrak{u}}$ permet de la transporter sur le centre de $Mod_{\mathfrak{u}}(G)$ et on peut se demander si on ne peut pas l'y définir plus intrinsèquement.

En fait, on (admet qu'on) peut définir $*$ de la manière suivante sur $\mathfrak{Z}(G)$: considérons le foncteur contravariant

$$\begin{array}{rccl}
\sim: & Mod(G) & \to & Mod(G)\\
& V & \mapsto & \widetilde{V}(\text{ contragrédiente})
\end{array}$$

alors pour tout $z \in \mathfrak{Z}(G)$, il existe un unique $z^* \in \mathfrak{Z}(G)$ tel que $z^*_{\widetilde{V}} = \sim (z_V)$. ($z_V$ désigne l'endomorphisme de V induit par z.)

Comme 1_T est isomorphe à sa contragrédiente, on voit que $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{u}}$ est stable par $*$ et qu'on retrouve l'involution qu'on voyait sur $\mathcal{Z}(\mathcal{H}(G,I))$.

ii) Le corollaire 3.1 est en fait valable sans l'hypothèse de régularité : on remplace le lemme 3.2 par l'énoncé suivant dont la preuve est semblable :

Soit $h \in \mathcal{Z}(\mathcal{H}(G,I))$, χ *un caractère de* $\mathbb{C}[T/T^0]^W$, *notons* $\pi_{J,\chi} = ind_J^G(1) \otimes_{\mathfrak{Z},\chi} \mathbb{C}$ *pour* $J = K, I$, *alors on a :*

$$\Theta_{\pi_{K,\chi}}(h) = \Theta_{\pi_{I,\chi^*}}(1_K * h^* * 1_K)$$

Le membre de droite se calcule avec la formule de Van Dijk qui coïncide avec celle de Satake dans ce cas précis : supposons χ régulier, on trouve

$$|W|.\chi^*\left(S(1_K * h^* * 1_K)\right) = |W|.\chi\left(S(1_K * h * 1_K)\right)$$

Celui de gauche peut se calculer dans le cas χ W-régulier grâce à l'isomorphisme du lemme 3.1 dont la preuve ne dépend pas de la régularité de $\mathfrak{u}$: on trouve en utilisant $i_{T,B}^G(\widetilde{\chi})^I \simeq \mathcal{H}(G,I) \otimes_{\mathbb{C}[T/T^0],\widetilde{\chi},t_{\overline{B}}} \mathbb{C}$ et en écrivant $h = t(\theta) = t_{\overline{B}}(\theta)$:

$$\Theta_{\pi_{K,\chi}}(h) = |W|.\chi(\theta)$$

La densité des caractères W-réguliers permet de conclure.

3.5. **Bicommutants.** Cette section ne sera pas réutilisée dans la suite ; dans la proposition qui suit, le ii) précise légèrement le résultat de [3, 3.14] dans le cas du bloc de l'Iwahori : l'algèbre d'Azumaya mentionnée dedans est en fait triviale (*i.e.* l'algèbre d'endomorphismes d'un certain module).

Par le fait (voir [3, 3.9]) que la correspondance $V \mapsto V^H$ définit une équivalence de catégories entre la sous-catégorie abélienne des G-modules V engendrés par leurs points H-fixes V^H et la catégorie des $\mathcal{H}(G,H)$-modules, il est clair que $End_{\mathcal{H}(G,H)}(ind_I^G(1)^H) \simeq \mathcal{H}(G,I)$ et $End_{\mathcal{H}(G,H)}(ind_K^G(1)^H) \simeq \mathcal{H}(G,K)$ d'où les morphismes d'algèbres suivants (par "bicommutation") :

$$\mathcal{H}(G,H) \longrightarrow End_{\mathcal{H}(G,I)}(ind_I^G(1)^H) \tag{12}$$

$$\mathcal{H}(G,H) \longrightarrow End_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{u}}(ind_K^G(1)^H) \tag{13}$$

où on a identifié $\mathcal{H}(G,K)$ avec $\mathfrak{Z}_\mathfrak{u}$. Ces morphismes se factorisent par la projection $\mathcal{H}(G,H) \mapsto e_I^H * \mathcal{H}(G,H) * e_I^H$ où e_I^H est l'idempotent de $\mathcal{H}(G,H)$ associé au bloc de l'Iwahori, et on a :

Proposition 3.2. *L'algèbre* $e_I^H * \mathcal{H}(G,H) * e_I^H$ *est projective de type fini sur son centre* $\mathfrak{Z}_\mathfrak{u}$.

i) *Le morphisme (12) donne un isomorphisme*

$$e_I^H * \mathcal{H}(G,H) * e_I^H \xrightarrow{\sim} End_{\mathcal{H}(G,I)}(ind_I^G(1)^H)$$

ii) *Le morphisme (13) donne un morphisme injectif*

$$e_I^H * \mathcal{H}(G,H) * e_I^H \hookrightarrow End_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{u}}(ind_K^G(1)^H)$$

dont la réduction modulo un caractère χ *de* $\mathfrak{Z}_\mathfrak{u}$ *est un isomorphisme, pour* χ *générique.*

Preuve. Le i) se déduit d'une part de l'(anti)-isomorphisme de $\mathcal{H}(G,H) \times \mathcal{H}(G,I)$-bimodules :

$$* : ind_I^G(1)^H \simeq ind_H^G(1)^I$$

et d'autre part du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(G,H) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & End_G(ind_H^G(1)) \arrow[d] & \\
e_I^H * \mathcal{H}(G,H) * e_I^H \arrow[r, "\sim"] & End_G(ind_H^G(1)_{\mathfrak{u}}) \arrow[r, "\sim"] & End_{\mathcal{H}(G,I)}(ind_H^G(1)^I)
\end{tikzcd}$$

où $V_{\mathfrak{u}}$ désigne la composante dans $Mod_{\mathfrak{u}}(G)$ d'un G-module V.

Par ailleurs, la suite de morphismes

$$\mathcal{Z}(\mathcal{H}(G,H)) \overset{1_I * . * 1_I}{\longrightarrow} \mathcal{Z}(\mathcal{H}(G,I)) \overset{1_K * . * 1_K}{\longrightarrow} \mathcal{H}(G,K)$$

permet d'identifier le centre de $e_I^H * \mathcal{H}(G,H) * e_I^H$ avec $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{u}}$. On voit alors que cette algèbre est projective sur son centre grâce à l'isomorphisme de la dernière ligne du diagramme précédent : $ind_H^G(1)^I$ est projectif sur $\mathcal{H}(G,I)$ donc facteur direct d'un produit de $\mathcal{H}(G,I)$, donc $End_{\mathcal{H}(G,I)}(ind_H^G(1)^I)$ est un $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{u}}$-facteur direct d'un produit de $\mathcal{H}(G,I)$, donc est projectif sur $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{u}}$.

Le ii) peut se déduire de [3, 3.14] (fin de la démonstration) ou (et c'est équivalent) de i) et de l'argument suivant : pour χ générique, on sait que $\mathcal{H}(G,I)_\chi$ (notation évidente) est centrale simple. Son unique module irréductible est $\mathcal{H}(G,I)\otimes_{\mathbb{C}[T/T^0],\overline{\chi}}\mathbb{C}$ pour un prolongement $\overline{\chi}$ quelconque de χ à $\mathbb{C}[T/T^0]$: on le note X_χ puisqu'il est indépendant du prolongement. Par ailleurs, on déduit de 3.3 que

$$ind_K^G(1)_\chi^H \simeq ind_I^G(1)_\chi^H \otimes_{\mathcal{H}(G,I)_\chi} X_\chi$$

(en effet, ici l'égalité dans le groupe de Grothendieck est un isomorphisme puisque tout est irréductible) $ind_K^G(1)_\chi^H$ est donc l'image de $ind_I^G(1)_\chi^H$ par l'équivalence de Morita entre l'algèbre centrale simple $\mathcal{H}(G,I)_\chi$ et son centre $\mathbb{C}$, donc la réduction modulo χ de l'isomorphisme i) montre que la réduction de ii) modulo χ est un isomorphisme.

Le fait que ii) est injectif se déduit de ce que la réduction est génériquement un isomorphisme. □

4. Application à $GL(n)$

Le but de cette partie est de généraliser ce qu'on a observé dans le cas de la classe d'inertie de l'Iwahori pour un groupe quelconque (déployé) à toutes les classes d'inertie de $GL(n)$. On utilise pour cela la théorie des types de Bushnell et Kutzko développée dans [5] et [6].

4.1. **Le résultat.** On note $K = GL(N, \mathcal{O}_F)$. Soit $\mathfrak{s} = [M,\rho]_G$ une classe d'inertie et $\mathfrak{s}_M = [M,\rho]_M$. On se donne un $\mathfrak{s}$-type (J,τ) couvrant un $\mathfrak{s}_M$-type (J_M,τ_M) tel que $J \subset K$.

Théorème 4.1. *Il existe une représentation $\rho_{\mathfrak{s}}$ de K telle que :*

- $\mathcal{H}(G,\rho_{\mathfrak{s}}) \simeq \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$
- *Si χ est un caractère de $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$, restriction d'un caractère $\overline{\chi}$ de $\mathcal{H}(M,\tau_M)$, lui-même restriction d'un caractère $\overline{\overline{\chi}}$ non ramifié de M, alors :*

$$[ind_K^G(\rho_{\mathfrak{s}}) \otimes_{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}},\chi} \mathbb{C}] = [ind_J^G(\tau) \otimes_{\mathcal{H}(M,\tau_M),t_{\overline{Q}},\overline{\chi}} \mathbb{C}] = [i_{M,Q}^G(\sigma.\overline{\overline{\chi}})]$$

les égalités ayant lieu dans le groupe de Grothendieck des G-modules de longueur finie.
– $\phi_{\mathfrak{s}}(ind_K^G(\rho_{\mathfrak{s}})) = (r_\chi)_{\chi\in\Psi_{\mathfrak{s}}}$

4.2. **La démonstration.** *Cas cuspidal :* Soit (J,τ) un type cuspidal avec $J \subset K$: posons $\rho_{\mathfrak{s}} = ind_J^K(\tau)$: il est clair que $\rho_{\mathfrak{s}}$ est irréductible et que $\mathcal{H}(G,\rho_{\mathfrak{s}}) \simeq \mathcal{H}(G,\tau) \simeq \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$. Le reste s'exprime de manière triviale dans ce cas.

Cas d'un type simple : (On suppose toujours $J \subset K$). On sait dans ce cas-là (voir [5, 7.6.20]) qu'il existe une extension E du corps F, telle qu'en notant $G_E = GL(N,E)$, T_E un tore maximal, B_E (resp. I_E) le sous-groupe de Borel standard (resp. le sous-groupe d'Iwahori standard), il existe des isomorphismes d'algèbres Ψ et Ψ_1 rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}(G_E,I_E) \arrow[r, "\Psi"] & \mathcal{H}(G,\tau) \\ \mathbb{C}[T_E/T_E^0] \arrow[u, "t_{\overline{B}}"] \arrow[r, "\Psi_1"] & \mathcal{H}(M,\tau_M) \arrow[u, "t_{\overline{Q}}"'] \end{tikzcd}$$

En particulier, Ψ induit un isomorphisme de $\mathbb{C}[T_E/T_E^0]^{W_E}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{H}(G,\tau)) \simeq \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$.

Notons e_K l'image de $1_{GL(N,\mathcal{O}_E)}$ dans $\mathcal{H}(G,\tau)$: e_K est un idempotent et appartient à $\mathcal{H}(K,\tau)$ (par "préservation" du support) et on peut donc poser

$$\rho_{\mathfrak{s}} := e_K(ind_J^K(\tau))$$

On voit que $ind_K^G(\rho_{\mathfrak{s}})_\tau \simeq \mathcal{H}(G,\tau)*e_K$ par l'équivalence de catégories $Mod_{\mathfrak{s}}(G) \simeq \mathcal{H}(G,\tau) - Mod$, donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(G,\rho_{\mathfrak{s}}) &\simeq End_{\mathcal{H}(G,\tau)}(\mathcal{H}(G,\tau)*e_K) \\ &\simeq e_K * \mathcal{H}(G,\tau) * e_K \\ &\simeq 1_{GL(N,\mathcal{O}_E)} * \mathcal{H}(G_E,I_E) * 1_{GL(N,\mathcal{O}_E)} \\ &\simeq \mathbb{C}[T_E/T_E^0]^{W_E} \\ &\simeq \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}} \end{aligned}$$

Les deux autres alineas du théorème viennent des mêmes arguments (équivalence de catégories entre $Mod_{\mathfrak{s}}(G)$ et $\mathcal{H}(G,\tau) - Mod$, utilisation du diagramme commutatif ci-dessus et de la proposition 3.1).

Cas général : La situation précédente se généralise sans peine au cas où G est un produit de $G_i = GL(N_i,F)$, $M = \prod M_i$, $J = \prod J_i$, $\tau = \otimes\tau_i$, etc... et où chaque τ_i est un type simple pour G_i. En effet, on a $K = \prod K_i$, $\mathcal{H}(G,\tau) = \otimes\mathcal{H}(G_i,\tau_i)$ et on prend $\rho_{\mathfrak{s}} = \otimes\rho_{\mathfrak{s}_i}$, qui correspond à l'idempotent $e_K = \otimes e_{K_i}$ de $\mathcal{H}(K,\tau)$. :

On sait maintenant (*cf* [6]) que le cas général se décompose comme ceci : il existe un sous-groupe de Levi L tel que $M \subset L \subset G$ avec les propriétés suivantes :

i) $(J_L,\tau_L) := (J\cap L, \tau_{|J\cap L})$ est un $\mathfrak{s}_L$-type couvrant (J_M,τ_M) et on est dans la situation d'un produit de types simples (comme ci-dessus).

ii) Tous les morphismes de Bushnell et Kutzko : $\mathcal{H}(L,\tau_L) \xrightarrow{t_Q} \mathcal{H}(G,\tau)$ (où Q est un sous-groupe parabolique de sous-groupe de Levi L) sont des isomorphismes. De plus, par leurs définitions, on voit qu'ils coïncident sur $\mathcal{H}(K_L, \tau_L)$ (ils sont en fait égaux modulo un caractère non-ramifié de M : voir les définitions dans [7, (7.9)]).

iii) En particulier, les inductions paraboliques sont des équivalences de catégories $Mod_{\mathfrak{s}_L}(L) \xrightarrow{i^G_{L,Q}} Mod_{\mathfrak{s}}(G)$ (voir [7, (12.4)]) d'équivalences inverses les $p_{\mathfrak{s}_L} \circ r^L_{G,Q}$ où $p_{\mathfrak{s}_L}$ est la "projection" sur le bloc $Mod_{\mathfrak{s}_L}(L)$.

D'après le ii), on peut poser "canoniquement" $e_K = t_Q(e_{K_L})$ et donc à nouveau $\rho_{\mathfrak{s}} = e_K(ind_J^K(\tau))$. Le premier et le troisième alinéas du théorème découlent alors formellement du i), du ii) et de l'équivalence $Mod_{\mathfrak{s}}(G) \simeq \mathcal{H}(G, \tau) - Mod$. Pour le deuxième alinéa, on utilise aussi le iii). $\square$

Références

[1] H. Bass. *Algebraic K-Theory.* Progress in Math. Birkhuser, *1968.*

[2] I.N. Bernstein et V. Zelevinski. Induced representations on reductive p-adic groups. *Ann.Sci.Ec.Norm.Sup*, 10, 441–472, *1977.*

[3] J.-N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, et M.F. Vignras. *Reprsentations des groupes rductifs sur un corps local.* Travaux en cours. Hermann, Paris, *1984.*

[4] Bourbaki. *Algbre Commutative. Chapitre II.* Hermann, Paris, *1961.*

[5] C.J. Bushnell et P.C. Kutzko. *The Admissible Dual of $GL(n)$ via open compact groups.* Annals of maths. Studies. 129. Princeton university press, *1993.*

[6] C.J. Bushnell et P.C. Kutzko. Semisimple types in $GL(n)$. *Preprint*, *1996.*

[7] C.J. Bushnell et P.C. Kutzko. Smooth representations of reductive p-adic groups : Structure via types. *Preprint*, *1996.*

[8] P. Cartier. Representations of p-adic groups : a survey. *Proc. Symp. Pure Math.*, 33, 111–155, *1979.*

[9] I. Cherednik. A unification of Knizhnik-Zamolodchikov and Dunkl operators via affine Hecke algebras. *Inventiones Mathematicae*, 106, 411–431, *1991.*

[10] J.-F. Dat. Types et induction : cas modulaire. *Preprint*, *1997.*

[11] T.Y. Lam. *Serre's conjecture.* Lecture Notes in Math. 635. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, *1978.*

[12] P.J. Sally. Some remarks on discrete series characters for reductive p-adic groups. In *Representations of Lie Groups*, Advanced Studies in Pure Mathematics 14, pp. 337–348, *1988.*

[13] R. Steinberg. On a theorem of Pittie. *Topology*, 14, 173–177, *1975.*

[14] G. van Dijk. Computation of certain induced characters op p-adic groups. *Math. Ann.*, 199, 229–240, *1972.*