

Représentations de groupes p -adiques : finitude, cohomologie, et correspondance de Langlands

J.-F. Dat

Septembre 2006

1 Quelques résultats et leurs motivations

Mes recherches ont jusqu'à présent tourné autour des représentations lisses des groupes p -adiques, et ont porté tant sur l'étude de leurs propriétés fondamentales que sur leurs occurrences dans diverses situations géométriques en relation avec le programme de Langlands.

1.1 Théorie des représentations

Dans ce domaine, j'ai principalement poursuivi l'étude générale des représentations à coefficients "premiers à p ", c'est-à-dire dans un anneau commutatif unitaire où p est inversible, que j'avais commencée dans ma thèse, à la suite de M.-F. Vignéras. On notera G le groupe p -adique et R l'anneau de coefficients.

1.1.1 Propriétés de finitude : Dans ce contexte général, la motivation principale était de prouver un théorème de finitude du type "théorème de Hilbert" : *si R est noethérien, alors l'algèbre de Hecke $R[G]$ est noethérienne*. Dans la prépublication [D4], commencée en 2000 et terminée récemment, j'obtiens cet énoncé au moins pour les groupes linéaires et classiques, avec une approche suffisamment générale pour être transposable à d'autres groupes, au fil des progrès de la théorie des types. Au cours de la preuve, j'obtiens aussi la propriété de *seconde adjonction* entre foncteurs paraboliques "opposés", le fait que la restriction parabolique respecte l'admissibilité, et que l'induction parabolique respecte la type-finitude. Ces propriétés étaient déclarées "problèmes ouverts" dans l'introduction de ma thèse, et c'est avec un soulagement certain que je les referme enfin, au moins partiellement. Ces problèmes avaient été abordés auparavant par Bernstein [6], Vignéras [41] et Bezrukavnikov [8]. La section 2.2 décrit avec quelques détails la stratégie et les outils mis en oeuvre pour obtenir ces résultats.

1.1.2 Autour du centre de Bernstein : Rappelons que dans le cas $R = \mathbb{C}$, Bernstein [7] montre que les algèbres de Hecke sont non seulement noethériennes, mais même finies sur leur centre, et que celui-ci est une algèbre de type fini sur \mathbb{C} . Dans le cas général, je n'obtiens pas de propriété aussi forte. Néanmoins, en suivant l'argument de Bernstein, on vérifie que si H est un sous-groupe ouvert compact de G , il existe un entier N_H tel que pour tout R dans lequel N_H est inversible, l'algèbre de Hecke $R[H \backslash G / H]$ est un module fini sur une sous-algèbre centrale de type fini sur R . Dans [D7], je propose une borne sur N_H qui prend en compte le pro-ordre de G et les dénominateurs intervenant dans les coefficients de Fourier de certaines mesures de Plancherel. Dans le cas GL_n où on connaît explicitement toutes ces mesures [1], on peut borner N_H par le pro-ordre de G , et donc indépendamment du niveau H .

Dans [D1], je me suis intéressé aux idempotents centraux du centre de Bernstein sur \mathbb{C} . On sait que le théorème de Plancherel-Harish Chandra [44] fournit une formule pour la distribution invariante associée à un tel idempotent, et les dénominateurs qui apparaissent sont ceux des volumes de Plancherel des orbites discrètes. Comme ceux-ci sont en général mystérieux, j'ai proposé une nouvelle formule, dérivée de mes travaux de thèse sur la K -théorie de G [20]. Les dénominateurs

qui apparaissent sont les entiers de torsion du quotient du K_0 par la somme des K_0 des sous-groupes ouverts compacts. Pour $GL(N)$ j'ai pu les borner par le pro-ordre de G , grâce aux types "tempérés" de Schneider-Zink [38].

1.1.3 *Sur un corps algébriquement clos* : on s'intéresse alors aux représentations de longueur finie. Rappelons que lorsque la caractéristique de R divise le pro-ordre d'un sous-groupe compact de G , les induites paraboliques peuvent avoir des sous-quotients cuspidaux. Une question naturelle quoique un peu vague, posée aussi dans l'introduction de ma thèse est : *peut-on prévoir quand une induite parabolique possède un sous-quotient cuspidal ?* Notons que la présence de ces sous-quotients cuspidaux a des effets inhabituels sur ces induites paraboliques : il n'est pas clair qu'elles soient de longueur uniformément bornée, ou même génériquement irréductibles. Dans [D2], j'ai prouvé l'*irréductibilité générique*, au moins lorsque G admet des réseaux cocompacts. Grâce à [D4], on obtient aussi le cas des groupes classiques sur les corps d'égalité caractéristiques. Lorsqu'on a l'irréductibilité générique pour une famille de représentations $i_P^G(\pi\psi)$ où ψ décrit le R -tore algébrique des caractères non-ramifiés du sous-groupe parabolique P , on peut attacher à π une certaine fonction rationnelle sur ce tore, qui, dans le cas complexe et lorsque π est de carré intégrable, n'est autre que la fonction μ de Harish Chandra [44, V.2], qui intervient dans sa formule de Plancherel. Dans ce cas complexe et lorsque π est de plus supercuspidale, on sait que la multiplicité du diviseur $\text{Div}(\mu)$ en un point est au plus la profondeur du parabolique P , et Heiermann a prouvé [25] qu'on a égalité si et seulement si l'induite spécialisée en ce point a un sous-quotient de carré intégrable. Dans le cas général, je conjecture que la multiplicité *dépasse* la profondeur de P si et seulement si l'induite correspondante admet un sous-quotient cuspidal. Le cas où P est de profondeur 1 est traité dans la section 8 de [D2], et la conjecture est compatible avec les résultats de Vignéras pour $GL(n)$ [40]. Nous donnons plus de détails dans la section 2.1.

En rédigeant ce mémoire, je me suis aperçu qu'à partir de la propriété d'irréductibilité générique, on peut aussi prouver que l'induite parabolique d'une représentation irréductible est, à semi-simplification près, indépendante du parabolique choisi, cf 2.1.2.

1.1.4 *Structures entières* : Soit \mathcal{O} un anneau de valuation discrète et de corps des fractions K de caractéristique différente de p . On aimerait classer les K -représentations irréductibles *entières*, *i.e.* qui admettent un \mathcal{O} -réseau stable par G . La difficulté du problème dépend de la caractéristique résiduelle de \mathcal{O} . Si celle-ci est différente de p , la propriété d'intégralité se traduit en une propriété asymptotique des coefficients pour la valuation de K , et, au moins pour un groupe classique, je prouve dans [D2] que celle-ci équivaut à une propriété d'intégralité du caractère central d'un représentant du support cuspidal de la représentation ; en bref, la représentation est entière si et seulement si le point correspondant dans le spectre du centre de Bernstein est entier, en un sens facile à préciser. Lorsque la caractéristique résiduelle est p , la propriété d'intégralité est encore mystérieuse. On peut l'affaiblir en déclarant qu'une représentation est *localement entière* si pour tout sous-groupe ouvert compact H , le sous-espace des invariants admet un réseau stable par l'algèbre de Hecke $\mathcal{O}[H \backslash G / H]$. Cette propriété se traduit à nouveau sur le comportement asymptotique des coefficients, ce qui mène à une classification des représentations localement entières. Je conjecture alors que la propriété d'intégralité locale d'une irréductible ne dépend que de son support cuspidal, et je prouve cette conjecture pour les groupes classiques. Plus précisément, une représentation est localement entière si et seulement si le point du spectre de Bernstein correspondant est dans un certain ouvert affinoïde défini par des équations explicites, cf [D6] et 2.1.3. Le problème de savoir si *entière* équivaut à *localement entière* reste largement ouvert, le seul cas compris étant $GL(2)$, grâce à C. Breuil [13] et M.-F. Vignéras [43].

1.2 Cohomologie et correspondance de Langlands

Il s'agit d'une contribution à la théorie de Lubin-Tate non-abélienne, ainsi baptisée par Carayol dans [17], laquelle vise à réaliser des cas de fonctorialité de Langlands locale dans la cohomologie de certains espaces de groupes p -divisibles. Mon but était, et reste, de comprendre la correspondance de Langlands locale pour *toutes* les représentations de GL_n en termes "géométricohomologiques".

1.2.1 Motivations : Bien que ce programme concerne des représentations en caractéristique nulle, j'étais initialement motivé par deux questions de représentations modulaires. La première concernait la correspondance de Langlands-Vignéras [42] pour les représentations modulo l . Cette correspondance se restreint comme dans le cas complexe en une bijection entre supercuspidales de GL_n et irréductibles de dimension n du groupe de Weil W_F , laquelle est uniquement déterminée par la propriété d'être compatible avec la réduction modulo l de la correspondance de Langlands classique. En revanche, la correspondance entre objets non-supercuspidaux et objets réductibles est plus mystérieuse, car définie de manière purement combinatoire. Par exemple, la correspondante de la représentation triviale de $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ modulo l est *indécomposable* dès que $\Phi_n(p) = 0 \pmod{l}$ (polynôme cyclotomique). Ceci contraste fortement avec la correspondance de Langlands ordinaire –où la correspondante de la triviale est toujours semi-simple– et comme il n'y a pas à ma connaissance de justification en termes de fonction L ou ε de paires, il m'a paru intéressant de rechercher une justification géométrique. Après quelques discussions avec Alain Genestier, l'objet géométrique naturel semblait être l'espace symétrique de Drinfeld.

Par ailleurs, cette congruence $\Phi_n(p) = 0 \pmod{l}$ est exactement celle intervenant dans la conjecture de Broué pour les représentations modulo l de $GL_n(\mathbb{F}_p)$. Cette conjecture, maintenant prouvée par Bonnafé et Rouquier [10] affirme que le complexe de $\overline{\mathbb{F}}_l$ -cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig associée à l'élément de Coxeter du groupe de Weyl, vu dans une catégorie dérivée équivariante convenable, réalise une équivalence entre les catégories dérivées du $\overline{\mathbb{F}}_l$ -bloc principal de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ et de celui du normalisateur d'un tore maximale anisotrope. Si l'on cherche un analogue de cette conjecture, il est naturel de remplacer la variété de Deligne-Lusztig par la tour de Drinfeld au-dessus de son espace symétrique p -adique. L'analogue du tore anisotrope est alors le groupe des inversibles de l'algèbre à division D_n d'invariant $1/n$, et l'analogue du normalisateur de ce tore est en quelque sorte le produit semi-direct $D_n^\times \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$ où le Frobenius agit par conjugaison par une uniformisante de D_n .

Pour des raisons stupides de dimension, il ne peut pas y avoir équivalence dérivée entre les blocs principaux de $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ et de $D_n^\times \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$. Je n'ai pas encore trouvé d'énoncé de substitution, mais celui-ci devra d'une manière ou d'une autre incorporer la correspondance de Langlands-Vignéras. Quoiqu'il en soit, au cours de ces réflexions, je me suis aperçu que même pour les $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentations, on ne connaît pas toujours de construction géométrique de la correspondance de Langlands. En fait, jusqu'ici, les seuls cas connus concernaient les supercuspidales (Harris-Taylor [24]) ou certaines composantes de formes automorphes.

1.2.2 Résultats : Inspiré par la conjecture de Broué, j'ai commencé par étudier le complexe de cohomologie étale de l'espace symétrique de Drinfeld à supports compacts et à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, vu dans la catégorie dérivée équivariante des $\overline{\mathbb{Q}}_l PGL_n(F)$ -représentations *lisses*, et muni de l'action du groupe de Weil W_F . La cohomologie de ces espaces est connue depuis Schneider-Stuhler [36]. L'action de W_F sur H_c^i se fait par un caractère et celle de PGL_n est une certaine série principale "elliptique", c'est-à-dire un sous-quotient de l'induite de la représentation triviale d'un Borel. Notons qu'il y a 2^{n-1} tels sous-quotients et que seulement n sont réalisés comme espaces de cohomologie. Dans [D3], j'ai explicité l'algèbre des endomorphismes du complexe de cohomologie et l'action de W_F , puis j'ai montré que la $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation continue de W_F sur la cohomologie totale $R^*Hom_{PGL_n}(R\Gamma_c, \pi)$ est, à une torsion à la Tate près, la correspondante de Langlands de π si π est une série principale elliptique, et est nulle sinon. On obtient ainsi une réalisation cohomologique de la correspondance pour des représentations non-unitarisables, ce qui est nouveau. On voit aussi que la considération du complexe de cohomologie fait intervenir *toutes* les séries principales elliptiques, et corrige ainsi l'asymétrie de la cohomologie.

Pour obtenir plus de représentations, il est naturel de regarder d'abord les revêtements de l'espace de Drinfeld. Dans [D5], je définis un complexe équivariant sur la tour et je généralise le résultat précédent à toutes les représentations "elliptiques" de GL_n . Dans ce cas, on a aussi une action de D_n^\times , et on obtient que la cohomologie totale $R^*Hom_{GL_n}(R\Gamma_c, \pi)$ est $D_n^\times \times W_F$ -isomorphe à $JL(\pi) \otimes \sigma(\pi)$ (à une torsion près). Notons que contrairement au cas des séries principales, ce résultat est obtenu de manière indirecte par le théorème de Faltings-Fargues [22] qui compare la tour de Drinfeld à la tour de Lubin-Tate. Sur cette dernière je prouve un énoncé analogue en

utilisant les résultats de Boyer [12].

Bien que mes motivations et méthodes soient purement locales, il y a au moins une application d'intérêt global à tout ceci, à savoir la preuve de la conjecture monodromie-poids de Deligne pour les variétés uniformisées par les revêtements de Drinfeld, ce qui conclut le calcul de la fonction L de certaines variétés de Shimura étudiées par de nombreux auteurs, en particulier Carayol [17], Harris [23] et Rapoport [32].

1.2.3 Et après ? : Il y a plusieurs manières de prolonger les travaux que je viens de présenter. Revenir à ma motivation initiale en étudiant le complexe de cohomologie à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_l$ pour $\Phi_n(p) = 0 \pmod{l}$, ou au contraire dans le cas “limite classique” $q = 1 \pmod{l}$ comme Harris l'a préconisé pour étudier le “lemme d'Ihara” de [18]. Chercher un objet géométrique dont la cohomologie réaliserait la correspondance de Langlands pour *toutes* les représentations de $GL(n)$. Étudier le complexe de cohomologie des espaces de Rapoport-Zink [34] associés à d'autres paires de groupes, ce qui ne manquera pas de soulever des problèmes endoscopiques...

Nous donnons maintenant plus de détails sur les méthodes et les résultats.

2 Théorie des représentations

La lettre G désigne toujours un groupe p -adique et R désigne un anneau commutatif unitaire où p est inversible.

2.1 Représentations ν -tempérées

Lorsque $R = \mathbb{C}$, on connaît l'importance des représentations tempérées : d'une part elles forment le support de la mesure de Plancherel et d'autre part, le théorème dit du “quotient de Langlands” permet de présenter toute représentation complexe irréductible de G comme unique quotient d'une induite parabolique $i_P^G(\sigma\psi)$ avec σ tempérée et ψ un caractère non ramifié dont la norme est “dans la chambre de Weyl associée à P ”. On peut définir les représentations tempérées de deux manières équivalentes : soit par des conditions de croissance sur les coefficients matriciels, soit par des inégalités sur les exposants (les caractères centraux intervenant dans les divers modules de Jacquet). L'équivalence des deux définitions est un lemme de Casselman. On définit aussi les séries discrètes par des conditions asymptotiques plus strictes, et on sait que les tempérées s'obtiennent comme constituants d'induites paraboliques de séries discrètes.

Remplaçons maintenant \mathbb{C} par un corps K muni d'une norme $|\cdot|_K$ et posons $\nu := -\log|\cdot|_K$. On peut alors définir les notions de représentation ν -tempérée ou ν -discrète par des conditions analogues au cas classique portant soit sur le comportement asymptotique de la norme des coefficients, soit sur celui des exposants, le lemme de Casselman permettant encore de passer des unes aux autres [D2, Sec. 3]. Lorsque K est algébriquement clos, je prouve qu'on a un théorème du “quotient de Langlands” formellement analogue au théorème classique. Lorsque la norme sur K est archimédienne, on peut se ramener au cas classique ; nous supposons donc la norme non-archimédienne, de sorte que ν est une valuation sur K . La théorie bifurque selon que $\nu(p) = 0$ ou $\nu(p) > 0$. Le premier cas se partage aussi en deux sous-cas : le cas “ l -adique” où K est de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle $l \neq p$ et le cas d'égales caractéristiques $l \neq p$.

2.1.1 Le cas l -adique : Dans ce cas on remarque qu'une représentation est ν -tempérée si et seulement si elle est ν -entière [D2, Prop. 6.3]. Le formalisme ν -tempéré laisse donc espérer classifier les représentations entières. Par ailleurs, la propriété fondamentale à laquelle il faut s'attendre est

(*) : *une représentation est ν -discrète si et seulement si elle est supercuspidale et de caractère central ν -entier.*

Comme une ν -tempérée s'obtient toujours comme constituant d'une induite de ν -discrète, ceci implique la classification des ν -entières par leur support cuspidal, telle qu'annoncée au paragraphe 1.1.4. Dans [D2], on a prouvé (*) pour les groupes classiques en utilisant des résultats de C.

Moeglin [29] sur les points de réductibilité des induites paraboliques pour ces groupes ; on pourrait maintenant utiliser alternativement les résultats de finitude de [D4]. En fait, cela ne lèverait pas encore la restriction aux groupes classiques, qui est présente, pour d'autres raisons, dans [D4], mais cela permettrait de retrouver une partie des propriétés des points de réductibilité. En effet, sous la propriété (*), le théorème du quotient de Langlands est dégénéré, au sens où pour tout triplet de Langlands (P, σ, ψ) , l'induite $i_P^G(\sigma\psi)$ est déjà irréductible. En faisant varier l , on obtient que si l'induite parabolique $i_P^G(\sigma)$ d'une supercuspidale σ avec P maximal est réductible, alors le caractère central de σ prend "essentiellement" ses valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}[\frac{1}{p}]^\times$.

2.1.2 Le cas d'égales caractéristiques : Dans ce cas aussi, on s'attend à ce que la propriété (*) soit vraie, et en conséquence à ce que le théorème du quotient de Langlands soit dégénéré. On peut alors appliquer ce théorème au triplet $(P, \sigma \otimes_k k(M/M^0), \psi_{un})$ où

- k est un corps algébriquement clos de caractéristique $l \neq p$, et σ est une irréductible sur k ,
- P est un parabolique de Levi M , et M^0 est l'intersection des noyaux des caractères non-ramifiés,
- ψ_{un} est le caractère non-ramifié "universel", à valeurs dans $k[M/M^0]$,
- $K := k(M/M^0)$ est muni d'une valuation triviale sur k et telle que $\nu(\psi_{un})$ soit dans la chambre de Weyl associée à P .

Dans ces conditions, le triplet est de Langlands, et on obtient l'irréductibilité de la K -représentation $i_P^G(\sigma_K \otimes \psi_{un})$, c'est-à-dire, l'irréductibilité générique des k -représentations $i_P^G(\sigma\psi)$ pour ψ dans le k -tore des caractères non-ramifié.

Dans [D2], on a montré (*) lorsque G possède des réseaux cocompacts, en utilisant des séries de Poincaré. Pour les groupes classiques sur des corps de fonctions, on peut alternativement utiliser le fait que les foncteurs de Jacquet commutent aux produits quelconques [D4, Lemme 4.9].

On a déjà expliqué dans l'introduction que la propriété d'irréductibilité générique, couplée à une généralisation convenable de la théorie des opérateurs d'entrelacement [D2 Sec. 7], permet d'associer à un couple (P, σ) un invariant $\mu_\sigma \in k(M/M^0)$ présumément capable de détecter la présence de sous-quotients *cuspidaux* dans l'induite $i_P^G(\sigma)$. Voici une autre conséquence qui m'avait échappé lors de la rédaction de [D2] :

Proposition *Soit P, Q deux sous-groupes paraboliques ayant un Levi commun M , et σ une représentation irréductible de M à coefficients dans un corps k de caractéristique $\neq p$. Alors dans le groupe de Grothendieck des k -représentations de longueur finie, on a $[i_P^G(\sigma)] = [i_Q^G(\sigma)]$.*

Preuve : (ébauche) : il suffit de le prouver pour P et Q adjacents, ce qui nous ramène au cas où ils sont maximaux, et donc opposés. Comme la propriété que l'on veut prouver est stable par changement de corps de base, on peut supposer k algébriquement clos, puis étendre les scalaires au corps des fractions K_G de $k[G/G^0]$, et tordre par le caractère universel $\psi_{un}^G : G \rightarrow k[G/G^0]$. On est ainsi ramené à prouver que dans le groupe de Grothendieck des K_G -représentations de longueur finie, on a $[i_P^G(\sigma_{K_G} \otimes \psi_{un|_M}^G)] = [i_Q^G(\sigma_{K_G} \otimes \psi_{un|_M}^G)]$.

Comme ci-dessus, notons $K := k(M/M^0)$ et ψ_{un} le caractère non ramifié universel $M \rightarrow k[M/M^0]$. Notons aussi $\rho : k[M/M^0] \rightarrow k[G/G^0]$ le morphisme induit par l'inclusion $M \subset G$, de sorte que $\psi_{un|_M}^G = \rho \circ \psi_{un}$, et soit \mathcal{O} le localisé de $k[M/M^0]$ en le noyau de ρ . Comme M est maintenant maximal, \mathcal{O} est un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel K_G . De plus, $i_P^G(\sigma_{K_G} \otimes \psi_{un}^G)$ est la réduction modulo l'idéal maximal de \mathcal{O} du $\mathcal{O}G$ -module $i_P^G(\sigma_{\mathcal{O}} \otimes \psi_{un})$, et de même avec Q à la place de P . D'après le principe de Brauer-Nesbitt, dû à M.-F. Vignéras dans ce contexte, il nous suffit donc de prouver que dans le groupe de Grothendieck des K -représentations de longueur finie, on a $[i_P^G(\sigma_K \otimes \psi_{un})] = [i_Q^G(\sigma_K \otimes \psi_{un})]$.

Or ces représentations sont même isomorphes puisqu'elles sont irréductibles et reliées par un opérateur d'entrelacement non-nul [D2, 7.3]. \square

2.1.3 le cas p -adique : Dans ce cas, la propriété (*) n'est pas vraie, sauf si le groupe est anisotrope. Pour autant, les objets obtenus ne sont pas vraiment nouveaux ; on s'attend en effet à avoir la compatibilité suivante entre séries discrètes classiques et représentations p -discrètes :

fixons deux plongements $\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$, et une représentation lisse irréductible π de G sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

(**) *Alors $\pi \otimes \mathbb{C}_p$ est p -discrète si et seulement si $Z(\pi \otimes \mathbb{C})$ est une série discrète classique*

où Z est l'involution de Zelevinski. Dans [D6], je prouve (**) sous l'hypothèse de "rationalité" des points de réductibilité des induites de cuspidales, laquelle est satisfaite au moins pour les groupes classiques, grâce à C. Moeglin [29].

Par ailleurs, toujours dans [D6], on prouve que la propriété d'être *localement entière* (comme dans l'introduction 1.1.4) équivaut à une certaine propriété asymptotique des coefficients. Lorsqu'on traduit cette dernière en termes d'exposants, on trouve que pour tout paraboliq P , les exposants du module de Jacquet selon P doivent être dans le cône $\rho_P - \overline{+a_P^*}$ où ρ_P est la demi-somme des racines de A_M dans P et $\overline{+a_P^*}$ est le cône engendré par les racines simples. De là on déduit une condition nécessaire et suffisante sur un triplet de Langlands (P, σ, ψ) pour que le quotient de Langlands associé soit localement entier, ce qui donne une première classification de ces représentations. Mais je montre aussi, sous l'hypothèse de validité de (**) donc en particulier pour les groupes classiques, que la propriété d'être localement entière ne dépend que du support cuspidal. Plus précisément, le critère est que la norme du caractère central d'un élément du support cuspidal (M, σ) soit dans l'enveloppe convexe des ρ_P pour P paraboliq de Levi M . Ce polyèdre apparaît d'ailleurs aussi dans des travaux récents de Schneider-Teitelbaum [37] et Vignéras [43].

Le dernier aspect de [D6] est plus anecdotique ; on y remarque que la théorie de Harish Chandra des fonctions de Schwartz et formule de Plancherel a un analogue en coefficients p -adiques. On remarquera seulement ici que la définition de "l'algèbre de Schwartz p -adique" est non-triviale, et généralise à certains égards une construction de Lusztig pour les algèbres de Hecke-Iwahori.

2.2 Propriétés de finitude

La première partie du théorème principal de [D4] affirme que *sur un anneau de coefficients noethérien R où p est inversible, la seconde adjonction implique la noethériannité*. Une fois prouvé ce résultat, l'essentiel de [D4] est consacré à la preuve de la *seconde adjonction*, que je n'obtiens finalement que pour les groupes classiques.

Rappelons que la seconde adjonction concerne les foncteurs paraboliques : si (P, \overline{P}) est une paire de sous-groupes paraboliques opposés de sous-groupe de Levi commun $M = P \cap \overline{P}$, alors le foncteur d'induction $i_{M, \overline{P}}^G$ est adjoint à gauche du foncteur de "restriction" (module de Jacquet) $r_{G, P}^M$ tordu par l'inverse $\delta_{\overline{P}}^{-1}$ du caractère-module de P . Cette seconde adjonction est donc "opposée" à la réciprocité de Frobenius et contrairement à cette dernière, n'est pas formelle. Elle a été découverte par Bernstein [6] pour les représentations sur $R = \mathbb{C}$, redémontrée par Bushnell [15] toujours sur \mathbb{C} , mais chacune de ces preuves repose de manière essentielle sur la propriété de noethériannité des représentations complexes.

2.2.1 La seconde adjonction implique la noethériannité : [D4, Sec. 4] Précisons que l'hypothèse est récursive sur les sous-groupes de Levi : on suppose connue la seconde adjonction pour toutes les paires de paraboliques opposés de tout sous-groupe de Levi. On observe tout d'abord que, par existence d'un adjoint à droite commutant aux limites inductives quelconques, les foncteurs d'induction respectent la propriété d'être de type fini. Puis, on munit tout objet V de $\text{Mod}_R(G)$ d'une filtration fonctorielle dont les sous-quotients sont des induites paraboliques de cuspidales $i_P^G(W)$ qui sont de type fini, si V l'est. Il suffit donc de prouver que de telles induites paraboliques sont noethériennes, *i.e.* que tous leurs sous-quotients sont de type fini. En utilisant à nouveau la filtration et un argument de récurrence, il suffit de traiter les sous-quotient cuspidaux. Pour ceux-ci, il suffit de montrer qu'ils sont $R[Z_G]$ -admissibles, pour l'action naturelle de l'algèbre $R[Z_G]$ du centre de G . On peut ensuite dévisser W en des objets de la forme $W^0 \otimes R[M/M^0]$ pour W^0 admissible. Dans ce cas, le G -module $i_{M, P}^G(W)$ est muni d'une action supplémentaire de $R[M/M^0]$ pour laquelle il est *admissible*. De plus, grâce à la functorialité de la filtration, on peut se limiter à étudier les sous-quotients cuspidaux qui sont stables par $R[M/M^0]$. Soit alors \mathcal{P} un idéal premier

de $R[M/M^0]$ dans le support d'un tel sous-quotient ; on veut montrer que $R[M/M^0]/\mathcal{P}$ est fini sur $R[Z_G]$. On suppose le contraire et on munit le corps des fractions $K_{\mathcal{P}}$ de $R[M/M^0]/\mathcal{P}$ d'une valuation telle que $\nu(m) \neq 0$ pour au moins un élément $m \in [G, G] \cap M$. On peut alors utiliser un argument de [D2] qui assure qu'une induite du type $i_{M, \mathcal{P}}^G(W^0 \otimes K_{\mathcal{P}})$ ne peut pas avoir de sous-quotient cuspidal, ce qui contredit le fait que \mathcal{P} était dans le support d'un sous-quotient cuspidal de $i_{M, \mathcal{P}}^G(W)$. Le recours aux techniques de [D2] sans hypothèse supplémentaire vient de ce que les foncteurs de Jacquet commutent aux produits quelconques puisqu'ils sont supposés admettre un adjoint à gauche.

2.2.2 Stratégie pour la seconde adjonction et idempotents P -bons : Lorsqu'on étudie de près les arguments de Bernstein, on observe que la seconde adjonction équivaut à la propriété de "stabilisation" suivante : *pour toute fonction lisse $f \in \mathcal{C}_R^{\infty, c}(M)$ et tout sous-groupe ouvert compact \overline{U}_c de \overline{U} , il existe un sous-groupe ouvert compact U_c de U tel que pour tout sous-groupe ouvert compact $U'_c \supset U_c$, on a*

$$e_{U_c} e_{\overline{U}_c} f \in RGe_{U'_c} e_{\overline{U}_c} f,$$

et de même en inversant les rôles de U et \overline{U} . La notation RG désigne l'algèbre des R -distributions sur G , mais on pourrait ici tout aussi bien prendre l'algèbre de Hecke.

Pour étudier cette propriété de stabilisation, j'introduis la notion d'*idempotent P -bon* : c'est un idempotent ε de l'algèbre RM des R -distributions sur M pour lequel il existe un point x de l'immeuble étendu $B(\mathcal{M}, F)$ de M (où $M = \mathcal{M}(F)$ et \mathcal{M} est un groupe algébrique réductif sur F) avec $\varepsilon \in RM_x$ et tel que pour tout plongement isométrique équivariant $B(\mathcal{M}, F) \hookrightarrow B(\mathcal{G}, F)$, on ait les propriétés

$$e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \varepsilon \in RG_x \cdot e_{U_x} e_{\overline{U}_x} \varepsilon \quad \text{et} \quad \varepsilon e_{U_x} e_{\overline{U}_x^+} \in \varepsilon e_{U_x} e_{\overline{U}_x} RG_x.$$

Ici, M_x, G_x , etc... désignent les fixateurs dans M, G , etc... du point x vu dans $B(G, F)$, et U_x^+, \overline{U}_x^+ , etc... désignent les intersections $U \cap G_x^+$, etc... avec le pro- p -radical G_x^+ de G_x .

Par un argument dynamique sur l'immeuble, réminiscent de Moy et Prasad [30, Part. 6], on montre que *s'il existe une famille génératrice d'idempotents P -bons, au sens où $\mathcal{C}_R^{\infty, c}(M) = \sum_{\varepsilon} \mathcal{C}_R^{\infty, c}(M)\varepsilon$, alors (P, \overline{P}) vérifient la seconde adjonction [D4, Sec. 3].* Au passage, je prouve aussi sous cette condition que les foncteurs de Jacquet $r_{G, P}^M$ et $r_{G, \overline{P}}^M$ respectent la R -admissibilité.

Reste donc à produire des idempotents P -bons. Pour cela, le premier outil est une sorte de généralisation d'un théorème de Howlett et Lehrer dans [27] sur les groupes de Lie de type fini.

2.2.3 Modèles entiers lisses et idempotents essentiellement de niveau zéro : Supposons que $G = \mathcal{G}(F)$ pour un groupe algébrique réductif connexe \mathcal{G} sur le corps local F d'anneau des entiers \mathcal{O} . Un \mathcal{O} -schéma en groupes $\underline{\mathcal{G}}$ lisse sur \mathcal{O} et dont la fibre générique est isomorphe à \mathcal{G} sera appelé simplement "modèle lisse de \mathcal{G} ". On dira qu'un F -sous-groupe de Levi \mathcal{M} de \mathcal{G} est $\underline{\mathcal{G}}$ -admissible s'il est le centralisateur d'un sous-tore déployé de \mathcal{G} qui se prolonge en un sous-tore de $\underline{\mathcal{G}}$. Un sous-groupe parabolique sera dit $\underline{\mathcal{G}}$ -admissible s'il a une composante de Levi $\underline{\mathcal{G}}$ -admissible. On note alors $\underline{\mathcal{M}}, \underline{\mathcal{P}}, \underline{\mathcal{U}}$ les adhérences schématiques de \mathcal{M}, \mathcal{P} et \mathcal{U} (radical unipotent de \mathcal{P}) dans $\underline{\mathcal{G}}$. Ce sont des modèles lisses de leurs fibres génériques respectives. On note avec des lettres droites $\underline{\mathcal{G}}, \underline{\mathcal{U}}$, etc... les ensembles de points entiers, et on rajoute un exposant \dagger pour désigner l'intersection avec le pro- p -radical $\underline{\mathcal{G}}^{\dagger}$ de $\underline{\mathcal{G}}$, i.e. le noyau de la projection de $\underline{\mathcal{G}}$ sur le groupe des points rationnels du quotient réductif de la fibre spéciale de $\underline{\mathcal{G}}$.

Maintenant, un idempotent central de $R\underline{\mathcal{G}}$ est dit *essentiellement de niveau zéro* s'il appartient à $R\underline{\mathcal{G}}^{\dagger} e_{\overline{\mathcal{U}}^{\dagger}} e_{\underline{\mathcal{U}}^{\dagger}} R\underline{\mathcal{G}}^{\dagger}$ pour un parabolique $\underline{\mathcal{G}}$ -admissible *minimal* $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$. Par exemple, $e_{\underline{\mathcal{G}}^{\dagger}}$ vérifie toujours cette condition, et lorsqu'il n'y a pas de parabolique propre $\underline{\mathcal{G}}$ -admissible, alors l'unité de $R\underline{\mathcal{G}}^{\dagger}$ la vérifie tautologiquement.

Le théorème 5.4 de [D4] dit alors : *soit $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ une paire de sous-groupes paraboliques $\underline{\mathcal{G}}$ -admissibles opposés d'intersection \mathcal{M} , et ε un idempotent essentiellement de niveau zéro de $R\underline{\mathcal{M}}$. On a*

$$e_{\underline{\mathcal{U}}^{\dagger}} e_{\overline{\mathcal{U}}^{\dagger}} \varepsilon \in R\underline{\mathcal{G}} e_{\underline{\mathcal{U}}^{\dagger}} e_{\overline{\mathcal{U}}^{\dagger}} \varepsilon.$$

Lorsque $\varepsilon = e_{\underline{G}^\dagger}$, cette égalité vit en réalité dans l'algèbre du groupe des points rationnels du quotient réductif de la fibre spéciale de $\underline{\mathcal{G}}$, et n'est autre que le théorème principal de [27].

2.2.4 Paraboliqes minimaux et niveau zéro : Appliquons ce qui précède au modèle lisse de Bruhat-Tits $\underline{\mathcal{G}}_x$ associé à un point $x \in B(\underline{\mathcal{G}}, F)$: un sous-groupe de Levi \mathcal{M} est $\underline{\mathcal{G}}_x$ -admissible si et seulement si x est dans l'image d'un plongement $B(\mathcal{M}, F) \hookrightarrow B(\underline{\mathcal{G}}, F)$. Ainsi le théorème ci-dessus montre que lorsque M est minimal, l'unité de RM_x est un idempotent P -bon. Puisque cette unité forme évidemment une famille génératrice au sens donné plus haut, on en déduit la seconde adjonction pour les paires de paraboliqes opposés *minimaux*.

Pour les autres paraboliqes, le théorème précédent montre que $e_{M_x^+}$ est un idempotent P -bon. De tels idempotents, pour x variant, ne forment pas une famille génératrice de la catégorie $Mod_R(M)$ mais en engendrent un facteur direct, la sous-catégorie pleine des objets "de niveau zéro". On en déduit la seconde adjonction pour les foncteurs paraboliqes *restreints aux sous-catégories pleines des objets de niveau zéro*.

Pour aller au-delà des séries principales et du niveau zéro, on se heurte à des problèmes réminiscents de ceux rencontrés en théorie des types et strates. C'est pour cela que la théorie des caractères semi-simples de Stevens [39] joue un rôle prépondérant.

2.2.5 Paraboliqes quelconques pour les groupes classiques : Soit $\underline{\mathcal{G}}$ un modèle lisse de \mathcal{G} et x un point de $B(\underline{\mathcal{G}}, F)$ tel que $\underline{G} \subset G_x$. Soit $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ une paire de paraboliqes opposés ; si $\mathcal{M} := \mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}}$ est $\underline{\mathcal{G}}$ -admissible, alors il est aussi $\underline{\mathcal{G}}_x$ -admissible. Donnons-nous un idempotent essentiellement de niveau zéro de $R\underline{\mathcal{M}}$, et supposons qu'il existe un idempotent central $\tilde{\varepsilon}$ de $R\underline{\mathcal{G}}$ vérifiant

$$- e_{U^\dagger} \tilde{\varepsilon} e_{\overline{U}^\dagger} = e_{U^\dagger} \varepsilon e_{\overline{U}^\dagger} \text{ et de même en inversant } U \text{ et } \overline{U}.$$

$$- \text{l'ensemble d'entrelacement } I_{G_x}(\tilde{\varepsilon}) = \{g \in G_x, \tilde{\varepsilon} g \tilde{\varepsilon} \neq 0\} \text{ de } \tilde{\varepsilon} \text{ dans } G_x \text{ est } \underline{\mathcal{G}}.$$

On vérifie alors que $e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \varepsilon \in RG_x \cdot e_{U_x} e_{\overline{U}_x} \varepsilon$ [D4, 5.6]. Si pour tout x' déduit de x par un automorphisme M -équivalent de $B(\mathcal{M}, F)$, on sait trouver $\underline{\mathcal{G}}'$ avec $\underline{\mathcal{G}}' \subset G_{x'}$ satisfaisant les conditions ci-dessus, on en déduit que ε est un idempotent P -bon.

Ce schéma général s'applique aux caractères semi-simples de Stevens pour les groupes classiques. Supposons pour simplifier que $\mathcal{G} = \mathcal{GL}_n$ est le groupe algébrique associé à la F -algèbre $End_F(V)$ des endomorphismes d'un F -espace vectoriel de dimension n . Un point x de l'immeuble correspond à une fonction-réseau Λ comme dans [14], laquelle détermine un ordre héréditaire $\mathfrak{a}(\Lambda)$ de $End_F(V)$ dont le groupe des inversibles n'est autre que G_x . Si $[\Lambda, n, 0, \beta]$ est une strate semi-simple [39], lui sont associés deux \mathcal{O} -ordres $\mathfrak{h}(\Lambda, \beta) \subset \mathfrak{j}(\Lambda, \beta) \subset \mathfrak{a}(\Lambda)$ et un ensemble de caractères dits semi-simples du groupe $\mathfrak{h}(\Lambda, \beta) \cap G_x^+$. Notons que ces caractères prennent leurs valeurs dans l'anneau des entiers $\mathbb{Z}_{p\text{-cycl}}$ de l'extension p -cyclotomique maximale de \mathbb{Q} .

Maintenant l'ordre $\mathfrak{j}(\Lambda, \beta)$ détermine un modèle lisse \mathcal{J} de \mathcal{G} . Les Levis \mathcal{J} -admissibles sont ceux qui contiennent un conjugué de β par $J := \mathcal{J}(\mathcal{O})$. Si \mathcal{M} est un tel Levi et si θ est un caractère semi-simple, alors la restriction $\theta|_{\mathcal{M}}$ est aussi un caractère semi-simple. On vérifie alors que l'idempotent $e_{\theta|_{\mathcal{M}}}$ associé est essentiellement de niveau zéro pour le modèle de \mathcal{M} obtenu comme adhérence schématique de \mathcal{M} dans \mathcal{J} , et que l'idempotent e_θ satisfait aux deux conditions ci-dessus, de sorte que $e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} e_{\theta|_{\mathcal{M}}} \in \mathbb{Z}_{p\text{-cycl}}[\frac{1}{p}]G_x \cdot e_{U_x} e_{\overline{U}_x} e_{\theta|_{\mathcal{M}}}$ [D4, Prop. 7.3].

Puis on prouve que tout caractère semi-simple de M associé à une famille de strates semi-simples $[\Lambda_i, n_i, 0, \beta_i]$ pour l'algèbre $End_F(V_i)$ où $V = \bigoplus_i V_i$ est la décomposition associée à M , est la restriction d'un caractère semi-simple associé à une strate $[\Lambda = \bigoplus_i \Lambda_i, n, 0, \beta]$ [D4, Prop. 7.4]. Ceci montre en particulier que les idempotents associés aux caractères semi-simples sont P -bons.

Enfin on prouve, en adaptant les arguments originaux de Bushnell-Kutzko et Stevens, que la famille des idempotents associés aux caractères semisimples *engendre* $Mod_{\mathbb{Z}_{p\text{-cycl}}[\frac{1}{p}]}(G)$ [D4, Prop. 7.5]. Cela conclut la preuve de la seconde adjonction pour la paire $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ sur tout anneau au-dessus de $\mathbb{Z}_{p\text{-cycl}}[\frac{1}{p}]$, et on descend sans problèmes à tout anneau où p est inversible.

Remarquons ici que la même stratégie devrait pouvoir s'appliquer aux types de Yu pour les groupes "modérés", *i.e.* ceux dont tous les sous-tores sont modérément ramifiés. En fait, le papier [45] contient certainement le nécessaire pour prouver que l'idempotent associé à un caractère "générique" est P -bon. Par contre, il manque la propriété cruciale d'engendrement de la catégorie

$\text{Mod}_R(G)$. Signalons que J.-L. Kim a annoncé une preuve de l'exhaustivité de la construction de Yu pour les supercuspidales sur $R = \mathbb{C}$, mais sa preuve est analytique (!) et ne donne a priori pas d'information sur les représentations à coefficients dans un anneau R général, contrairement à ce que pourrait donner un procédé de raffinement de strates similaire à celui de Bushnell et Kutzko.

2.2.6 Induction parahorique : Soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un F -sous-groupe parabolique de \mathcal{G} . Rappelons que l'induction parabolique $i_{M,P}^G$ relie les représentations de M à celles de G en deux temps : on induit de P à G après avoir prolongé trivialement de M à P . Donnons-nous maintenant un point x de $B(\mathcal{M}, F)$ et un plongement $B(\mathcal{M}, F) \hookrightarrow B(\mathcal{G}, F)$. L'induction *parahorique* $I_{x,P}$ relie les représentations de M_x à celles de G_x en deux temps : on induit de $G_x^+ P_x$ à G_x après avoir "prolongé" *non trivialement* de M_x à $G_x^+ P_x$. Ce "prolongement" repose sur la décomposition d'Iwahori $G_x^+ P_x = \overline{U}_x^+ \cdot M_x \cdot U_x$.

Si H est un groupe profini, muni de trois sous-groupes fermés V, L, \overline{V} tels que L normalise V et \overline{V} , on dit que le triplet (V, L, \overline{V}) induit une *décomposition d'Iwahori* de G si la multiplication est une bijection $V \times L \times \overline{V} \xrightarrow{\sim} H$ et s'il existe une base de voisinages de l'unité dans H formée de sous-groupes normaux de la forme $H_i = (H_i \cap V)(H_i \cap L)(H_i \cap \overline{V})$. Supposons de plus que V et \overline{V} sont pro- p , et notons e_V et $e_{\overline{V}}$ les idempotents associés dans l'algèbre $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]H$ des distributions sur H à valeurs dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$. La proposition 2.2. de [D4] affirme : *il existe un unique élément central et inversible $z_{V\overline{V}}$ dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]L$ tel que le produit $e_{V\overline{V}} := z_{V\overline{V}} e_V e_{\overline{V}}$ soit un idempotent dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]H$.*

Notons au passage que ceci s'applique aux groupes de la forme $H = \underline{G}^\dagger \underline{P}$ munis de leur décomposition d'Iwahori $\overline{U}^\dagger \cdot \underline{M} \cdot U$; c'est d'ailleurs un ingrédient primordial de la preuve du théorème 5.4 de [D4] évoqué plus haut.

De cette propriété de "quasi-idempotence", on déduit une paire de foncteurs adjoints des deux côtés entre représentations de L et représentations de H , donnés par produit tensoriel par le (L, H) -bi-module $e_{V\overline{V}} \mathcal{C}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}^\infty(H)$ (fonctions lisses). Le foncteur $\text{Mod}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(L) \longrightarrow \text{Mod}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(H)$ ainsi obtenu n'est pas à proprement parler un foncteur de prolongement ou d'inflation, mais garde certaines propriétés de tels foncteurs : il envoie irréductibles sur irréductibles et le composé avec son adjoint est le foncteur identité de $\text{Mod}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(L)$.

En appliquant ceci à la décomposition $G_x^+ P_x = \overline{U}_x^+ M_x U_x$, on obtient la première étape de l'induction parahorique $I_{x,P}$. Celle-ci a un adjoint des deux côtés noté $R_{x,P}$ et appelé "restriction parahorique".

2.2.7 Commutation des foncteurs parahoriques aux foncteurs paraboliques : L'origine de ces foncteurs parahoriques se trouve dans les conclusions de ma thèse, notamment dans le papier [19]. On y a montré que pour étudier les propriétés de finitude des représentations à coefficients généraux, il était intéressant de pouvoir identifier l'induite parabolique d'une "induite compacte" (abréviation de "induite à support compact d'une représentation d'un sous-groupe ouvert compact") à une "induite compacte". Dans [19], on se restreignait au cas d'un corps de coefficients et on montrait comment les paires couvrantes de la théorie de Bushnell-Kutzko pour GL_n fournissaient des exemples de telles identifications. Ceci a d'ailleurs été amélioré par C. Blondel dans [9].

Le procédé d'induction parahorique était pour moi une tentative pour produire de manière fonctorielle des représentations qui partagent ces vertus des paires couvrantes. Lorsque P est un parabolique *minimal*, cela s'avère fonctionner parfaitement : on obtient en effet des isomorphismes de foncteurs [D4, (1,4)] :

$$\text{ind}_{G_x}^G \circ I_{x,P} \simeq i_{M,P}^G \circ \text{ind}_{M_x}^M \quad \text{et} \quad \text{Res}_M^{M_x} \circ r_{G,P}^M \simeq R_{x,P} \circ \text{Res}_G^{G_x}$$

Notons que même lorsque $R = \mathbb{C}$, ces relations sont nouvelles. On peut d'ailleurs les comparer aux "types de Roche" dans le cas où G est déployé : en effet, M est alors un tore déployé maximal et le groupe $G_x^+ P_x$ est un Iwahori ; si χ est un caractère de M , Roche [35] lui associe un sous-groupe ouvert compact J_χ , que l'on peut supposer inclus dans $G_x^+ P_x$, et pour lequel χ se prolonge en un caractère ρ_χ , le couple (J_χ, ρ_χ) étant une paire couvrante au sens de Bushnell-Kutzko du couple

$(M_x, \chi|_{M_x})$. On a alors la relation $I_{x,P}(\chi) = \text{ind}_{J_x}^{G_x}(\rho_\chi)$. La paire $(G_x, I_{x,P}(\chi))$ a sur la paire couvrante de Roche l'avantage que le groupe ne dépend plus de χ , et que la représentation en dépend fonctoriellement ; le prix à payer est que cette représentation est un peu plus compliquée : elle n'est plus un caractère et n'est plus triviale sur les "côtés unipotents".

Après de nombreuses tentatives acharnées pour généraliser les relations de commutation ci-dessus au cas des paraboliques *non-minimaux*, je me suis convaincu qu'elles doivent être fausses, bien que je n'aie pas non-plus trouvé de contre-exemple formel. Cependant, ces relations sont des cas particuliers des relations suivantes, prouvées dans [D4, Cor. 3.5], et valables pour un parabolique P quelconque et un idempotent P -bon $\varepsilon \in RM$:

$$i_{M,P}^G \circ \text{ind}_{M_x}^M \circ T_\varepsilon \simeq \text{ind}_{G_x}^G \circ I_{x,P} \circ T_\varepsilon \quad \text{et} \quad \varepsilon \cdot \text{Res}_M^{M_x} \circ r_{G,P}^M \simeq \varepsilon \cdot R_{x,P} \circ \text{Res}_G^{G_x}$$

où T_ε est le foncteur $A \in \text{Mod}(\varepsilon RM_x \varepsilon) \mapsto \mathcal{C}_R^\infty(M_x) \varepsilon \otimes_{\varepsilon RM_x \varepsilon} A \in \text{Mod}_R(M_x)$.

3 Théorie de Lubin-Tate non-abélienne

Fixons un corps local non-archimédien K de caractéristique résiduelle p , et un entier $d > 0$. Notons $\widehat{K^{ca}}$, resp. $\widehat{K^{nr}}$, la complétion d'une clôture algébrique, resp. d'une extension non-ramifiée maximale de K , et W_K le groupe de Weil de $\widehat{K^{ca}}$ sur K .

3.1 Espaces symétriques de Drinfeld

L'espace symétrique de Drinfeld $\Omega = \Omega_K^{d-1}$ est un K -espace analytique dont l'ensemble des $\widehat{K^{ca}}$ -points est le complémentaire dans $\mathbb{P}^{d-1}(\widehat{K^{ca}})$ de la réunion des hyperplans K -rationnels. À l'origine, Drinfeld le définit comme un espace rigide, mais nous utilisons plutôt le langage des espaces analytiques de Berkovich, pour lesquels le formalisme cohomologique étale est plus développé. Par définition Ω est muni d'une action de $G := PGL_d(K)$, qui est "continue" au sens de Berkovich [4, par. 6-7]. Dans ce contexte ce dernier définit le "topos étale $PGL_d(K)$ -équivariant continu" de Ω et le munit d'un foncteur $\Gamma_c(\Omega^{ca}, -)$ "sections à support compact sur $\Omega^{ca} := \Omega_K^{d-1} \widehat{\otimes} \widehat{K^{ca}}$ " à valeurs dans le topos des ensembles discrets munis d'une action continue (donc localement constante) de $PGL_d(K) \times W_K$, [5]. En dérivant le foncteur Γ_c induit sur les catégories de Λ -modules correspondantes, pour un anneau de torsion Λ , on obtient un complexe $R\Gamma_c(\Omega^{ca}, \Lambda)$ dans la catégorie dérivée de la catégorie abélienne des Λ -modules discrets munis d'une action continue de $PGL_d(K) \times W_K$, et dont la cohomologie est la cohomologie à supports compacts de Ω . J'explique dans l'appendice B de [D3] comment adapter aux coefficients l -adiques et définir aussi un complexe $R\Gamma_c(\Omega^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ dans la catégorie dérivée bornée $D_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^b(G)$ de $\text{Mod}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(G)$, et muni d'une action de W_K .

3.1.1 Énoncé principal : Les représentations de G qui vont intervenir sont les "séries principales elliptiques". Ce sont les sous-quotients irréductibles de l'induite du caractère trivial d'un Borel. Rappelons que la correspondance de Langlands locale [28] [24] [26] associe à une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation lisse irréductible π de $GL_d(K)$ une représentation *continue* $\sigma_d(\pi)$ de W_K dans un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -espace de dimension d . Voici le résultat principal de [D3] :

Pour toute série principale elliptique π de $GL_d(K)$, il existe un isomorphisme W_K -équivariant

$$(*) \quad \mathcal{H}^* \left(R\text{Hom}_{D_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^b(PGL_d(K))} (R\Gamma_c(\Omega_K^{d-1,ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l), \pi) \right) \xrightarrow{\sim} \sigma_d(\pi) \otimes | \cdot |^{-\frac{d-1}{2}}.$$

Si π est lisse irréductible mais pas principale elliptique alors le terme de gauche est nul.

Ici, le complexe de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -espaces vectoriels $R\text{Hom}_{D_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^b(PGL_d(K))} (R\Gamma_c(\Omega_K^{d-1,ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l), \pi) \in D^b(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ est muni d'une action de W_K , héritée de celle de $R\Gamma_c$, et \mathcal{H}^* désigne l'équivalence de catégories triangulées entre $D^b(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ et la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -espaces vectoriels \mathbb{Z} -gradués "à support fini",

$\mathcal{H}^* : \mathcal{C}^\bullet \in D^b(\overline{\mathbb{Q}}_l) \mapsto \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i(\mathcal{C}^\bullet)$. Ainsi le $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -espace vectoriel \mathbb{Z} -gradué du terme de gauche de $(*)$ est muni d'une action linéaire et graduée de W_K , et l'énoncé ci-dessus oublie la \mathbb{Z} -gradation. Enfin, la notation $|-|$ désigne le caractère non-ramifié de W_K qui envoie les Frobenius arithmétiques sur l'ordre q du corps résiduel de K . Notons que l'on prouve aussi dans [D3] le même énoncé, mais à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_l$ pour l banal, c'est-à-dire ne divisant pas $q^d - 1$, et en remplaçant la correspondance de Langlands par la correspondance de Langlands-Vignéras.

L'énoncé ci-dessus est volontairement "abstrait", mais le principe de la preuve est de tout expliciter, en particulier l'algèbre des endomorphismes de $R\Gamma_c(\Omega^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$.

3.1.2 Séries principales elliptiques : Notons B le Borel des matrices triangulaires supérieures de $GL_d(K)$, et numérotions l'ensemble des racines simples $S = S_d$ de 1 à $d - 1$ de haut en bas sur la diagonale $\{(i, j), j - i = 1\}$. Les sous-groupes paraboliques contenant B sont classifiés par les sous-ensembles de S ; à $I \subseteq S$ on associe le parabolique P_I dont l'algèbre de Lie contient les vecteurs radiciels associés aux racines de $-I$. On a donc $P_\emptyset = B$ et $P_S = G$. On sait alors que l'induite $Ind_{P_I}^G(1)$ possède un unique quotient irréductible π_I , et que l'application $I \mapsto \pi_I$ est une bijection entre l'ensemble des parties de S et l'ensemble des séries principales elliptiques. Par exemple, π_\emptyset est la représentation de Steinberg et π_S est la représentation triviale.

Les correspondantes de Langlands de ces représentations ont la même semi-simplifiée, à savoir $\sigma_d(\pi_S) := (\overline{\mathbb{Q}}_l \oplus \overline{\mathbb{Q}}_l(1) \oplus \dots \oplus \overline{\mathbb{Q}}_l(d-1)) \otimes |-|^{-\frac{1-d}{2}}$. Elles se distinguent donc les unes des autres par leur opérateur de monodromie N_I qui est donné par la matrice de Jordan qui a des zéros en les éléments de I et des 1 en les éléments de $S \setminus I$.

L'ingrédient de théorie des représentations principal est le calcul des groupes d'extensions entre séries principales elliptiques et des cup-produits correspondants. Il est effectué dans la partie 2 de [D3]; le résultat est valable pour tout groupe semi-simple déployé et sur tout anneau de coefficients *fortement banal* au sens de [D3, 2.1.6].

Posons $\delta(I, J) = |I \cup J| - |I \cap J|$ pour $I, J \subseteq S$.

i) Soient I, J deux sous ensembles de S , alors :

$$Ext_G^*(\pi_I, \pi_J) = \begin{cases} \overline{\mathbb{Q}}_l & \text{if } * = \delta(I, J) \\ 0 & \text{if } * \neq \delta(I, J) \end{cases} .$$

ii) Soient I, J, K trois sous-ensembles de S tels que $\delta(I, J) + \delta(J, K) = \delta(I, K)$, alors le cup-produit

$$\cup : Ext_G^{\delta(I, J)}(\pi_I, \pi_J) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} Ext_G^{\delta(J, K)}(\pi_J, \pi_K) \longrightarrow Ext_G^{\delta(I, K)}(\pi_I, \pi_K)$$

est un isomorphisme.

Notons que le premier point a aussi été obtenu indépendamment par Orlik [31], par une méthode plus simple, mais qui ne donne pas les cup-produits. Notre méthode consiste à exhiber des résolutions des π_I analogues à la résolution de la Steinberg donnée par le complexe de chaînes de l'immeuble sphérique. On utilise pour cela la théorie des opérateurs d'entrelacement, et lorsqu'on travaille avec des coefficients généraux ou modulaires, on utilise sa généralisation dans [D2, sec. 7]. Ensuite, les suites spectrales déduites de ces résolutions permettent le calcul des cup-produits.

3.1.3 Stratégie pour le théorème principal : Le point de départ est la connaissance des espaces de cohomologie $H_c^i(\Omega^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ munis de leur action sous $G \times W_K$. Notons que la cohomologie à supports compact ne satisfait pas les axiomes imposés par Schneider et Stuhler dans leur calcul [36], mais on peut la deviner à partir de ce calcul, puisqu'elle doit être *duale* de la cohomologie ordinaire et *lisse* par Berkovich. Néanmoins, plutôt que de rendre rigoureuse cette intuition de dualité, j'ai donné dans [D3, Sec. 3] un calcul direct, à partir d'un certain recouvrement ouvert de Ω de nerf l'immeuble de Bruhat-Tits (alors que l'argument de [36] reposait sur la combinatoire de l'immeuble de Tits "à l'infini"). Le résultat est donc que pour $i = 0, \dots, d - 1$, on a $H_c^{d-1+i}(\Omega^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \simeq \pi_{\{1, \dots, i\}} \otimes |-|^i$, les autres H_c^j étant tous nuls.

Pour prouver le théorème principal, il y a quatre étapes, cf [D3, Sec. 4] :

- i) On observe que le complexe de cohomologie est *scindable*, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme $R\Gamma_c(\Omega^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_i H_c^i(\Omega^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[-i]$ dans $D^b(G)$. Pour cela, deux arguments sont possibles ; d'une part le calcul des espaces de cohomologie et de leurs extensions mutuelles montre que tout complexe dans $D^b(G)$ ayant la cohomologie de $R\Gamma_c$ est scindable. D'autre part, comme W_K agit sur les objets de cohomologie via des caractères de poids deux-à-deux distincts, tout relèvement de Frobenius permet de scinder le complexe ; plus précisément, si ϕ est un tel relèvement, il existe un *unique* scindage ϕ -équivariant [D3, A.1].
- ii) On calcule l'algèbre des endomorphismes de $R\Gamma_c$; tout scindage induit un isomorphisme d'algèbres $End_{D^b(G)}(R\Gamma_c) \simeq \bigoplus_{i \leq j} Ext_G^{j-i}(H_c^{d-1+j}, H_c^{d-1+i})$, le terme de droite étant muni du cup-produit. D'après la forme des H_c^i et le calcul des extensions, chaque Ext intervenant est une droite sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$. D'après le calcul des cup-produits, l'algèbre du terme de droite est une algèbre triangulaire supérieure.
- iii) On commence à expliciter l'action de W_K sur $R\Gamma_c$, donnée par un morphisme $\gamma : W_K \longrightarrow End_{D^b(G)}(R\Gamma_c)$. On se souvient d'abord que l'action de W_K sur la $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -cohomologie provient d'une action sur la \mathbb{Z}_l -cohomologie et on montre que $End_{D^b(G)}(R\Gamma_c(\Omega^{ca}, \mathbb{Z}_l))$ est un module de type fini sur \mathbb{Z}_l , d'où l'on déduit que le groupe des automorphismes qui sont triviaux en cohomologie est un pro- l -groupe. La restriction de γ à l'inertie se factorise par ce groupe donc est automatiquement continue et se factorise via le quotient l -adique $I_K \xrightarrow{t_l} \mathbb{Z}_l(1)$ par une exponentielle $\gamma(i) = \exp(t_l(i)N)$ pour un (unique) endomorphisme nilpotent N de $R\Gamma_c$. Vue la relation entre ϕ et N , on peut choisir une identification de $End_{D^b(G)}(R\Gamma_c)$ avec l'algèbre des matrices triangulaires supérieures qui envoie N sur une matrice de Jordan. Reste à déterminer laquelle.
- iv) On montre que la matrice de Jordan est la régulière, autrement dit que N est d'ordre de nilpotence d . C'est le point le plus difficile de l'argument. On utilise pour cela le modèle formel semi-stable de Ω dû à Deligne, et on quotiente par l'action d'un sous-groupe discret et sans torsion Γ de G . On obtient un schéma formel semi-stable auquel on peut appliquer le formalisme de Rapoport-Zink [33] pour calculer les cycles évanescents [D3, 4.3.2]. Ce formalisme fournit le premier terme d'une suite spectrale qui calcule la cohomologie du quotient et sur lequel l'action de N est explicite. En général il est très difficile d'en déduire quoi que ce soit sur l'aboutissement, sauf sur les sous-espaces de poids extrêmes qui dépendent de la combinatoire du complexe simplicial associé à la fibre spéciale [D3, 4.3.3]. Il suffit en particulier de prouver qu'ils sont non-nuls pour avoir $N^{d-1} \neq 0$. Pour cela, il suffit de bien choisir Γ (notons que si on ne s'intéresse qu'aux coefficients l -adiques, on peut prendre n'importe quel Γ non-trivial).
- v) À ce point, on a explicité le complexe $R\Gamma_c$ et décrit l'action de W_K dont il est muni. Le calcul de $RHom_{D^b(G)}(R\Gamma_c, \pi)$ et la description de son action par W_K n'est plus qu'un exercice de combinatoire reposant sur les formules donnant les Ext et cup-produits entre séries principales elliptiques [D3, 4.4]. La facilité du calcul n'enlève rien au côté quelque peu miraculeux de l'ensemble : cette harmonie entre cohomologie du demi-plan, cohomologie des représentations elliptiques et correspondance de Langlands.

Pour conclure et en guise d'application, on déduit du résultat principal que les variétés uniformisées par Ω vérifient la conjecture Monodromie-Poids de Deligne. Ceci était connu grâce à Ito, qui utilise aussi la suite spectrale de Rapoport-Zink mais en étudiant tous les termes.

3.2 Les deux tours

3.2.1 La tour de Drinfeld : Dans un article fondamental [21], voir aussi [11], Drinfeld a montré qu'après extension de \mathcal{O} à la complétion d'une extension étale maximale $\widehat{\mathcal{O}^{nr}}$, le modèle formel de Deligne de son espace symétrique Ω^{d-1} classifie des groupes formels de dimension d munis d'une action de l'anneau des entiers \mathcal{O}_D de l'algèbre à division d'invariant $1/d$ sujette à une certaine condition infinitésimale et d'une quasi-isogénie de la fibre spéciale avec un certain groupe formel

constant explicite. Par le jeu des structures de niveau, on en déduit une tour $(\mathcal{M}_{Dr,n}^{nr})_{n \in \mathbb{N}}$ de \widehat{K}^{nr} -espaces analytiques munis d'une action de $G := GL_d(K)$ et qui sont des revêtements Galoisiens de $\Omega^{nr} \times \mathbb{Z}$, de groupes respectifs $\mathcal{O}_D^\times / (1 + \varpi^n \mathcal{O}_D)$. Après extension des scalaires, on peut étendre l'action des groupes G , I_K et \mathcal{O}_D^\times en une action du produit triple $G \times D^\times \times W_K$ sur chaque $\mathcal{M}_{Dr,n}^{ca}$. Une version du théorème principal de [D5] généralise celui de [D3] en remplaçant Ω^{ca} par $\mathcal{M}_{Dr,n}^{ca}$, les “séries principales elliptiques” par les “représentations elliptiques de niveau n ”, et en incorporant la correspondance de Jacquet-Langlands convenablement étendue. Les ingrédients principaux dans le cas de Ω étaient :

- La connaissance de la cohomologie
- Le calcul d’extensions et cup-produits entre séries principales elliptiques
- La description de l’action de W_K sur le complexe, pour laquelle l’argument principal repose sur l’existence d’un modèle semi-stable.

Parmi ces arguments, la premier est déjà problématique à généraliser ; la forme de la cohomologie a été conjecturée par Harris (notes “secrètes”) à la suite de [23], mais aucune preuve “directe” n’est connue à ce jour. Le deuxième argument est le seul qui se généralise facilement : les représentations elliptiques sont celles dont le caractère est non-nul sur les éléments elliptiques, ou de manière équivalente, qui ont le même support cuspidal qu’une série discrète [D5, lemme 2.1.6]. Par le formalisme de Bushnell-Kutzko [16], on peut ramener les calculs d’extensions et cup-produits entre représentations elliptiques à celui déjà effectué pour les séries principales elliptiques de groupes linéaires plus petits sur des corps plus gros. Enfin, le troisième argument est le plus inquiétant : en l’absence de modèle semi-stable, je ne vois aucun moyen direct de contrôler l’ordre de nilpotence de N , sans s’en remettre à la conjecture monodromie-poids de Deligne pour les quotients algébrisables de ces espaces.

Le salut vient d’une autre tour, la tour de Lubin-Tate, des travaux de Boyer sur cette tour, et de ceux de Faltings et Fargues sur le lien entre les deux tours.

3.2.2 La tour de Lubin-Tate : Cette tour, que nous noterons $(\mathcal{M}_{LT,n}^{nr})_{n \in \mathbb{N}}$ est constituée de \widehat{K}^{nr} -espaces analytiques munis d’une action continue de \mathcal{O}_D^\times . Le premier étage $\mathcal{M}_{LT,1}^{nr}$ est la fibre générique de l’espace des déformations par quasi-isogénies d’un \mathcal{O} -module formel de dimension 1 et \mathcal{O} -hauteur d (une union disjointe indexée par \mathbb{Z} de boules unités de dimension $d-1$) et les étages suivants, définis par le jeu des structures de niveau, en sont des revêtements Galoisiens de groupes respectifs $GL_d(\mathcal{O}/\varpi^n \mathcal{O})$. Comme dans le cas “Drinfeld”, on peut munir le système projectif des $(\mathcal{M}_{LT,n}^{ca})_{n \in \mathbb{N}}$ d’une action du produit $G \times D^\times \times W_K$, mais l’action de G se fait par correspondances et ne stabilise pas chaque $\mathcal{M}_{LT,n}^{ca}$. Plus précisément, introduisons la catégorie $\mathbb{N}(G)$ dont les objets sont les entiers strictement positifs et les morphismes sont donnés par $Hom_{\mathbb{N}(G)}(n, m) = \{g \in G, gM_d(\mathcal{O})g^{-1} \subset \varpi^{m-n}M_d(\mathcal{O})\}$. Alors la famille des $\mathcal{M}_{LT,n}^{ca}$ est l’image d’un foncteur de source $\mathbb{N}(G)$ à valeurs dans les \widehat{K}^{ca} -espaces algébriques munis d’une action de $D^\times \times W_K$. Le topos total \mathcal{M}_{LT}^{ca} du topos fibré étale $D^\times \times W_K$ -équivant associé à ce $\mathbb{N}(G)$ -diagramme est naturellement muni d’un foncteur “sections à supports compacts sur la tour” $\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{ca}, -)$, à valeurs dans le topos des ensembles discrets munis d’une action continue (donc localement constante) de $GD := (G \times D^\times) / K_{diag}^\times$ et de W_K . Après quelques inévitables contorsions l -adiques [D5, 3.3], on obtient un complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ dans la catégorie $D_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^b(GD \times W_K^{disc})$ où le *disc* signifie qu’on oublie la topologie de W_K . La cohomologie de ce complexe coïncide avec la cohomologie de la tour de Lubin-Tate, telle qu’elle a été définie et étudiée par Carayol [17], Boyer [12], Harris et Taylor [24], etc...

3.2.3 Le théorème de Faltings et Fargues : Dans un “article” peu détaillé, Faltings explique rapidement comment passer d’une tour à l’autre, et énonce en particulier la conséquence la plus intéressante, à savoir que les cohomologies sont isomorphes et de manière $G \times D^\times \times W_K$ -équivalente. Dans un travail récemment terminé et sensiblement plus long, Fargues reprend et complète les arguments et les résultats de Faltings. L’énoncé de [22] le plus utile à [D5] exhibe une équivalence entre le topos \mathcal{M}_{LT}^{ca} évoqué ci-dessus et le topos \mathcal{M}_{Dr}^{ca} , défini de manière analogue (topos total associé au topos fibré étale équivalent...) du côté Drinfeld, et qui échange les foncteurs

“sections à supports compacts le long de la tour”. En particulier, les complexes $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ et $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ sont isomorphes dans $D^b(GD \times W_K^{disc})$; on les notera simplement $R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ ou même $R\Gamma_c$.

3.2.4 Énoncé principal : La correspondance de Jacquet-Langlands étendue par linéarité $JL : R(D^\times) \rightarrow R(G)$ aux groupes de Grothendieck admet une rétraction $LJ : R(G) \rightarrow R(D^\times)$ dont le noyau est le sous-groupe engendré par les induites paraboliques [D5, 2.1.5] ou, plus généralement, [2, Thm 3.2.c]. On vérifie que $LJ(\pi)$ est nul si π n’est pas elliptique et est une irréductible au signe près si π est elliptique. Dans ce cas on note encore $LJ(\pi)$ cette irréductible (sans le signe); c’est la correspondante de Jacquet-Langlands de l’unique série discrète de même support cuspidal que π . Le théorème principal de [D5] affirme

Pour toute représentation lisse irréductible π de $GL_d(K)$, on a

$$\mathcal{H}^* \left(R\mathrm{Hom}_{D^b(G)}(R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l), \pi) \right)_{D^\times \times W_K} \simeq LJ(\pi) \otimes \sigma_d(\pi) | - |^{\frac{d-1}{2}}.$$

Évidemment, ceci n’est intéressant que lorsque le terme de droite est non-nul, c’est-à-dire lorsque π est elliptique. Si dans le premier terme, on remplace $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ par $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr,n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, alors dans l’énoncé il faut imposer à $LJ(\pi)$ d’avoir des invariants sous $1 + \varpi^n \mathcal{O}_D$. Comme corollaire, on obtient la validité de la conjecture monodromie-poids de Deligne pour les variétés uniformisées par les $\mathcal{M}_{Dr,n}$, c’est-à-dire de la forme $\mathcal{M}_{Dr,n}/\Gamma$ avec Γ sous-groupe discret cocompact de G .

3.2.5 La stratégie : On commence par découper $R\Gamma_c$ selon l’action de D^\times . Plus précisément, on fixe une irréductible ρ de D^\times et on définit la partie isotypique $R\Gamma_c[\rho]$ qui est un objet de la catégorie dérivée $D_{\omega_\rho}^b(G)$ des représentations de G de caractère central ω_ρ , muni d’une action de W_K [D5, Sec. 4]. On est alors ramené à prouver que

$$\mathcal{H}^* \left(R\mathrm{Hom}_{D_{\omega_\rho}^b(G)}(R\Gamma_c[\rho], \pi) \right)_{W_K} \simeq \sigma_d(\pi) | - |^{\frac{d-1}{2}}$$

lorsque π est elliptique et $\rho = LJ(\pi)$. Pour cela, le point de départ est la description de la cohomologie due à Boyer. On renvoie le lecteur à [D5, 4.1] pour un énoncé précis, et on se contente de remarquer que les représentations qui apparaissent sont des elliptiques particulières, qui généralisent les représentations de Schneider-Stuhler, au même titre que les séries discrètes généralisent la Steinberg. On suit alors les mêmes étapes que pour Ω , cf 3.1.3, avec les mêmes preuves, parfois un peu plus techniques, jusqu’à avoir réduit le problème à montrer que l’ordre de nilpotence de l’opérateur de monodromie N_ρ associé à l’action potentiellement unipotente de l’inertie I_K sur $R\Gamma_c[\rho]$ est égal à la longueur cohomologique d_ρ de $R\Gamma_c[\rho]$ (qui est aussi la profondeur du support cuspidal de $JL(\rho)$). Pour résoudre ce dernier point, la description de la cohomologie ne suffit pas; on doit utiliser certaines étapes de la preuve de Boyer.

3.2.6 Variétés de Shimura-Harris-Taylor et monodromie : Nous avons introduit la tour de Lubin-Tate comme une tour de \widehat{K}^{nr} -espaces analytiques, oubliant en cela deux faits fondamentaux : d’une part elle est la fibre générique d’une tour de $\widehat{\mathcal{O}}^{nr}$ -schémas formels $(\widehat{\mathcal{M}}_{LT,n}^{nr})_{n \in \mathbb{N}}$, définis au-dessus de l’espace des déformations $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,1}^{nr}$ via les structures de niveau de Drinfeld, et d’autre part cette tour de schémas formels s’identifie (grosso-modo) avec la complétion formelle d’une tour de variétés de Shimura “simples” $(\mathcal{S}_{HT,n})_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur \mathcal{O} , en un point “supersingulier”. Ainsi, d’après la théorie de Berkovich, la cohomologie à supports compacts de la tour \mathcal{M}_{LT}^{nr} s’identifie à la contragrédiente de la limite inductive des cycles évanescents des $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,n}^{nr}$, lesquels s’identifient respectivement à la fibre au point supersingulier des cycles évanescents de la variété $\mathcal{S}_{HT,n}$. A priori, ceci n’est pas suffisant pour étudier le complexe de cohomologie $R\Gamma_c$ dans la catégorie dérivée G -équivariante. Cependant, la tour de Shimura $(\mathcal{S}_{HT,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est l’image d’un $\mathbb{N}(G)$ -diagramme en \mathcal{O} -schémas propres, obtenu par le formalisme des structures de niveau de Drinfeld; on peut associer à ce diagramme un topos total “fibre générique” \mathcal{S}_{HT}^η , muni d’un foncteur exact à gauche “cycles

évanescents” ψ à valeurs dans le topos total “fibre spéciale” \mathcal{S}_{HT}^s , ainsi qu’un foncteur “fibre en un point supersingulier” x^* à valeurs dans le topos des préfaisceaux sur $\mathbb{N}(G)$, lequel est muni d’un foncteur “limite inductive” δ^* à valeurs dans les ensembles discrets munis d’une action continue de G . Lorsqu’on dérive la composée $\delta^* \circ x^* \circ \psi$ en le faisceau l -adique $\overline{\mathbb{Q}}_l$ (on passe sous silence les abominables complications l -adiques), on obtient un objet de $D_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^b(G)$ qui est le dual de $R\Gamma_c$.

Dans la suite nous trichons légèrement pour tenter d’exposer les idées sans les terribles complications techniques. Qu’a-t-on gagné avec le formalisme ci-dessus ?

- i) Si l’on restreint l’objet $R\psi(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ de la catégorie dérivée l -adique du topos \mathcal{S}_{HT}^s à un étage n , on obtient le complexe des cycles évanescents de $\mathcal{S}_{HT,n}$ qui est un *faisceau pervers*. On montre alors [D5, appendice] que la sous-catégorie \mathcal{C} des objets vérifiant cette propriété de “perversité à tous les étages” est abélienne et que le foncteur qui à un objet de \mathcal{C} associe le système des faisceaux pervers sur chaque étage (un tel système est appelé “faisceau pervers de Hecke” dans [12] et [D5]) est une équivalence. C’est une application des idées de [3, Sec. 3].
- ii) L’objet $R\psi(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ de \mathcal{C} est muni d’une filtration de monodromie qui, par ce qui précède, est connue si on la connaît à tous les étages. On peut de plus regarder sa partie $\sigma(\rho)$ -isotypique où $\sigma(\rho)$ est la correspondante de Langlands de ρ . La fibre en un point supersingulier de cette partie $\sigma(\rho)$ -isotypique est *grosso-modo* le dual de ce qui nous intéresse, à savoir $R\Gamma_c[\rho]$. On a donc muni ce dernier d’une filtration de monodromie. On veut alors étudier le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 R\Gamma_c[\rho] & \xrightarrow{N_\rho^{d_\rho-1}} & R\Gamma_c[\rho] \\
 \text{can}_+ \downarrow & & \uparrow \text{can}_- \\
 gr_{d_\rho-1}^M R\Gamma_c[\rho] & \xrightarrow{\sim} & gr_{1-d_\rho}^M R\Gamma_c[\rho]
 \end{array}$$

pour montrer que la flèche du haut est non-nulle.

- iii) Boyer [12, 4.2.3] décrit la *cohomologie* du gradué de la filtration de monodromie de $R\Gamma_c[\rho]$ ainsi obtenue. Mais a priori la cohomologie ne détermine pas l’objet de la catégorie dérivée. Cependant, si on remplace la filtration de monodromie par la bi-filtration par les images et noyaux de N dont elle est la convolution, et si on raffine légèrement les résultats de Boyer, on s’aperçoit que les bigradués sont concentrés en *un seul* degré cohomologique, explicite. Ceci a deux conséquences miraculeuses : d’une part cela détermine les bigradués *dans la catégorie dérivée*, d’autre part, on peut même déduire les extensions entre deux bi-gradués successifs de la première différentielle de la suite spectrale associée à la filtration de monodromie. Or cette suite spectrale est décrite par Boyer [12, 4.2.3].
- iv) Voici maintenant comment on prouve $N_\rho^{d_\rho-1} \neq 0$:
 - (a) Le gradué $gr_{d_\rho-1}^M$ s’identifie à l’objet de cohomologie décalé $\mathcal{H}^{max}[-max]$ de degré maximal de $R\Gamma_c[\rho]$, et le morphisme can_+ s’identifie à la flèche vers la troncature canonique $\text{Id} \xrightarrow{\text{tronq}_+} \tau_{\geq max}$.
 - (b) Le morphisme can_- se factorise en $\mathcal{H}^{max}[-max] \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{H}^{min}[-min] \xrightarrow{\text{tronq}_-} R\Gamma_c[\rho]$. Comme le complexe $R\Gamma_c[\rho]$ est scindé, tronq_+ est un épimorphisme et tronq_- un monomorphisme. Il suffit donc de tester la non-nullité de ε .
 - (c) La flèche ε est une composée d’extensions de représentations elliptiques explicitement décrites par Boyer, au cours de sa détermination de la suite spectrale de monodromie. Le calcul de cup-produits entre extensions de représentations elliptiques montre que cette composée est non-nulle.

Articles présentés

- [D1] Quelques propriétés des idempotents centraux des groupes p -adiques. *J. reine angew. Math.*, 504 :69–103, 2003.
- [D2] ν -tempered representations of p -adic groups. I. l -adic case. *Duke Math. J.*, 126(3) :397–469, 2005.
- [D3] Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 39(1) :1–74, 2006.
- [D4] Finitude pour les représentations lisses de groupes p -adiques. *ArXiv* (soumis), 2006.
- [D5] Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques. *ArXiv* (soumis), 2006.
- [D6] Représentations lisses p -tempérées des groupes p -adiques. *En préparation*.
- [D7] Integral structures in Bernstein’s center. *Non publié*, 2002.

Tous ces textes se trouvent à l’adresse <http://www.math.univ-paris13.fr/dat/travaux.html>

Références

- [1] A.-M. Aubert and R. Plymen. Plancherel formula for $GL(n, F)$ and $GL(m, D)$: explicit formulas and Bernstein decomposition. *J. Number theory*, 112 :26–66, 2005.
- [2] I. Badulescu. Correspondance de Jacquet-Langlands étendue à toutes les représentations. *Preprint*, 200? <http://www-math.univ-poitiers.fr/badulesc/articolen.html>.
- [3] A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. *Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I : Faisceaux Pervers)*. Number 100 in Astérisque. S.M.F., Paris, 1982.
- [4] V.G. Berkovich. Vanishing cycles for formal schemes. *Invent. Math.*, 115 :539–571, 1994.
- [5] V.G. Berkovich. Etale equivariant sheaves on p -adic analytic spaces. 1995.
- [6] J. Bernstein. Second adjointness for representations of p -adic groups. *Non publié*, 1993. <http://www.math.uchicago.edu/arinkin/langlands/>.
- [7] J. Bernstein. Le centre de Bernstein. In J. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, and M.F. Vignéras, editors, *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Travaux en cours. Hermann, 1984.
- [8] R. Bezrukavnikov. Homological properties of representations of p -adic groups related to the geometry of the group at infinity. <http://fr.arxiv.org/abs/math.RT/0406223>, 1999.
- [9] C. Blondel. Quelques propriétés des paires couvrantes. *Math. Annalen*, 2005.
- [10] C. Bonnafant and R. Rouquier. Coxeter orbits and modular representations. *Preprint*, 2005. math.RT/0511737.
- [11] J.-F. Boutot and H. Carayol. Uniformisation p -adique des courbes de Shimura : les théorèmes de Cerednik et Drinfeld. In *Courbes modulaires et courbes de Shimura*, number 196-197 in *Astrisque*, pages 45–158. S.M.F., 1991.
- [12] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de certaines variétés de Shimura simples et applications. *preprint*, 2005. <http://www.math.jussieu.fr/boyer>.
- [13] C. Breuil. Sur quelques représentations modulaires et p -adiques II. *J. Inst. Math. Jussieu*, 2 :1–36, 2003.
- [14] P. Broussous and B. Lemaire. Building of $GL_m(D)$ and centralizers. *Transform. Groups*, 7(1) :15–50, 2002.
- [15] C.J. Bushnell. Representations of reductive p -adic groups : localization of Hecke algebras and applications. *J. London Math. Soc. (2)*, 63(2) :364–386, 2001.

- [16] C.J. Bushnell and P.C. Kutzko. *The Admissible Dual of $GL(n)$ via open compact groups*. Number 129 in Annals of maths. Studies. Princeton university press, 1993.
- [17] H. Carayol. Non-abelian Lubin-Tate theory. In L. Clozel and J.S. Milne, editors, *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions*, volume II, pages 15–39. Academic Press, 1990.
- [18] L. Clozel, M. Harris, and R. Taylor. Automorphy for some l -adic lifts of automorphic mod l representations. *preprint*, 2006. <http://www.math.jussieu.fr/harris>.
- [19] J.-F. Dat. Types et induction pour les représentations modulaires de groupes p -adiques. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 32 :1–38, 1999. avec un appendice de M.-F. Vignéras.
- [20] J.-F. Dat. On the K_0 of a p -adic group. *Invent. Math.*, 140 :171–226, 2000.
- [21] V.G. Drinfeld. Coverings of p -adic symmetric domains. *Func. Anal. and Appl.*, 10 :107–115, 1976.
- [22] L. Fargues. *L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*. 2006. <http://www.math.u-psud.fr/fargues/Prepublications.htm>.
- [23] M. Harris. Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfeld’s upper half space ; elaboration of Carayol’s program. *Invent. Math.*, 129 :75–119, 1997.
- [24] M. Harris and R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*. Number 151 in Ann. of Math. studies. Princeton Univ. Press, 2001.
- [25] V. Heiermann. Décomposition spectrale et représentations spéciales d’un groupe réductif p -adique. *J. Inst. Math. Jussieu*, 3(3) :327–395, 2004.
- [26] G. Henniart. Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $GL(n)$ sur un corps p -adique. *Invent. Math.*, 139 :439–455, 2000.
- [27] R.B. Howlett and G.I. Lehrer. On Harish-Chandra induction for modules of Levi subgroups. *J. of Algebra*, 165 :172–183, 1994.
- [28] G. Laumon, M. Rapoport, and U. Stuhler. D -elliptic sheaves and the Langlands correspondence. *Invent. Math.*, 113 :217–338, 1993.
- [29] C. Moeglin. Sur les points de reductibilité pour les groupes classiques. *J. Algebra*, 268(1), 2003. <http://www.math.jussieu.fr/moeglin/reductibilitecomparaison.ps>.
- [30] A. Moy and G. Prasad. Unrefined minimal K -types. *Invent. Math.*, 116 :393–408, 1994.
- [31] S. Orlik. On extensions of generalized Steinberg representations. *J. of Algebra*, 293 :611–630, 2005.
- [32] M. Rapoport. On the bad reduction of Shimura varieties. In L. Clozel and J.S. Milne, editors, *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions*, volume II, pages 253–321. Academic Press, 1990.
- [33] M. Rapoport and T. Zink. Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten, Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik. *Invent. Math.*, 68 :21–101, 1982.
- [34] M. Rapoport and T. Zink. *Period spaces for p -divisible groups*. Number 141 in Annals Math. Studies. P.U.P., 1996.
- [35] A. Roche. Types and Hecke algebras for principal series representations of split reductive p -adic groups. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.*, 31 :361–413, 1998.
- [36] P. Schneider and U. Stuhler. The cohomology of p -adic symmetric spaces. *Invent. Math.*, 105 :47–122, 1991.
- [37] P. Schneider and J. Teitelbaum. Banach-Hecke algebras and Galois representations. *Preprint*, 2005. <http://wwwmath1.uni-muenster.de/u/schneider/publ/pre/index.html>.
- [38] P. Schneider and E.-W. Zink. K -types for the tempered components of a p -adic general linear group. *J. reine angew. Math.*, 517 :161–208, 1999.
- [39] S. Stevens. Semisimple characters for p -adic classical groups. *Duke Math. J.*, 127(1) :123–173, 2005.

- [40] M.-F. Vignéras. Induced R -representations of p -adic reductive groups. *Selecta Math.*, 4 :549–623, 1998.
- [41] M.-F. Vignéras. Appendice à *types et induction pour les représentations modulaires de groupes p -adiques*, par J.-F. Dat. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 32 :1–38, 1999.
- [42] M.-F. Vignéras. Correspondance de Langlands locale semi-simple pour $GL(n, F)$, modulo $l \neq p$. *Invent. Math.*, 144 :197–223, 2001.
- [43] M.-F. Vignéras. A criterion for existence of integral structures in locally algebraic representations of $GL_2(F)$. *Preprint*, 2006. <http://www.math.jussieu.fr/vigner/intercriterium.pdf>.
- [44] J.-L. Waldspurger. La formule de Plancherel pour les groupes p -adiques (d’après Harish-Chandra). *J. Inst. Math. Jussieu*, 2(2) :235–333, 2003.
- [45] J.-K. Yu. Construction of tame supercuspidal representations. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(3) :579–622 (electronic), 2001.