Quelques propriétés des idempotents centraux des groupes p-adiques

J.-F. Dat

24 janvier 2002

Résumé

Let G be a p-adic group. The center $\mathfrak{Z}(G)$ of the category of smooth representations of G was given a concrete spectral realization by Bernstein in [4]. On another hand, $\mathfrak{Z}(G)$ embeds canonically as a set of invariant distributions : this is the geometric realization. The natural link between both realizations is Harish-Chandra's Plancherel formula ; however, in general, it is not completely explicit. One aim of this paper is to give another formula for the (invariant distribution attached to) idempotents of $\mathfrak{Z}(G)$. We call it *of Plancherel type* since ultimately it provides a development of the Dirac measure at 1_G in terms of spectral data. The first step to this formula is to show that such distributions have support contained in the set of compact elements.

The second step is also of independent interest and is concerned with harmonic analysis on the set of compact elements. There is a canonical pairing between the (complexified) K_0 of G and the space of invariant distributions with support contained in the compacts. Using the explicit description of $K_0(G) \otimes \mathbb{C}$ given in [12] together with Arthur's description of the "elliptic pairings", we can exhibit natural dual bases of both spaces.

As an application (this is also the motivation), we study integrality and rationality properties of these idempotents. Through the above duality, the counterpart of the integrality question is essentially the problem of determining what part of the K_0 is generated by the compact open subgroups. This problem is a p-adic group analog of a very general question in K-theory. The only case which will be satisfactorily treated in this paper is that of $GL(n)$, via types theory.

Table des matières

1 Problème, conjectures et résultats **1**

2 Dualité sur les compacts **6**

3 Intégralité et rationalité dans $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$ et $\overline{\mathcal{H}}(G)^*_c$ **9**

4 Utilisation de la théorie d'Arthur **11**

5 Bases duales. Une formule de type Plancherel **18**

6 Sous-groupes compacts et K_0 **25**

1 Problème, conjectures et résultats

Commençons par rappeler quelques faits élémentaires de la théorie des représentations d'un groupe fini G. On sait tout d'abord que les représentations de G à coefficients dans un anneau commutatif R s'identifient aux modules sur la R-algèbre de groupe $R[G]$. Lorsque $R = \mathbb{C}$, on sait de plus que cette algèbre est semi-simple et ses idempotents centraux primitifs sont en bijection avec ses classes de modules simples. Si χ est un caractère simple, alors on a la formule bien connue donnant l'idempotent central primitif e_χ associé à χ :

$$e_\chi = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})g.$$

Dans cette formule, on sait que les valeurs de χ sont dans l'anneau $\mathbb{Z}_G$ des entiers de l'extension finie $\mathbb{Q}(1^{\frac{1}{|G|}})$ de $\mathbb{Q}$, et l'on constate sans se fatiguer que les idempotents primitifs centraux vivent dans $\frac{1}{|G|}\mathbb{Z}_G[G]$. Le but de cet article est de donner une formule pour les idempotents centraux primitifs d'un groupe p-adique, après les avoir convenablement définis et rappelé la description "spectrale" qu'en a donnée Bernstein. Pour un groupe fini la formule ci-dessus peut se voir comme l'explicitation d'un isomorphisme entre le complexifié du groupe de Grothendieck des caractères *simples* de G et l'espace des fonctions sur les classes de conjugaison de G. De même, la formule que l'on obtiendra ici pour G p-adique est une conséquence de l'explicitation d'une dualité parfaite entre le complexifié du groupe de Grothendieck des représentations *projectives* de type fini de G et l'espace des distributions invariantes sur G et à support dans les éléments *compacts*.

Définissons maintenant les objets de base de la théorie des représentations d'un groupe p-adique ; on considère un groupe réductif $\mathfrak{G}$ défini sur un corps p-adique F de caractéristique nulle et de corps résiduel $\mathbb{F}_q$. On s'intéresse aux représentations lisses (*i.e.* localement constantes) du groupe localement profini $G := \mathfrak{G}(F)$. Ces représentations s'identifient à certains modules sur une algèbre sans unité dont nous rappelons la définition : pour tout anneau intègre commutatif R où p est inversible, on note $\mathcal{C}_c^\infty(G,R)$ le R-module des fonctions localement constantes à support compact sur G et à valeurs dans R ; une R-distribution sur G est par définition un élément du R-dual de $\mathcal{C}_c^\infty(G,R)$. On note alors $\mathcal{H}(G,R)$ la R-algèbre de convolution des R-distributions localement constantes à support compact. À tout pro-p-sous-groupe ouvert H de G, on associe l'extension par zéro à G tout entier de la mesure de Haar sur H de volume 1 ; c'est un idempotent de $\mathcal{H}(G,R)$ que l'on notera e_H. Il agit sur toute R-représentation lisse de G comme le projecteur sur les H-invariants. On sait alors que les R-représentations lisses s'identifient aux modules *non dégénérés* sur $\mathcal{H}(G,R)$, *i.e* qui vérifient $M = \bigcup_H e_H M$.

Dans la suite, on abrègera $\mathcal{H}(G) := \mathcal{H}(G,\mathbb{C})$.

La plupart des notations seront introduites au fur et à mesure. De manière générale, si A est un anneau unitaire ou un groupe, la notation $\mathcal{Z}(A)$ désigne le centre de A ; si E est un A-module (et s'il n'y a pas d'ambiguïté sur A) son dual $Hom_A(E,A)$ sera noté E^*.

1.1 *Le problème* : Par définition (Voir [4]) le centre $\mathfrak{Z}(G,R)$ de la catégorie $Mod_R(G)$ des représentations lisses de G à coefficients dans R est l'anneau des endomorphismes du foncteur identité. En particulier il agit sur l'objet initial $\mathcal{C}_c^\infty(G,R)$ de $Mod_R(G)$ et s'identifie au commutant des translations à gauche et à droite par G. Considérons l'application R-linéaire

$$\begin{array}{rccl} D: & \mathfrak{Z}(G,R) & \rightarrow & \mathcal{C}_c^\infty(G,R)^* \\ & z & \mapsto & D_z \;\text{ telle que }\; < D_z, f >:= (z.f)(1) \end{array}$$

(1 est ici l'unité de G). On montre alors [4] que D induit un isomorphisme de R-algèbres entre $\mathfrak{Z}(G,R)$ et la R-algèbre des distributions $E \in \mathcal{C}_c^\infty(G,R)^*$ invariantes par G-conjugaison et *essentiellement compactes* au sens où $E*\mathcal{H}(G,R) \subset \mathcal{H}(G,R)$. Pour expliciter l'isomorphisme réciproque, choisissons une R-mesure de Haar sur G qui nous fournit un isomorphisme de $G\times G$-modules entre $\mathcal{C}_c^\infty(G,R)$ et $\mathcal{H}(G,R)$ par l'application $f \mapsto f\mu$; alors la formule

$$z_E.f := (E * (f\mu))/\mu.$$

ne dépend pas du choix de μ et donne l'inverse cherché.

En identifiant les R-représentations aux $\mathcal{H}(G,R)$-modules non-dégénérés, on constate que $\mathfrak{Z}(G,R)$ est aussi isomorphe à $End_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}}(\mathcal{H}(G,R))$. Puisque $\mathcal{H}(G,R)$ est la réunion des sous-algèbres unitaires $e_H\mathcal{H}(G,R)e_H$, où H décrit un système de pro-p-sous groupes voisinages de l'unité, on obtient aisément l'isomorphisme

$$\mathfrak{Z}(G,R) \simeq \varprojlim \mathcal{Z}(e_H\mathcal{H}(G,R)e_H)$$

ce qui permet de munir $\mathfrak{Z}(G,R)$ de la topologie de la limite projective. En particulier il est clair que lorsque $R \subset \mathbb{C}$, $\mathfrak{Z}(G,R)$ est une sous-R-algèbre de $\mathfrak{Z}(G,\mathbb{C}) =: \mathfrak{Z}(G)$.

Dans le cas $R = \mathbb{C}$, Bernstein a décrit cet anneau par son action sur le spectre de G : on note $\mathfrak{S}(G)$ l'ensemble des classes d'inertie de couples "cuspidaux" (M,ρ) où M est un sous-groupe de Levi de G et ρ une représentation cuspidale irréductible de M. Si $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)$ et (M,ρ) est un représentant de $\mathfrak{s}$, on pose $P_\mathfrak{s} := i_M^G(\rho \otimes \mathbb{C}[M/M^0])$. C'est une représentation projective de type fini de G qui scinde la catégorie $Mod_\mathbb{C}(G)$. Plus précisément, Bernstein a démontré que le morphisme canonique

$$\mathfrak{Z}(G) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}(G)} \mathcal{Z}(End_G(P_\mathfrak{s}))$$

est un homéomorphisme, si l'on munit le terme de droite de la topologie produit.

Il est bien connu des experts – et on l'expliquera dans la section 5.15 – que le dictionnaire entre le terme de droite et l'ensemble des distributions invariantes *essentiellement compactes* peut en principe être explicité au moyen de la formule de Plancherel-Harish Chandra, à condition de connaître précisément les caractères infinitésimaux des séries discrètes et les mesures non-discrètes que la formule fait intervenir. Bien que beaucoup de progrès aient été faits dans ce sens [17] [2], on est encore loin d'une connaissance si précise.

On se propose ici de donner une nouvelle formule pour la distribution $D_\mathfrak{s} := D_{e_\mathfrak{s}}$ où $e_\mathfrak{s}$ est l'idempotent de $\mathfrak{Z}(G)$ associé à la classe d'inertie $\mathfrak{s}$ dans la décomposition du terme de droite.

1.2 *Stratégie* : Rappelons que le caractère-trace d'une représentation admissible est une forme linéaire sur les G-coinvariants (G agissant par conjugaison) de $\mathcal{H}(G)$ que nous noterons $\overline{\mathcal{H}}(G)$. Moyennant le choix d'une mesure de Haar, on peut obtenir une distribution invariante en identifiant $\mathcal{H}(G)$ et $\mathcal{C}_c^\infty(G,\mathbb{C})$. Comme dans le cas des groupes finis, on veut étudier les idempotents centraux en développant les distributions associées en combinaisons linéaires de caractères de représentations irréductibles.

La formule de Plancherel-Harish-Chandra exprime la mesure de Dirac en 1_G comme combinaison linéaire *continue* (sous forme d'intégrale) de caractères de familles de représentations. Ici, nous proposons une formule (voir 1.4, 5.14) qui exprime la mesure de Dirac en 1_G, resp. les distributions $D_\mathfrak{s}$, comme combinaison linéaire *discrète*, resp. *finies*, de troncatures aux éléments compacts de caractères de certaines représentations. Cette formule a l'architecture habituelle (partie discrète plus somme de parties venant des classes d'association de sous-groupes de Levi) mais les parties non-discrètes font intervenir, *a priori*, en plus des séries discrètes, des représentations tempérées elliptiques.

Le point de départ, qui est l'objet de la partie 2, est l'observation que les distributions $D_\mathfrak{s}$ ont leur support dans les éléments compacts. Notons alors $\overline{\mathcal{H}}(G)_c^*$ l'espace des formes linéaires sur $\overline{\mathcal{H}}(G)$ à support dans les compacts.

Le deuxième ingrédient est le fait, montré par Bernstein, Blanc-Brylinski, que l'application "rang" (ou "trace" ou "caractère de Chern") en K-théorie met en dualité parfaite $\mathcal{K}_\mathbb{C}(G)$ et $\overline{\mathcal{H}}(G)_c^*$. Ici, $\mathcal{K}_\mathbb{C}(G)$ est le complexifié du groupe de Grothendieck $\mathcal{K}(G)$ des représentations projectives de type fini, et l'application "rang" envoie un projecteur définissant une représentation projective comme facteur direct d'une représentation libre sur sa trace qui est alors un élément bien défini de $\overline{\mathcal{H}}(G)$.

Le reste du travail consiste à étudier cette dualité, c'est à dire à exhiber et expliciter des bases duales de $\mathcal{K}_\mathbb{C}(G)$ et $\overline{\mathcal{H}}(G)_c^*$. En développant $D_\mathfrak{s}$ au moyen de ces bases, on obtiendra enfin la formule cherchée.

Obtenir les bases duales est une tâche compliquée et parfois très technique. L'idée générale est pourtant simple : si l'on se restreint à la dualité sur les éléments *elliptiques* (*cf* les "*elliptic pairings*" introduits par Harish-Chandra et Kazhdan), alors le travail a déja été fait par Arthur dans [1] comme on le rappellera dans la partie 4 (et c'est déja technique) ; on veut donc se ramener à cette situation en décomposant la dualité qui nous intéresse en "somme de dualités elliptiques sur les sous-groupes de Levi de G". Pour cela, on utilise les résultats de [12] qui montrent précisément comment $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$ est constitué d'une partie discrète et de parties "hissées" des parties discrètes correspondant aux sous-groupes de Levi standard (structure de système de Hopf de [12, 4.25]). On mettra en évidence dans la partie 5 une structure similaire sur $\overline{\mathcal{H}}(G)^*_c$ et on montrera que l'accouplement de dualité se comporte bien via-à-vis de ces structures.

Tentons maintenant de décrire aussi simplement que possible les bases duales obtenues.

1.3 *Bases duales* : Dans [1], Arthur a défini des *caractères elliptiques tempérés* pour G qui sont des représentations virtuelles *de longueur finie* de G, c'est à dire des éléments du complexifié $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(G) := \mathcal{R}(G) \otimes \mathbb{C}$ du groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie. Cela comprend en particulier les séries discrètes, et donc les supercuspidales unitaires, qui sont les seules vraies représentations obtenues ainsi. La définition d'Arthur dépend de certains choix (bien expliqués dans *loc. cit*) que nous supposons effectués de sorte que si x est un caractère elliptique tempéré et ψ un caractère non ramifié unitaire de G, alors $\psi.x$ est encore un caractère elliptique tempéré. Ainsi, la torsion par les caractères non ramifiés unitaires munit l'ensemble

$$E(G) = \{(M,x), M < G \text{ et } x \text{ caractère elliptique tempéré de } M\}_{/G-\text{conj}}$$

d'une structure de variété analytique dont on note $E^0(G)$ l'ensemble (infini) des composantes connexes. Fixons un couple (M,x) comme dans la définition précédente, on forme l'induite parabolique $i_M^G(x \otimes \mathbb{C}[M/M^0])$ qui est une représentation virtuelle *de type fini* et qui définit donc un élément de $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$. Celui-ci ne dépend que de la composante connexe e de (M,x) dans E et on peut donc poser :

$$X_e := [i_M^G(x \otimes \mathbb{C}[M/M^0])] \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$$

Notons $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(G)_I$ le sous-espace de $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(G)$ engendré par toutes les induites paraboliques. Bernstein [3] en a défini un joli supplémentaire dont on note π_G la projection associée : elle est donnée par une combinaison linéaire de restrictions-inductions paraboliques. On note alors $(\chi_{i_M^G(\pi_M.x)})_{|\text{comp}}$ la restriction du caractère-trace de la représentation virtuelle $i_M^G(\pi_M.x)$ à l'ensemble des éléments compacts de G. À nouveau ceci ne dépend que de la composante connexe e de (M,x) et on peut donc poser :

$$D_e := (\chi_{i_M^G(\pi_M.x)})_{|\text{comp}} \in \overline{\mathcal{H}}(G)^*_c$$

Après le rappel de quelques résultats de [12], la partie 5 consiste essentiellement à mettre bout à bout des résultats et idées de Bernstein, Kazhdan, Schneider-Stuhler et Arthur pour montrer que les deux familles obtenues sont des bases telles que $< X_e, D_f >= c(e)\delta_{ef}$ où $c(e)$ est donné explicitement.

1.4 *Formule pour un idempotent central* : La formule "de type Plancherel" mentionnée ci-dessus consiste alors à écrire

$$f(1) = \sum_{e \in E^0(G)} \frac{1}{c(e)} < D_e, f.\mathrm{df}(X_e) >, \ \ \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(G,\mathbb{C}).$$

Ici, $\mathrm{df}(X)$ désigne la *dimension formelle* d'un élément X de $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$; il s'agit d'une mesure de Haar sur G, de sorte que l'expression $f.\mathrm{df}(X)$ est bien un élément de $\mathcal{H}(G)$. On a pour toute mesure de Haar μ sur G l'égalité $\mathrm{df}(X) = (Rk(X)/\mu)(1_G).\mu$ où Rk est l'application "rang" $\mathcal{K}(G) \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}(G)$.

Plus généralement, les résultats de la partie 2 nous permettent d'écrire

$$< D_{\mathfrak{s}}, f >= \sum_{e \in E^0(\mathfrak{s})} \frac{1}{c(e)} < D_e, f.\mathrm{df}(X_e) >$$

où l'on a décomposé $E^0(G) = \sqcup_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)} E^0(\mathfrak{s})$ par le support cuspidal. On comparera cette formule avec celle que fournit la formule de Plancherel en 5.15.

1.5 *Intégralité et rationnalité* : Dans le cas d'un groupe fini, comme on l'a rappelé au tout début, des résultats de rationnalité et d'intégralité se lisent immédiatement sur la formule donnant un idempotent central. Dans le cas p-adique, l'énoncé de rationalité se généralise facilement, mais celui d'intégralité résiste.

Avant d'énoncer les résultats et conjectures raisonnables dans ce domaine, fixons quelques notations :

- On note $|G|$ le p.p.c.m. des pro-ordres (au sens de [20]) des sous-groupes compacts de G et pour tout premier $l \neq p$, on pose N_l la l-valuation de $|G|$ de sorte qu'on a $|G| = p^\infty \prod_{l\neq p} l^{N_l}$. On utilisera aussi la notation $|G|_{p'} = \prod_{l\neq p} l^{N_l}$ pour le facteur "hors p" de $|G|$..
- On note $\mathbb{Q}_G$ l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par les racines l^{N_l}-ièmes de l'unité, toutes les racines p^n-ièmes de l'unité ($n \in \mathbb{N}$) ainsi qu'une racine carrée de q, et $\mathbb{Z}_G$ la cloture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}_G$.
- On pose $\widetilde{w_G} = |W_G|.\text{p.p.c.m}\,\{[M : M^0\mathcal{Z}(M)]\}_{M<G}$, où $|W_G|$ est l'ordre du groupe de Weyl W_G de G.

Il est naturel d'énoncer la conjecture :

Conjecture 1.6 *(Intégralité) Il existe un entier $N_G \in \mathbb{N}^*$ tel que pour toute classe d'inertie $\mathfrak{s}$ de G, on a*

$$e_{\mathfrak{s}} \in \frac{1}{N_G}\mathfrak{Z}(G, \mathbb{Z}_G[\frac{1}{p}]).$$

De plus, pour l ne divisant pas $\widetilde{w_G}$, on peut choisir $\mathrm{val}_l(N_G) = N_l$.

Cet énoncé d'intégralité suggère un énoncé de rationalité qui, lui, est beaucoup plus facile :

Proposition 1.7 *(Rationalité) Pour toute classe d'inertie $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)$, on a $e_{\mathfrak{s}} \in \mathfrak{Z}(G, \mathbb{Q}_G)$.*

Ces énoncés sont la généralisation naturelle du cas des groupes finis rappelé au tout début ; on a remplacé l'ordre du groupe fini par le "pro-ordre" du groupe p-adique, c'est à dire le p.p.c.m. des pro-ordres de ses sous-groupes compacts. Cependant, la conjecture 1.6 prévoit de pouvoir "élargir" $|G|$ à un certain N_G qui tient compte aussi de l'ordre du groupe de Weyl ; c'est essentiellement dû à la stratégie que nous avons suivie, qui fait intervenir un peu d'analyse harmonique.

1.8 *Utilisation de la formule 1.4* : Dans cette formule, on peut contrôler la rationalité de chacun des ingrédients et la preuve de 1.7 n'est plus qu'une formalité. Pour ce qui est de l'intégralité, la seule inconnue concerne les dimensions formelles des représentations projectives. Signalons ici que lorsque $X \in \mathcal{K}(G)$ est représenté par une induite à support compact $ind_J^G(\tau)$ avec J ouvert compact et τ de dimension finie, alors $\mathrm{df}(X)$ est la mesure de Haar donnant le volume $\dim(\tau)$ à J. Ceci explique que la conjecture 1.6 se ramène à une conjecture naturelle sur $\mathcal{K}(G)$, expliquée ci-dessous.

1.9 *Une conjecture sur $\mathcal{K}(G)$* : On ne rappellera pas ici tous les résultats sur $\mathcal{K}(G)$ qui sont exposés dans [12]. La plupart sont contenus dans la description de $\mathcal{K}$ en tant que système de Hopf (ou système de Mackey ?), après avoir tué la torsion, *i.e.* tensorisé par $\mathbb{Q}$. En fait, comme il est précisé dans [12, 4.27], cette description demeure valide si on se contente de tensoriser par $\mathbb{Z}[\frac{1}{\widetilde{w_G}}]$. Disons, de manière imprécise, qu'on peut même "borner" les problèmes de $\widetilde{w_G}$-torsion qu'on doit tuer pour une telle description.

Il y a pourtant (au moins) une propriété de $\mathcal{K}(G) \otimes \mathbb{Q}$, due à Bernstein et montrée dans [12, 4.22] dont on ne connait pas d'analogue entier :

Proposition 1.10 *Soit $\mathcal{K}_{ind}(G)$ le sous-groupe de $\mathcal{K}(G)$ engendré par les représentations induites de sous-groupes ouverts compacts. Alors $\mathcal{K}_{ind}(G) \otimes \mathbb{Q} = \mathcal{K}(G) \otimes \mathbb{Q}$.*

L'analogue entier – sans tensoriser par $\mathbb{Q}$ – paraît, sinon optimiste, au moins inaccessible. Un résultat un peu plus faible, qui fait défaut, mais dont on expliquera une stratégie simple pour l'obtenir, serait :

Conjecture 1.11 *Le groupe de torsion $\mathcal{K}(G)/\mathcal{K}_{ind}(G)$ est annulé par une puissance de $\widetilde{w_G}$.*

Comme conséquence de notre formule, on obtient :

Proposition 1.12 *La conjecture 1.11 implique la conjecture 1.6.*

Et pour que cet article ne soit pas vide, on montrera dans la dernière partie :

Proposition 1.13 *La conjecture 1.11 est vraie pour $GL(N)$ et tout groupe de rang (relatif)* 1.

On expliquera aussi quelques statégies dans le cas général.

Avant de passer au corps de l'article, deux petites remarques :

1.14 *Remarques* :

- Il y a un argument simple (voir [20]) qui permet de voir que $e_{\mathfrak{s}}$ est défini sur une extension finie de $\mathbb{Q}$, $\mathfrak{s}$ étant fixée ; faisant agir le groupe de Galois absolu Γ de $\mathbb{C}$ sur l'anneau $\mathcal{H}(G) = \mathcal{H}(G,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$, on voit qu'il permute les idempotents centraux primitifs de $\mathfrak{Z}(G)$. Fixons un pro-p-sous groupe ouvert H tel que $e_{\mathfrak{s}} e_H \neq 0$. Puisque e_H est stable par Γ, on voit que $\forall \gamma \in \Gamma,\ e_{\gamma\mathfrak{s}} e_H \neq 0$. Or on sait qu'il y a un nombre fini de classes $\mathfrak{s}'$ vérifiant $e_{\mathfrak{s}'} e_H \neq 0$. Le stabilisateur de $\mathfrak{s}$ dans Γ est donc d'indice fini et on en déduit la rationalité annoncée. Ce que la proposition 1.7 apporte ici, c'est une "borne" uniforme en $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)$ sur cette rationalité.
- De même, en admettant la proposition 1.7, on verra par des arguments de finitude qui n'apparaissent pas encore clairemement mais qui sont déja connus que l'énoncé de la conjecture 1.6 est banal si l'on inverse les quantificateurs ; ce qui est nouveau dans la prédiction, c'est l'uniformité en $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)$. En cela, cet énoncé est dans l'esprit de résultats d'intégralité "uniforme" sur les degrés formels de supercuspidales ou de séries discrètes.

1.15 *Notations générales* : On suppose fixé un ensemble de sous-groupes de Levi "standards par rapport au sous-groupe parabolique minimal $P_0 = M_0.U_0$" préalablement choisi (notation $M < G$) ainsi qu'un sous-groupe compact spécial K vérifiant $G = KP_0$. Les inductions et restrictions paraboliques seront normalisées et notées i_M^G et r_G^M pour le sous-groupe parabolique $P = MU_0$ associé à $M < G$. Elles seront notées $\overline{i_M^G}$ et $\overline{r_G^M}$ pour le sous-groupe parabolique *opposé* à $P = MU_0$ par rapport à M. Pour tout groupe H localement compact on note H^0 le sous-groupe engendré par les sous-groupes compacts.

Les remarques et suggestions du referee ont permis d'améliorer nettement l'exposé des résultats. L'auteur l'en remercie vivement.

2 Dualité sur les compacts

2.1 *Distributions invariantes à support dans les compacts* : On utilisera les notations suivantes :

- G^{sr} pour l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de G.
- G^{ell} pour les elliptiques de G^{sr}.
- G_c pour les éléments compacts au sens de Deligne (c'est à dire compacts modulo le centre).
- La juxtaposition des exposants ou indices désigne l'intersection, par exemple G_c^0 est l'ensemble des éléments compacts de G.

On a défini dans l'introduction $\overline{\mathcal{H}}(G) := \mathcal{H}(G)_G = \mathcal{H}(G)/[\mathcal{H}(G),\mathcal{H}(G)]$, parfois appelé "cocentre" de G, dont le dual $\overline{\mathcal{H}}(G)^*$ s'identifie à l'espace des distributions invariantes sur G dès que l'on choisit une mesure de Haar μ pour identifier $\mathcal{H}(G)$ et $\mathcal{C}_c^\infty(G,\mathbb{C})$. Rappelons que le support d'une distribution D est

$$\textit{Supp } D := \text{Adhérence de } \{x \in G,\ \ \exists f \in \mathcal{C}_c^\infty(G),\ \ f(x) \neq 0 \text{ et } < D, f > \neq 0\}$$

Soit $\Omega \subset G$ un ensemble ouvert fermé stable par conjugaison, la restriction à Ω (*i.e.* la multiplication par 1_Ω) définit des opérateurs sur $\overline{\mathcal{H}}(G)$ et $\overline{\mathcal{H}}(G)^*$ et si $D \in \overline{\mathcal{H}}(G)^*$, alors *Supp* $D \subset \Omega$ si et seulement si $D = D_{|\Omega}$.

On notera $\overline{\mathcal{H}}(G)_c^*$ l'espace des formes linéaires sur $\overline{\mathcal{H}}(G)$ de support inclus dans G_c^0, qui s'identifie via μ aux distributions invariantes à support inclus dans G_c^0.

2.2 *Premiers rappels sur $\mathcal{K}(G)$:* Rappelons la définition de l'application "rang" $Rk : \mathcal{K}(G) \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}(G)$, aussi appelée caractère de Chern ; pour tout G-module projectif de type fini Q, on peut choisir un entier n et un idempotent $e_Q \in \mathcal{M}_n(\mathcal{H}(G))$ (matrices $n \times n$) tel que $Q \simeq \mathcal{H}(G)^n.e_Q$. Alors l'image de la trace de e_Q dans $\overline{\mathcal{H}}(G)$ est indépendante des choix et ne dépend que de Q. On la note $Rk\,Q$ et on vérifie aisément qu'on obtient par linéarité un morphisme $\mathcal{K}(G) \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}(G)$. La proposition suivante est essentiellement due à Bernstein et à Blanc-Brylinski :

Proposition 2.3 – *$\ker Rk = \mathcal{K}(G)_{tors}$.*
- *$< \mathrm{im}\, Rk >_{\mathbb{C}}$ est l'ensemble des éléments f de $\overline{\mathcal{H}}(G)$ dont les intégrales orbitales sur les éléments non-compacts sont nulles (*i.e. tels que $f = f_{|G_c^0}$).

Preuve : Pour le premier point, voir [12, 4.20]. Le second est expliqué dans [12, 1.6]. □

Corollaire 2.4 *La dualité entre $\overline{\mathcal{H}}(G)$ et $\overline{\mathcal{H}}(G)^*$ induit un accouplement non dégénéré*

$$<,>: \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G) \times \overline{\mathcal{H}}(G)^*_c \longrightarrow \mathbb{C}$$

2.5 *Induction et restriction :* Soit M un sous-groupe de Levi standard de G, on a décrit dans [12, 1.7] des morphismes i_M^G et r_G^M d'induction et de restriction $\overline{\mathcal{H}}(M) \overset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \overline{\mathcal{H}}(G)$. Rappelons brièvement que ces morphismes sont respectivement obtenus par adjonction des morphismes $\overline{r_G^M}$ et i_M^G, $\mathcal{R}(G) \overset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \mathcal{R}(M)$ induits par la restriction parabolique opposée et l'induction parabolique sur les groupes de Grothendieck des représentations de longueur finie $\mathcal{R}(.)$.

On notera donc r_G^M, $\overline{r_G^M}$ et i_M^G les morphismes $\overline{\mathcal{H}}(M)^* \overset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \overline{\mathcal{H}}(G)^*$ obtenus par dualité, à partir respectivement de $\overline{i_M^G}$, i_M^G et r_G^M. Rappelons que la théorie de Bernstein (les arguments sont rappelés dans [12, 1.7]) montre qu'en identifiant $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$ à un sous-espace de $\overline{\mathcal{H}}(G)$, on a les propriétés $r_G^M \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G) \subset \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(M)$ et $i_M^G \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$; du côté des distributions invariantes à support compacts, dual du $\mathcal{K}$, les choses se passent un peu moins bien ; on a seulement :

Lemme 2.6 *On a $i_M^G(\overline{\mathcal{H}}(M)^*_c) \subset \overline{\mathcal{H}}(G)^*_c$.*

Preuve : Notons $P = MU$ le sous-groupe parabolique standard associé à M. Il faut voir que pour toute $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, $f = f_{|G_c^0} \Rightarrow r_G^M(\overline{f\mu}) = (r_G^M \overline{f\mu})_{|M_c^0}$ (ici, $\overline{f\mu}$ désigne l'image dans $\overline{\mathcal{H}}(M)$ de $f\mu \in \mathcal{H}(M)$). Pour cela on utilise la formule de Van Dick, qui après avoir supposé que f est invariante par conjugaison sous le compact spécial K (ce qui ne coûte rien) se ramène à la formule du terme constant, c'est à dire que $r_G^M \overline{f\mu}$ est, à un facteur multiplicatif non nul près dépendant des mesures de Haar implicitement choisies sur G, M et U, l'image dans $\overline{\mathcal{H}}(M)$ de la fonction $f^{(P)} \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$ définie par :

$$f^{(P)}(m) = \delta_P{}^{\frac{1}{2}}(m) \int_U f(mu)du.$$

Il suffit maintenant de remarquer que pour tout $m \in M$ et $u \in U$, on a $m \in M_c^0$ si et seulement si $mu \in G_c^0$. En effet la continuité de la projection $P \longrightarrow M$ montre que si mu est compact alors m l'est. Et réciproquement, si m est compact, soit J un sous-groupe ouvert compact de G contenant m et $z \in \mathcal{Z}(M)$ (le centre de M) tel que $zuz^{-1} \in J \cap U$. Alors zJz^{-1} contient m et u, donc mu est compact. □

Remarque : Il est par contre en général faux que $r_G^M(\overline{\mathcal{H}}(G)^*_c) \subset \overline{\mathcal{H}}(M)^*_c$. Par exemple, si $G = SL(2)$ et $M = T$ est le tore maximal, une application de la formule de Clozel (rappelée en 2.1) montre que si t contracte strictement le parabolique standard (notation $t \in T^+$), alors $i_M^G(1_{tT_H})_{|G_c^0} = i_M^G(1_{tT_H}) - \overline{i_M^G}(1_{tT_H})$ pour tout sous-groupe $T_H \subset T^0$. Notant 1 le caractère de la représentation triviale de G, on a donc

$$< \overline{r_G^T}(1_{|G_c}), 1_{tT_H} >=< \overline{r_G^T}(1) - r_G^T(1), 1_{tT_H} >= \delta_P{}^{\frac{1}{2}}(t) - \delta_P{}^{-\frac{1}{2}}(t) \neq 0.$$

2.7 *Action du centre et décompositions* : Le centre $\mathfrak{Z}(G)$ défini dans l'introduction agit sur $\overline{\mathcal{H}}(G)$ et $\overline{\mathcal{H}}(G)^*$; notons $\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s}) = e_{\mathfrak{s}}\overline{\mathcal{H}}(G)$ et $\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})^* = e_{\mathfrak{s}}\overline{\mathcal{H}}(G)^*$ pour chaque classe d'inertie $\mathfrak{s}$ d'idempotent central associé $e_{\mathfrak{s}}$. On obtient les décompositions :

$$\overline{\mathcal{H}}(G) = \bigoplus_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}(G)} \overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s}) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{H}}(G)^* = \prod_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}(G)} \overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})^*.$$

L'action du centre ne stabilise pas $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G) \subset \overline{\mathcal{H}}(G)$ mais les idempotents du centre le stabilisent et on a la décomposition $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G) = \bigoplus_{\mathfrak{s}} \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$ avec $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s}) = \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G) \cap \overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})$. Du côté dual les choses sont moins évidentes : remarquons que par la dualité du corollaire 2.4 on obtient la décomposition spectrale $\overline{\mathcal{H}}(G)^*_c = \prod_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}} \overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})^*_c$ en posant $\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})^*_c$ l'orthogonal de $\bigoplus_{\mathfrak{s}'\neq\mathfrak{s}} \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s}')$ que l'on peut identifier avec le dual de $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$. On a alors évidemment $\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})^*_c \supset \overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})^* \cap \overline{\mathcal{H}}(G)^*_c$ mais l'inclusion réciproque n'est pas évidente car on ne sait pas encore si l'idempotent central $e_{\mathfrak{s}}$ stabilise $\overline{\mathcal{H}}(G)^*_c$. Ceci découlera de la proposition suivante :

Proposition 2.8 *Pour tout idempotent $e \in \mathfrak{Z}(G)$, on a l'égalité $e\circ 1_{G_c^0} = 1_{G_c^0}\circ e$ dans $End(\overline{\mathcal{H}}(G))$.*

Avant de commencer la preuve remarquons que cette égalité est fausse dans $End(\mathcal{H}(G))$ puisque $1_{G_c^0}(e_H\mathcal{H}(G)e_H) \subsetneq e_H\mathcal{H}(G)e_H$.
Preuve : On a $1_{G_c^0} = 1_{G^0} \circ 1_{G_c}$, donc il suffit de montrer que les idempotents commutent avec 1_{G^0} et 1_{G_c}. Nous commencerons donc par le lemme suivant : identifions $\mathcal{H}(G)$ et $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ par le choix d'une mesure de Haar μ, alors toute fonction ϕ sur G/G^0, induit par multiplication des fonctions un endomorphisme de l'espace $\mathcal{H}(G)$ encore noté ϕ ;

Lemme 2.9 *Pour toute fonction ϕ sur G/G^0 et tout idempotent e de $\mathfrak{Z}(G)$, on a $e\circ\phi = \phi\circ e$ dans $End(\mathcal{H}(G))$.*

Preuve : Commençons par examiner le cas où ϕ est un caractère de G/G^0. Alors l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{H}(G)$ associé est un automorphisme d'algèbre qui induit l'automorphisme $z \mapsto \phi z\phi^{-1}$ de l'anneau $\mathfrak{Z}(G)$. Cet automorphisme envoie nécessairement les idempotents primitifs sur des idempotents primitifs et puisque les blocs de Bernstein sont stables par torsion par les caractères non ramifiés, les idempotents primitifs sont donc invariants par ϕ et par suite tous les idempotents le sont aussi. L'assertion du lemme est donc vérifiée pour un caractère ϕ.

Fixons maintenant $f \in \mathcal{H}(G)$ et ϕ quelconque. Puisque f et ef sont à support compact, on voit qu'il existe une combinaison linéaire ϕ' de caractères de G/G^0 telle que $\phi' f = \phi f$ et $\phi' ef = \phi ef$. On en déduit ainsi l'assertion du lemme pour toute fonction ϕ. □

Remarquons que les fonctions ϕ considérées ci-dessus, étant invariantes par G^0 le sont aussi par G-conjugaison et induisent donc des endomorphismes de $\overline{\mathcal{H}}(G)$. L'identité du lemme précédent est bien-sûr vraie dans $End(\overline{\mathcal{H}}(G))$.

On prouve maintenant la commutatitivité des idempotents avec 1_{G_c} par récurrence sur le rang de G. Remarquons que quand celui-ci est nul on a $G_c = G$ donc il n'y a rien à montrer. Supposons donc que l'assertion est vraie pour tous les sous-groupes de Levi de G, on utilise la formule suivante (qui est une reformulation de la formule de Clozel, voir [11, prop. 1]) :

$$\forall f \in \overline{\mathcal{H}}(G), \quad f = \sum_{M<G} \overline{i_M^G}(\chi_M . r_G^M(f)_{|M_c}) \tag{2.1}$$

où χ_M est une fonction de M/M^0 précisément définie dans [11, p. 240] et $\overline{i_M^G}$ est l'induction par rapport au parabolique opposé au parabolique standard contenant M.

Pour tout $M < G$, nous noterons $i^*_{MG} : \mathfrak{Z}(G) \longrightarrow \mathfrak{Z}(M)$ le morphisme "de Harish-Chandra" défini dans [3, 2.4] et qui vérifie les propriétés

$$\forall z \in \mathfrak{Z}(G), \quad z\overline{i_M^G}(\alpha) = \overline{i_M^G}(i^*_{MG}(z)\alpha) \quad \text{et} \quad r_G^M(z\beta) = i^*_{MG}(z) r_G^M(\beta)$$

pour tous $\alpha \in \overline{\mathcal{H}}(M)$ et $\beta \in \overline{\mathcal{H}}(G)$. Puisque c'est un morphisme d'anneaux, i^*_{MG} envoie les idempotents sur des idempotents.

Fixons maintenant $f \in \overline{\mathcal{H}}(G)$ et e un idempotent de $\mathfrak{Z}(G)$, on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
1_{G_c} \circ e(f) &= e.f - \sum_{M<G, M\neq G} \overline{i_M^G}(\chi_M.r_G^M(ef)_{|M_c}) \\
&= ef - \sum_{M<G, M\neq G} \overline{i_M^G}(\chi_M.(i_{MG}^*(e)r_G^M(f))_{|M_c}) \\
&= ef - \sum_{M<G, M\neq G} \overline{i_M^G}(\chi_M.i_{MG}^*(e)r_G^M(f)_{|M_c}) \\
&= ef - \sum_{M<G, M\neq G} \overline{i_M^G}(i_{MG}^*(e)\chi_M.r_G^M(f)_{|M_c}) \\
&= ef - \sum_{M<G, M\neq G} e\overline{i_M^G}(\chi_M.r_G^M(f)_{|M_c}) \\
&= ef_{|G_c}
\end{aligned}$$

La troisième ligne est obtenue par l'hypothèse de récurrence et la quatrième par le lemme 2.9. On obtient ainsi $1_{G_c} \circ e = e \circ 1_{G_c}$. On sait d'autre part que $1_{G^0} \circ e = e \circ 1_{G^0}$ d'après le lemme 2.9 et puisque $1_{G_c^0} = 1_{G_c} \circ 1_{G^0}$ on obtient la proposition 2.8. $\square$

Corollaire 2.10 $\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})_c^* = e_{\mathfrak{s}}\overline{\mathcal{H}}(G)^* \cap \overline{\mathcal{H}}(G)_c^*$. *($\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})_c^*$ est défini avant la proposition 2.8).*

Corollaire 2.11 *Pour toute classe d'inertie $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)$, la distribution $D_{\mathfrak{s}}$ associée à l'idempotent central $e_{\mathfrak{s}}$ est à support dans les éléments compacts.*

Preuve : L'assertion de la proposition 2.8 se transporte "canoniquement" à $End(\mathcal{C}_c^\infty(G,\mathbb{C})_G)$. Fixons alors $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G,\mathbb{C})$, on a

$$< D_{\mathfrak{s}}, f >= (e_{\mathfrak{s}}.f)(1) = (e_{\mathfrak{s}}.f)_{|G_c^0}(1) = (e_{\mathfrak{s}}.f_{|G_c^0})(1) =< D_{\mathfrak{s}}, f_{|G_c^0} > .$$

$\square$

3 Intégralité et rationalité dans $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$ et $\overline{\mathcal{H}}(G)_c^*$

3.1 *Structures entières :* Soit $\mathfrak{s}$ une classe d'inertie, la dualité $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s}) \times \overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})_c^* \longrightarrow \mathbb{C}$ admet une structure entière dans le sens suivant : il existe deux groupes abéliens libres de type fini et générateurs $\mathcal{K}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s}) \subset \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$ et $\overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})_c^* \subset \overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})_c^*$ tels que $< \mathcal{K}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s}), \overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})_c^* > \subset \mathbb{Z}$. Précisément, posons $\mathcal{K}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})$ l'image de l'application canonique $\mathcal{K}(\mathfrak{s}) \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$ et $\overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})_c^*$ l'image de $\mathcal{R}(\mathfrak{s})$ par l'application $\pi \mapsto \chi_{\pi|G_c^0}$ (où χ_π est le caractère-distribution de π). Alors

Proposition 3.2 *i) $\mathcal{K}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})$ est un sous-groupe abélien libre de type fini et générateur de $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$.*

ii) $\overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})_c^*$ est un sous-groupe abélien libre de type fini et générateur de $\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})_c^*$.

iii) On a $< \mathcal{K}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s}), \overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})_c^* > \subset \mathbb{Z}$.

Preuve : i) Par définition $\mathcal{K}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})$ engendre $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$. La propriété d'être de type fini sera déduite de ii) et iii).

ii) Remarquons d'abord que le fait que $\pi \in \mathcal{R}(\mathfrak{s}) \Rightarrow \chi_{\pi|G_c^0} \in \overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})^*$ est une conséquence de la proposition 2.8. Pour voir que $\overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})_c^*$ est de type fini, on raisonne par récurrence : supposons que pour tout $M < G$ propre et toute classe d'inertie $\mathfrak{s}_M$ au-dessus de $\mathfrak{s}$, on sache que $\overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s}_M)_c^*$ est de type fini. Alors par 2.6 qui implique que $i_M^G\overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s}_M)_c^*$ est l'image de $i_M^G\mathcal{R}(\mathfrak{s}_M)$, on voit que l'image de $\mathcal{R}_I(\mathfrak{s})$ (le sous-groupe de $\mathcal{R}(\mathfrak{s})$ engendré par les induites) dans $\overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})_c^*$ est de type fini. Or d'après [3, 3.1], il existe un nombre fini de caractères infinitésimaux $\theta \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{s}),\mathbb{C})$ modulo torsion par $\Psi(G)$ tels que le sous-groupe $\mathcal{R}(\mathfrak{s},\theta)$ de $\mathcal{R}(\mathfrak{s})$ engendré par les irréductibles de caractère infinitésimal θ ne soit pas inclus dans $\mathcal{R}_I(G)$. Puisque chaque $\mathcal{R}(\mathfrak{s},\theta)$ est de type fini sur $\mathbb{Z}$ et puisque $\chi_{\pi\psi_{|G_c^0}} = \chi_{\pi|G_c^0}$ pour tout $\psi \in \Psi(G)$, on obtient la finitude annoncée.

Le fait que $\overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})_c^*$ engendre $\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})_c^*$ est une conséquence du théorème de densité de Kazhdan [13, Thm 0] ; ce résultat implique en effet que l'orthogonal de $\overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})_c^*$ dans $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$ est nul. Or, soit par la conjecture de Howe, soit par la description de $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$ dans [12], on a $dim_{\mathbb{C}}\,\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})_c^* = dim_{\mathbb{C}}\,\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s}) < \infty$, donc par adjonction $\overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})_c^*$ engendre $\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})_c^*$.

iii) D'après [12, 1.3], on a pour tous G-module projectif de type fini Q et représentation de longueur finie π, $< [Q], \chi_{\pi|G_c^0} >= dim_{\mathbb{C}}(Hom_G(Q,\pi))$.

Retour à i). Le point iii) et la non-dégénerescence de l'accouplement $<,>$ impliquent que $\mathcal{K}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s}) \hookrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})_c^*, \mathbb{Z})$. Le $\mathbb{Z}$-module de droite est de type fini d'après ii), donc celui de gauche aussi. $\square$

3.3 *Discriminants* : Supposons donné un accouplement non dégénéré $<,>$: $M \times N \longrightarrow \mathbb{Z}$ entre deux $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini M et N. Choisissons deux $\mathbb{Z}$-bases $\{m_1,\cdots,m_d\}$ et $\{n_1,\cdots,n_d\}$ respectivement de M et N, alors l'entier

$$d_{<,>} := |\det(< m_i, n_j >)_{i,j}|$$

est indépendant de ces choix et sera appelé discriminant de l'acouplement entier $<,>$. De plus, notons $M^* := \{n \in N \otimes \mathbb{Q}, \forall m \in M,\ < m,n > \in \mathbb{Z}\}$, alors $M^* \subset \frac{1}{d_{<,>}}N$. Dans la suite on notera $d_{\mathfrak{s}}$ le discriminant de l'accouplement $\mathcal{K}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s}) \times \overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})_c^* \longrightarrow \mathbb{Z}$. Un des corollaires des parties 4 et 5 sera :

Théorème 3.4 *Il existe une puissance de $\widetilde{w_G}$, disons $\widetilde{w_G}^d$ telle que pour toute classe d'inertie $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)$, on a $d_{\mathfrak{s}} | \widetilde{w_G}^d$.*

Avant de passer à la preuve proprement dite de 1.12, nous montrons

Lemme 3.5 *Soit $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{Z}_G[\frac{1}{p}])$ et $\pi \in \mathcal{R}(\mathfrak{s})$, alors $< f, \chi_{\pi|G_c^0} > \in \mathbb{Z}_G[\frac{1}{p}]$.*

Preuve : Remarquons qu'il suffit de considérer le cas où $f = g.e_H$ avec $g \in G_c^0$ et H un pro-p-sous-groupe ouvert normalisé par g (en effet on peut supposer que le support de f est inclus dans les compacts et le recouvrir par un nombre fini de compacts disjoints de la forme voulue g_iH_i sur lesquels f est constante). Par définition, on a alors

$$< f, \chi_{\pi|G_c^0} >= Tr(ge_H, \pi^H)$$

Or, il existe $n \in \mathbb{N}$ de la forme $|G|_{p'}p^m$ tel que $(ge_H)^n = e_H$. Puisque e_H agit trivialement sur π^H, on voit que les valeurs propres de l'action de ge_H sur π^H sont des entiers algébriques de $\mathbb{Q}_G$, d'où l'assertion. $\square$

3.6 *Preuve des propositions 1.7 et 1.12* : Fixons $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)$ et choisissons temporairement une mesure de Haar μ sur G. On associe à $D_{\mathfrak{s}}$ la forme linéaire $D_{\mathfrak{s}}^{\mu}$ sur $\overline{\mathcal{H}}(G)$ définie par $< D_{\mathfrak{s}}^{\mu}, \phi > := < D_{\mathfrak{s}}, \phi/\mu >$. D'après 2.11, on a $D_{\mathfrak{s}}^{\mu} \in \overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})_c^*$. Choisissons alors une $\mathbb{Z}$-base $\{[P_i]\}$ de $\mathcal{K}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})$ et notons $\{[P_i]^*\}$ la base duale dans $\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})_c^*$. On peut écrire :

$$D_{\mathfrak{s}}^{\mu} = \sum_i < [P_i], D_{\mathfrak{s}}^{\mu} > [P_i]^*.$$

Par ailleurs on a l'égalité $< [P_i], D_{\mathfrak{s}}^{\mu} > := ((Rk[P_i])/\mu)(1_G)$ ce qui nous permet de réécrire la formule ci-dessus de façon plus canonique en utilisant les dimensions formelles $\mathrm{df}(P_i)$ définies en 1.4 :

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^{\infty}(G,\mathbb{C}), \quad < D_{\mathfrak{s}}, f >= \sum_i < [P_i]^*, f.\mathrm{df}(P_i) > .$$

Le théorème 3.4 implique que $[P_i]^* \in \widetilde{w_G}^{-d}\overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})_c^*$ et ceci, avec le lemme 3.5 montre qu'il suffit maintenant d'étudier les dimensions formelles.

Supposons que la conjecture 1.11 est vraie, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout i, $\widetilde{w_G}^k P_i \in im(\mathcal{K}_{ind}(G) \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G))$. Or, si J est un sous-groupe ouvert compact de G et $\tau \in Irr(J)$, la dimension formelle $\mathrm{df}(ind_J^G(\tau))$ est la mesure de Haar donnant le volume $dim_{\mathbb{C}}\tau$ à J. Une telle mesure de Haar appartient à $\frac{1}{|G|_{p'}}\mathcal{H}(G, \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ On en déduit donc

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(G, \mathbb{Z}_G[\frac{1}{p}]),\ < D_{\mathfrak{s}}, f > \in \frac{1}{|G|_{p'}\widetilde{w_G}^{d+k}}\mathbb{Z}_G[\frac{1}{p}]$$

Ceci est l'énoncé de la conjecture 1.6 avec $N_G = |G|_{p'}\widetilde{w_G}^{d+k}$ et on a donc prouvé 1.12.

La proposition 1.7, elle, n'avait pas besoin des résultats de cette section, notamment le théorème 3.4, mais on inclut sa preuve ici, car le raisonnement est déja prêt à ceci près qu'on remplace la conjecture 1.11 par la proposition 1.10 pour conclure.

4 Utilisation de la théorie d'Arthur

Pour montrer le théorème 3.4, nous suivrons la stratégie naïve consistant à exhiber des bases "rationnelles" de $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$ et $\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})_c^*$, duales l'une de l'autre et dont on peut contrôler les "dénominateurs". Pour cela nous aurons à utiliser la classification par Arthur des représentations tempérées elliptiques en termes de classes de conjugaison dans les R-groupes. La théorie des représentations de ces R-groupes introduit des irrationalités (racines $|R|$-ièmes de l'unité) qui nous invitent à étendre $\mathbb{Q}$ à sa clôture $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{Z}$ à l'anneau $\overline{\mathbb{Z}}$ des entiers algébriques de $\overline{\mathbb{Q}}$, ce qui n'est pas gênant tant qu'on s'intéresse aux "dénominateurs". Il sera donc commode de considérer (surtout dans la partie 5) les groupes $\mathcal{K}^{\overline{\mathbb{Z}}}(\mathfrak{s}) := \mathcal{K}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s}) \otimes \overline{\mathbb{Z}}$ et son analogue $\overline{\mathcal{H}}^{\overline{\mathbb{Z}}}(\mathfrak{s})_c^*$.

4.1 *Rappels sur les R-groupes* : Dans ce paragraphe, la référence est l'article d'Arthur [1] auquel nous empruntons l'intégralité des notations et des idées qui suivent. Nous ne rappellerons que succinctement sa théorie.

i) Soit $M < G$, on note $E^2(M)$ l'ensemble des représentations irréductibles de M de carré intégrable. A chaque (classe d'isomorphie de) $\sigma \in E^2(M)$ est associé son R-groupe R_σ qui contrôle l'entrelacement de $i_M^G(\sigma)$ [1, p. 86]. C'est un quotient du stabilisateur W_σ de (la classe d'isomorphie de) σ dans $\mathcal{N}_G(M)/M$ muni d'un morphisme "canonique"

$$R_\sigma \longrightarrow Aut_G(i_M^G(\sigma))/\mathbb{C}^*$$

Ce dernier peut être relevé moyennant certains choix (normalisation des opérateurs d'entrelacement, isomorphismes $\sigma \simeq \sigma^w$, voir [1, p.85]...) en un isomorphisme

$$\mathbb{C}[R_\sigma]_{\eta_\sigma} \xrightarrow{\sim} End_G(i_M^G(\sigma))$$

où la notation $\mathbb{C}[R_\sigma]_{\eta_\sigma}$ désigne l'algèbre du groupe R_σ tordue par un 2-cocycle $\eta_\sigma : R_\sigma \times R_\sigma \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Notons que l'image $\overline{\eta_\sigma}$ de η_σ dans $H^2(R_\sigma, \mathbb{C}^*)$ ne dépend pas des choix précédents. Quitte à tordre par un 1-cocycle adéquate, on peut supposer que les valeurs de η_σ sont racines de l'unité ; par contre, on ne sait en général pas si on peut le trivialiser. Pour surmonter la difficulté, on choisit suivant Arthur une extension centrale

$$1 \longrightarrow Z_\sigma \longrightarrow \widetilde{R_\sigma} \longrightarrow R_\sigma \longrightarrow 1$$

sur laquelle on peut trivialiser le pullback de η_σ. On peut choisir (et on le fait) Z_σ cyclique engendré par un élément z_σ (par exemple le sous-groupe $< \overline{\eta_\sigma} > \subset H^2(R_\sigma, \mathbb{C}^*)$) Modulo le choix supplémentaire d'une telle trivialisation, on obtient ainsi une action linéaire

$$\widetilde{R_\sigma} \longrightarrow Aut_G(i_M^G(\sigma))$$

à caractère central noté $\chi_\sigma^{-1} : Z_\sigma \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Cette action, uniquement définie à torsion près par un caractère multiplicatif de R_σ, fournit l'isomorphisme d'algèbres suivant, qui paraphrase le précédent :

$$End_{\widetilde{R_\sigma}}(ind_{Z_\sigma}^{\widetilde{R_\sigma}}(\chi_\sigma)) \xrightarrow{\sim} End_G(i_M^G(\sigma))$$

Comme dans [1, p.92], nous supposerons que ces choix explicites ont été faits pour tous les couples (M,σ) et ce de manière compatible avec l'action de W_G et le passage à la contragrédiente. En particulier, si $w \in W_G$ est tel que $M^w < G$, alors la conjugaison par w dans W_G fournit un isomorphisme $R_\sigma \xrightarrow{w} R_{\sigma^w}$ dont on suppose qu'il s'étend à un isomorphisme $\widetilde{R}_\sigma \xrightarrow{w} \widetilde{R}_{\sigma^w}$ de telle sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{R_\sigma} & \longrightarrow & Aut_G(i_M^G(\sigma)) \\ \big\downarrow w & & \big\downarrow w \\ \widetilde{R_{\sigma^w}} & \longrightarrow & Aut_G(i_{M^w}^G(\sigma^w)) \end{array} .$$

ii) Il est aussi expliqué dans [1, p.86] comment scinder le quotient $W_\sigma \twoheadrightarrow R_\sigma$: le noyau de ce morphisme est en fait le groupe de Weyl d'un certain sous-système de racines de $\Phi(G, A_M)$ dans $X(M)\otimes\mathbb{Q}$ (où $X(M)$ est l'ensemble des caractères F-rationnels du groupe algébrique M et A_M est la composante déployée de $\mathcal{Z}(M)^0$). le choix d'une section $R_\sigma \hookrightarrow W_\sigma$ est équivalent à celui d'une chambre pour ce système de racines. Contrairement à [1], nous avons un choix privilégié d'une telle chambre puisque nous travaillons avec l'ensemble des sous-groupes de Levi standards[1] pour une certaine chambre C du système $\Phi(G, A_{M_0})$; on choisira l'unique chambre dont l'adhérence contient $(X(M)\otimes\mathbb{Q})^* \cap \overline{C}$. Cette convention permet, grâce à [1, p.88, l.-9], d'identifier R_σ^L (le R-groupe de (M,σ) relatif au sous-groupe de Levi standard $M < L < G$) à un sous-groupe de R_σ, plus précisément au sous-groupe $R_\sigma \cap \mathcal{N}_L(M)/M$. Cette identification se prolonge à une inclusion $i_L^G : \widetilde{R_\sigma^L} \hookrightarrow \widetilde{R_\sigma}$ où $\widetilde{R_\sigma^L}$ désigne par définition l'extension centrale de R_σ^L induite par $\widetilde{R_\sigma}$ (voir [1, p.89]). La notation i_L^G est justifiée par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{R_\sigma^L} & \longrightarrow & Aut_L(i_M^L(\sigma)) \\ \big\downarrow i_L^G & & \big\downarrow i_L^G \\ \widetilde{R_\sigma} & \longrightarrow & Aut_G(i_M^G(\sigma)) \end{array} .$$

Encore une fois, cette commutativité n'est assurée qu'après des choix pertinents dans les constructions effectuées. Remarquons aussi que les $\widetilde{R^L}$-groupes obtenus pour L vérifient les mêmes conditions de compatibilité que celles requises pour G au i).

iii) *Levis associés* : Soit $r \in R_\sigma$, d'après [1, p.90], l'espace $(X^*(M)\otimes\mathbb{Q})^r$ (les r-invariants) est de la forme $X^*(L(r))\otimes\mathbb{Q}$ pour un certain sous-groupe de Levi $L(r)$ contenant M. Il n'y a pas de raison *a priori* que $L(r)$ soit standard, mais il est au moins W_G-conjugué à un sous-groupe de Levi standard. On notera $R_{\sigma reg}$ l'ensemble des $r \in R_\sigma$ tels que $L(r) = G$ et $\widetilde{R}_{\sigma reg}$ son image inverse dans $\widetilde{R_\sigma}$. Plus généralement, si $\widetilde{r} \in \widetilde{R_\sigma}$ et si $r \in R_\sigma$ est l'image de $\widetilde{r}$ dans R_σ, on pose $L(\widetilde{r}) := L(r)$.

4.2 *Distributions invariantes associées* : Fixons un triplet $\tau = (M, \sigma, \widetilde{r})$, avec $M < G$, $\sigma \in E^2(M)$ et $\widetilde{r} \in \widetilde{R_\sigma}$. On peut lui associer la distribution invariante

$$\chi_\tau : f \in \mathcal{H}(G) \mapsto \mathrm{Tr}(\widetilde{r} \circ f, i_M^G(\sigma))$$

[1] En effet Arthur travaille avec l'ensemble plus gros des W_G-conjugués de nos sous-groupes de Levi standards.

qui d'après la formule (2.3) de [1] admet un développement :

$$\chi_\tau := \sum_{\pi | i_M^G(\sigma)} \lambda_{\pi,\widetilde{r}} \chi_\pi$$

où la notation $\pi | i_M^G(\sigma)$ signifie que π est un constituant irréductible de $i_M^G(\sigma)$ et les coefficients $\lambda_{\pi,\widetilde{r}}$ sont des entiers algébriques de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[|\widetilde{R_\sigma}|]{1})$. On notera aussi

$$x_\tau := \sum_\pi \lambda_{\pi,\widetilde{r}} \pi \in \mathcal{R}(G) \otimes \overline{\mathbb{Z}}. \tag{4.3}$$

Pour $z \in Z_\sigma$, notons $z\tau$ le triplet $(M, \sigma, z.\widetilde{r})$ et pour $w \in W_G$ tel que $w(M) < G$, notons $w\tau$ le triplet (M^w, σ^w, r^w) obtenu par conjugaison. D'après [1, p.92-93], on a

$$\forall z \in \mathbb{Z},\ x_{z\tau} = \chi_\sigma(z)^{-1} x_\tau \quad \text{et} \quad \forall w \in W_G,\ x_{w\tau} = x_\tau \tag{4.4}$$

Ces relations montrent que x_τ peut être eventuellement nul. En fait, suivant Arthur, un triplet est dit *essentiel* si

$$\{z \in Z_\sigma,\ z\omega(\widetilde{r}) \subset \omega(\widetilde{r})\} \subset ker\ \chi_\sigma$$

($\omega(\widetilde{r})$ est la classe de $\widetilde{R_\sigma}$-conjugaison de $\widetilde{r}$.) On voit alors que x_τ est non nul si et seulement si τ est essentiel.

4.5 *$\widetilde{R}$-triplets :* Les bases que nous cherchons seront indexées par des classes d'équivalence de triplets introduits par Arthur. Un $\widetilde{R}$-triplet (resp. un R-triplet) est un triplet $(M, \sigma, \widetilde{r})$ avec $M < G$, $\sigma \in E^2(M)$ et $\widetilde{r} \in \widetilde{R_\sigma}$ (resp. R_σ). À tout $\widetilde{R}$-triplet $(M, \sigma, \widetilde{r})$ est associé canoniquement un R-triplet (M, σ, r) où r est l'image de $\widetilde{r}$ dans R_σ. Un R-triplet est dit essentiel, s'il est associé à un $\widetilde{R}$-triplet essentiel. Une difficulté technique dans ce qui va suivre est que nos bases vont être *moralement* indexées par des classes de R-triplets, alors que les distributions qui nous intéressent sont plutôt associées à des $\widetilde{R}$-triplets : ceci explique (et excuse ?) la multiplication des notations à venir.[2]

Suivant Arthur, on note $\widetilde{T}(G)$ l'ensemble des $\widetilde{R}$-triplets essentiels et $T(G)$ le quotient de $\widetilde{T}(G)$ par la relation d'équivalence $(M, \sigma, \widetilde{r}) \sim (M^w, \sigma^w, \widetilde{r}^w)$ où $w \in W_G$.[3]. Énumérons les propriétés de ces ensembles :

i) On a une action de $\mathbb{Z}$ sur $\widetilde{T}(G)$ donnée par $z(M, \sigma, \widetilde{r}) := (M, \sigma, z_\sigma^z.\widetilde{r})$ (rappelons que z_σ est le générateur de Z_σ). La symétrie sous W_G requise sur les choix effectués au paragraphe précédent permet de descendre cette action sur $T(G)$. Les ensembles quotients $\widetilde{T}(G)/\mathbb{Z}$ (resp. $T(G)/\mathbb{Z}$) s'identifient aux ensembles de R-triplets essentiels (resp. R-triplets essentiels modulo W_G).

ii) ([1, p.93]) Soit $\tau = (M, \sigma, r)$ un R-triplet et $\psi \in \Psi_u(L(r))$, alors $(M, \sigma\psi, r)$ est encore un R-triplet. L'action $\psi \in \Psi_u(L(r)) \mapsto (M, \sigma\psi, r)$ est localement libre et munit donc l'ensemble $\widetilde{T}(G)/\mathbb{Z}$ d'une structure analytique qui est isomorphe à une union disjointe de tores compacts. Par passage au quotient on obtient une structure analytique sur $T(G)/\mathbb{Z}$ et on note $T^0(G)/\mathbb{Z}$ l'ensemble des composantes connexes de $T(G)/\mathbb{Z}$. Par définition, on appelle composante connexe de $T(G)$ les fibres au-dessus de celles de $T(G)/\mathbb{Z}$ et on note $T^0(G)$ l'ensemble de ces composantes.[4]

iii) Soit $\mathcal{L}$ une classe d'association de sous-groupes de Levi standards, on définit $\widetilde{T}_\mathcal{L}(G)$ l'ensemble des $\tau = (M, \sigma, \widetilde{r}) \in \widetilde{T}(G)$ tels que $L(\widetilde{r})$ soit conjugué à un élément de $\mathcal{L}$ ($L(\widetilde{r})$ est défini au

[2] Notons que pour les groupes classiques, ces circonvolutions sont superflues car les actions des R-groupes sont déja linéarisables (les cocycles sont triviaux)

[3] Le $T(G)$ ainsi défini est bien le même que celui d'Arthur, mais pas le $\widetilde{T}(G)$: voir remarque précédente.

[4] Dans [1, p.93] est suggérée l'existence d'une structure analytique obtenue de façon similaire sur $\widetilde{T}(G)$ lui-même. Cela ne me paraît pas évident car il faudrait vérifier pour cela que l'on peut trivialiser "uniformément" la famille de 2-cocycles $\{\eta_{\sigma\psi}\}_{\psi\in\Psi(M)}$.

4.1 iii)). Cet ensemble, étant stable sous la relation d'équivalence induite par W_G, définit un ensemble $T_{\mathcal{L}}(G)$ dont on note $T^0_{\mathcal{L}}(G)$ l'ensemble des composantes connexes. Il est alors facile de voir que :

$$T(G) = \coprod_{\mathcal{L}\in\mathcal{L}(G)} T_{\mathcal{L}}(G) \quad \text{et} \quad T^0(G) = \coprod_{\mathcal{L}\in\mathcal{L}(G)} T^0_{\mathcal{L}}(G)$$

où l'on désigne par $\mathcal{L}(G)$ l'ensemble des classes d'associations de sous-groupes de Levi standards (qui s'identifie à l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de Levi F-rationnels). Ces décompositions sont stables sous l'action de $\mathbb{Z}$ décrite au i).

iv) Soit $L < G$ et $\tau = (M, \sigma, \widetilde{r})$ un $\widetilde{R}$-triplet relatif à L ; l'inclusion $i_L^G : \widetilde{R^L_\sigma} \hookrightarrow \widetilde{R_\sigma}$ permet de le voir aussi comme un triplet relatif à G. Notons $x^L_\tau \in \mathcal{R}(L) \otimes \overline{\mathbb{Z}}$ et $x^G_{i(\tau)} \in \mathcal{R}(G) \otimes \overline{\mathbb{Z}}$ les caractères virtuels associés à τ et $i_L^G\tau$ par 4.3. D'après [1, p.89] (ou 4.1ii)), on a

$$x^G_{i(\tau)} = i_L^G(x^L_\tau).$$

Remarquons que si τ est essentiel pour L, alors $i_L^G\tau$ peut ne pas l'être pour G. On notera $\widetilde{T}(L)_G$, $T(L)_G$, etc... les sous-ensembles respectifs de $\widetilde{T}(L)$, $T(L)$, etc... formés de triplets G-essentiels. L'inclusion i_L^G mentionnée ci-dessus induit donc des applications $T(L)_G \longrightarrow T(G)$, etc... $\mathbb{Z}$-équivariantes, pour l'action de $\mathbb{Z}$ décrite au i).

v) Partie elliptique : on note encore $T_{ell}(G)$ (resp. $T^0_{ell}(G)$) la partie $T_G(G)$ (resp. $T^0_G(G)$) correspondant à $\mathcal{L} = \{G\}$ dans iii). Les orbites de l'action de $\Psi_u(G)$ sur $T_{ell}(G)/\mathbb{Z}$ sont les composantes connexes de celui-ci (donc les élements de $T^0_{ell}(G)/\mathbb{Z}$).
Fixons $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(G)$ et $L \in \mathcal{L}$. Remarquons que $W^L_G := \mathcal{N}_G(L)/L$ agit sur $T_{ell}(L)$ de manière $\mathbb{Z}$-équivariante. En particulier, l'action stabilise la partie G-essentielle $T_{ell}(L)_G$. On montre alors que l'application décrite au iv) induit une bijection

$$T_{ell}(L)_G/(W^L_G \times \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} T_{\mathcal{L}}(G)/\mathbb{Z}$$

et qu'il en est de même pour T^0 à la place de T :
- *injectivité* : Si (M, σ, r) et (M', σ', r') sont deux L-$\widetilde{R}$-triplets G-essentiels de même image dans $T_{\mathcal{L}}(G)/\mathbb{Z}$, alors il existe $w \in W_G$ et $z_\sigma \in Z_\sigma$ tel que $(M', \sigma', r') = (M^w, \sigma^w, (z_\sigma.r)^w)$. On a alors $L = L(r') = L((z_\sigma.r)^w) = L(r)^w = L^w$ donc $w \in \mathcal{N}_G(L)$.
- *surjectivité* Soit (M, σ, r) un triplet de $T_{\mathcal{L}}(G)$, d'après [1, p.90], $L(r)$ est l'unique sous-groupe de Levi contenant M_0 d'un sous-groupe parabolique quasi-standard $P(r)$ *i.e.* W_G-conjugué à un parabolique standard. On peut alors montrer qu'il existe $w \in W_G$ tel que $L(r)^w = L$ et $M^w < G$. En effet, soit A_0 l'appartement *sphérique* relatif à M_0 et C la chambre standard. Soit $F(r)$ la facette fixée par $P(r)$. L'ensemble A_0^M des points fixes sous M dans A_0 est un polysimplexe contenant $F(r)$ (puisque $M \subset \underline{P(r)}$) et on peut donc choisir une facette F de dimension maximale dans A_0^M telle que $F(r) \subset \overline{F}$. Le fixateur de F dans G est un sous-groupe parabolique Q contenant M. On fixe maintenant une chambre C_1 de l'appartement A_0 telle que $F \subset \overline{C_1}$, alors il existe w_1 tel que $C_1 = w_1(C)$; les sous-groupes paraboliques $P(r)^{w_1}$ et Q^{w_1} sont alors standards, et on a donc $M^{w_1} < L(r)^{w_1} < G$. Soit maintenant w_2 tel que $L = w_2(L(r)^{w_1})$ et de longueur minimale dans $w_2 W_{L(r)^{w_1}}$ (voir [10, 1.1.2]) alors l'élément $w = w_2 w_1$ a la propriété cherchée. L'image de notre triplet initial dans $T_{\mathcal{L}}(G)$ est donc égale à celle du triplet (M^w, σ^w, r^w) avec $M^w < L$ et $r^w \in L(r^w) = L$, ce qui montre la surjectivité.

vi) Décomposition : soit $\tau = (M, \sigma, r)$ un $\widetilde{R}$-triplet, il existe une unique classe d'inertie $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)$ telle que $i_M^G(\sigma) \in Mod(\mathfrak{s})$. Ceci permet de décomposer $\widetilde{T}(G)$ en une réunion disjointe de $\widetilde{T}(\mathfrak{s})$ et de même pour T et T^0. Ces décompositions sont stables sous l'action de $\mathbb{Z}$. De plus, si $L < G$ et $\mathfrak{s}_L$ est une L-classe d'inertie au-dessus de $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)$, on note $W_{\mathfrak{s}_L} := \mathcal{N}_G(\mathfrak{s}_L)/L$ et on a l'analogue de l'isomorphisme ci-dessus (que nous exprimons pour T^0 pour future référence) :

$$T^0_{ell}(\mathfrak{s}_L)_G/(W_{\mathfrak{s}_L} \times \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} T^0_{\mathcal{L}}(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}.$$

4.6 *Caractères elliptiques :* Notons $\overline{\mathcal{R}}(G)$ le quotient de $\mathcal{R}(G)$ par le sous-groupe $\mathcal{R}_I(G)$ engendré par les induites paraboliques (voir [3]), puis $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(G)$ le groupe des co-invariants de $\overline{\mathcal{R}}(G)$ sous l'action du tore des caractères non-ramifiés $\Psi(G)$. L'image dans $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(G)$ d'un élément $x \in \mathcal{R}(G)$ sera notée $\overline{x}$. Nous allons utiliser la théorie d'Arthur pour expliciter une base de $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(G) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ qui sera indexée par $T^0_{ell}(G)/\mathbb{Z}$. Comme nous nous intéressons à des propriétés d'intégalité, on introduit aussi $\overline{\mathcal{R}}^{\overline{\mathbb{Z}}}_\Psi(G)$ l'image du morphisme $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(G) \otimes \overline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \overline{\mathcal{R}}_\Psi(G) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$.

Fixons maintenant une classe d'inertie $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)$ et donnons-nous une section

$$s: \; T^0_{ell}(\mathfrak{s})/\mathbb{Z} \longrightarrow T_{ell}(\mathfrak{s}),$$

alors on a

Théorème 4.7 *(Arthur) La famille $\overline{x_{s(\tau)}}$ pour $\tau \in T^0_{ell}(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}$ est une base de $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathfrak{s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ qui engendre un $\overline{\mathbb{Z}}$-module libre $\overline{\mathcal{R}}^T_\Psi(\mathfrak{s})$* indépendant du choix de la section *s et tel que :*

$$|W_G|.\overline{\mathcal{R}}^{\overline{\mathbb{Z}}}_\Psi(\mathfrak{s}) \subset \overline{\mathcal{R}}^T_\Psi(\mathfrak{s}) \subset \overline{\mathcal{R}}^{\overline{\mathbb{Z}}}_\Psi(\mathfrak{s}).$$

Preuve : Pour montrer que le $\overline{\mathbb{Z}}$-module en question est indépendant de la section choisie, on montre l'assertion plus précise suivante : fixons $\tau \in T^0_{ell}(G)/\mathbb{Z}$ et deux $\widetilde{R}$-triplets $t = (M, \sigma, \widetilde{r})$ et $t' = (M', \sigma', \widetilde{r'})$ au-dessus de τ, alors les images de x_τ et $x_{\tau'}$ dans $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(G)$ sont proportionnelles, le facteur étant une racine de l'unité.

Pour cela on remarque d'abord que, par définition, quitte à conjuguer par un élément de W_G, on peut supposer que $M' = M$, $\sigma' = \sigma\psi$ pour un certain $\psi \in \Psi_u(G)$ et que les images $r \in R_\sigma$ et $r' \in R_{\sigma'}$ de $\widetilde{r}$ et $\widetilde{r'}$ sont égales dans $R_\sigma = R_{\sigma\psi}$. La seule subtilité est que les choix dans la construction des extensions $\widetilde{R}$ ne nous permettent pas *a priori* de prolonger l'identification canonique $R_\sigma = R_{\sigma\psi}$ à un isomorphisme $\widetilde{R}_\sigma \simeq \widetilde{R}_{\sigma\psi}$.[5] On considère donc $\widetilde{R} := \widetilde{R}_\sigma \times_{R_\sigma} \widetilde{R}_{\sigma\psi}$ et on note

$$\rho_\sigma,\; \rho_{\sigma\psi} \;:\; \widetilde{R} \longrightarrow Aut_G(i^G_M\sigma) = Aut_G(i^G_M\sigma\psi)$$

les morphismes de groupe obtenus en relevant les actions respectives de $\widetilde{R}_\sigma$ et $\widetilde{R}_{\sigma\psi}$. Alors par définition, les composées de ρ_σ et $\rho_{\sigma\psi}$ avec la projection $Aut_G(i^G_M\sigma) \longrightarrow Aut_G(i^G_M\sigma)/\mathbb{C}^*$ coïncident donc $\rho_{\sigma\psi} = \chi\rho_\sigma$ pour un certain caractère multiplicatif χ de $\widetilde{R}$. On en déduit que $x_{t'} = \chi((\widetilde{r}, \widetilde{r'})).\psi.x_t$ et l'indépendance voulue.

Montrons ensuite les deux inclusions annoncées : la deuxième est immédiate par la définition des $x_{s(\tau)}$ de 4.3. Pour la première, on utilise le résultat de classification de Langlands des irréductibles en fonction des tempérées des sous-groupes de Levi : il implique que $\mathcal{R}(G)$ est engendré par les familles tempérées $i^G_M(\rho\psi)$, pour $M < G$, ρ tempérée de M et $\psi \in \Psi(M)$ (voir [6, Thm XI.2.11]). En conséquence, on peut se contenter de montrer que pour toute $\pi \in Irr(G)$ tempérée, l'image $\overline{\pi}$ de π dans $\overline{\mathcal{R}}^{\mathbb{Z}}_\Psi(\mathfrak{s})$ vérifie $\overline{\pi} \in \frac{1}{|W_G|}\overline{\mathcal{R}}^T_\Psi(\mathfrak{s})$. Supposons donc que $\pi | i^G_M(\sigma)$ pour un certain $M < G$ et $\sigma \in E^2(M)$. On utilise la formule d' "inversion" (2.4) de [1] : elle nous dit qu'il existe un caractère irréductible θ de $\widetilde{R_\sigma}$, de caractère central χ_σ^{-1} et tel que

$$\pi = \frac{1}{|\widetilde{R_\sigma}|}\sum_{\widetilde{r} \in \widetilde{R_\sigma}} \theta(\widetilde{r}) x_{\widetilde{r}}$$

Remarquons que par l'invariance $x_{z\widetilde{r}} = \chi_\sigma(z)^{-1}x_{\widetilde{r}}$, la somme se simplifie en

$$\pi = \frac{1}{|R_\sigma|}\sum_{r \in R_\sigma} \theta(r) x_r$$

[5]En fait, nous aurions pu imposer une symétrie des choix sous l'action de $\Psi_u(G)$ comme on l'a fait pour celle de W_G. Nous ne le faisons pas car par ailleurs nous sommes incapables de garantir une telle symétrie pour les triplets non-elliptiques dont nous aurons besoin un peu plus loin.

où l'on sous-entend le choix (sans influence) d'une section ensembliste $R_\sigma \hookrightarrow \widetilde{R}_\sigma$. On obtient alors, en scindant la somme selon la régularité de r :

$$|R_\sigma|\pi = \sum_{r \in R_{\sigma\, reg}} \theta(r) x_r + \sum_{r \in R_\sigma \setminus R_{\sigma\, reg}} \theta(r) x_r$$

Le second terme de la somme ainsi scindée est dans $(\mathcal{R}(G) \otimes \overline{\mathbb{Z}}) \cap (\mathcal{R}_I(G) \otimes \overline{\mathbb{Q}})$, d'après [1, p.90, l.-9]. Son image dans $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathfrak{s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ est donc nulle. Quant au premier terme, puisque les valeurs de θ sont des entiers algébriques, son image dans $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathfrak{s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ appartient en fait à $\overline{\mathcal{R}}^T_\Psi(\mathfrak{s})$. L'ordre de R_σ étant un diviseur de W_G, on obtient la première inclusion.

Il reste maintenant à voir que la famille $(x_{s(\tau)})_\tau$ est linéairement indépendante sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (ou sur $\mathbb{C}$). Ceci est une conséquence des formules d'orthogonalité de Arthur que nous rappelons ci-dessous en les adaptant légèrement. $\square$

4.8 *Produit scalaire elliptique* : Soit Z un complément de $\mathcal{Z}(G)^0$ dans $\mathcal{Z}(G)$. Fixons momentanément un caractère $\omega : Z \longrightarrow \mathbb{C}^*$ et considérons le groupe $\mathcal{R}(G,\omega)$ engendré par les irréductibles dont le caractère central coïncide avec ω sur Z. Notons aussi $\Psi_0(G) := Hom_{\mathbb{Z}}(G/G^0 Z, \mathbb{C}^*)$; ce groupe (fini et commutatif) agit sur $\mathcal{R}(G,\omega)$. On peut alors définir de manière analogue à précédemment le groupe $\overline{\mathcal{R}}_{\Psi_0}(G,\omega)$ qui est canoniquement isomorphe à $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(G)$ (isomorphisme induit par l'inclusion $\mathcal{R}(G,\omega) \hookrightarrow \mathcal{R}(G)$).

Soient x et y dans $\mathcal{R}(G,\omega)$; les notation χ_x et χ_y ont jusqu'ici désigné les formes linéaires sur $\overline{\mathcal{H}}(G)$ données par les caractères-traces de x et y. On sait depuis Harish-Chandra que ces formes linéaires sont aussi données par des fonctions localement intégrables sur G et lisses sur G^{sr}. On notera ces fontions par les mêmes symboles χ_x et χ_y. On définit (Harish-Chandra, Kazhdan) une forme bilinéaire “elliptique” par la formule :

$$[x,y] := \sum_{\psi \in \Psi_0(G)} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_{ell}} |W_T|^{-1} \int_{T/Z} |D(\gamma)| \chi_x(\gamma) \chi_{\psi.y}(\gamma^{-1}) d\gamma \right) \tag{4.9}$$

où $\mathcal{T}_{ell}$ est un ensemble de représentants des G-classes de conjugaisons de tores maximaux elliptiques, W_T est le groupe de Weil de G par rapport à T, $D(\gamma)$ est le discriminant de Weyl et les mesures $d\gamma$ sont normalisées (de masse 1) sur les groupes compacts T/Z.

Puisque $\mathcal{R}_I(G,\omega)$ est dans le noyau de cette forme bilinéaire (on sait par [18] que les représentations paraboliquement induites ont un caractère nul sur les éléments elliptiques), elle induit une forme sur le quotient $\overline{\mathcal{R}}(G,\omega)$. De même les éléments de la forme $x - \psi.x$ avec $\psi \in \Psi_0(G)$ sont dans le noyau de cette nouvelle forme donc celle-ci se descend en une forme sur $\overline{\mathcal{R}}_{\Psi_0}(G,\omega)$. Par l'isomorphisme canonique $\overline{\mathcal{R}}_{\Psi_0}(G,\omega) \simeq \overline{\mathcal{R}}_\Psi(G)$, on a donc obtenu une forme bilinéaire $[\ ,\ ]$: $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(G) \times \overline{\mathcal{R}}_\Psi(G) \longrightarrow \mathbb{C}$. Elle est bien-sûr compatible avec la décomposition $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(G) = \bigoplus \overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathfrak{s})$. Fixons comme précédemment une section $s :\ T^0_{ell}(\mathfrak{s})/\mathbb{Z} \longrightarrow T_{ell}(\mathfrak{s})$, alors avec les mêmes notations que pour 4.7,

Théorème 4.10 *(Arthur) La famille $\overline{x_{s(\tau)}}$ pour $\tau \in T^0_{ell}(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}$ est orthogonale pour la forme bilinéaire elliptique $[.,.]$. De plus, on a la formule indépendante du choix de s :*

$$\left[\overline{x_{s(\tau)}}, \overline{x_{s(\tau)}}\right] = |\Psi_\tau||R_{\sigma,r}||d(r)|$$

où Ψ_τ est le stabilisateur de $x_{s(\tau)}$ dans $\Psi_0(G)$, $R_{\sigma,r}$ est le centralisateur dans R_σ de l'image r de $\widetilde{r}$ dans R_σ et $d(r)$ est le “R-analogue” du discriminant de Weyl, défini dans [1, p.76].

Preuve : Notons momentanément (t_1,t_2) le produit scalaire défini par la formule (6.5) de [1] (où l'on remplace τ et τ' par t_1 et t_2) pour deux éléments t_1 et t_2 de $T(G)$ ayant le même caractère central. Remarquons que si t_1 et t_2 sont dans $T(\mathfrak{s})$, les restriction de leurs caractères centraux à $\mathcal{Z}(G)^0$ sont égales (et uniquement déterminées par $\mathfrak{s}$). On peut donc choisir pour chaque $\tau \in T^0_{ell}(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}$ un représentant $t \in T(G)$ de la composante connexe $s(\tau)$ de telle sorte que les t

obtenus aient le même caractère central (rappelons que $\mathcal{Z}(G) = \mathcal{Z}(G)^0 \times Z\,!$). Alors par définition :

$$\left[\overline{x_{s(\tau)}}, \overline{x_{s(\tau')}}\right] = \sum_{\psi \in \Psi_0} (t, \psi t')$$

En effet la seule chose à remarquer est que puisque chaque $x_{\psi t'}$ est unitaire, pour tout $\gamma \in G_{ell}$, on a $\chi_{x_{\psi t'}(\gamma^{-1})} = \overline{\chi_{x_{\psi t'}}(\gamma)}$ (conjugaison complexe). La propriété d'orthogonalité se déduit donc immédiatement de la première partie du corollaire (6.2) de [1] (rappelons que les composantes connexes de $T_{ell}(\mathfrak{s})$ coïncident avec ses $\Psi_u(G)$-orbites).

La formule donnée pour $[\overline{x_{s(\tau)}}, \overline{x_{s(\tau)}}]$ se déduit de la deuxième partie de ce corollaire ([1, 6.2]) et des égalités

$$(t, \psi.t) = \begin{cases} (t,t) & \text{si } \psi \in \Psi_t \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La seconde vient de ce que Ψ_t est simplement le normalisateur de $i_M^G(\sigma) \in R(G)$ dans $\Psi_u(G)$ et du résultat d'orthogonalité de Kazhdan [13, Thm G] (voir aussi remarque (1) p.118 de [1]). $\square$

4.11 *Sous-groupes de Levi et association :* Rappelons qu'on a noté $\mathcal{L}(G)$ l'ensemble des classes d'association de sous-groupes de Levi standards de G. Soit $\mathcal{M} \in \mathcal{L}(G)$ une telle classe, on définit

$$\overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathcal{M}) := \bigoplus_{M \in \mathcal{M}} \overline{\mathcal{R}}_\Psi(M)/\sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence qui identifie (M, x) et (M^w, x^w) pour tous $x \in \overline{\mathcal{R}}_\Psi(M)$, $w \in W_G$ tel que $w(M) < G$. On note encore $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathcal{M}, \mathfrak{s})$ la composante correspondant aux M-classes d'inertie "au-dessus" de $\mathfrak{s}$, c'est à dire

$$\overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathcal{M}, \mathfrak{s}) = \bigoplus_{M \in \mathcal{M}} \left(\oplus_{\mathfrak{s}_M|\mathfrak{s}} \overline{\mathcal{R}}_\Psi(M, \mathfrak{s}_M)\right)/\sim .$$

Comme d'habitude on note $\overline{\mathcal{R}}_\Psi^{\overline{\mathbb{Z}}}(\mathcal{M}, \mathfrak{s})$ l'image de $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathcal{M}, \mathfrak{s}) \otimes \overline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathcal{M}, \mathfrak{s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$.

Fixons maintenant $M \in \mathcal{M}$ et $\mathfrak{s}_M|\mathfrak{s}$ et notons $W_{\mathfrak{s}_M}$ le normalisateur de $\mathfrak{s}_M$ dans W_G. Alors $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathcal{M}, \mathfrak{s})$ s'identifie au groupe des coinvariants $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(M, \mathfrak{s}_M)_{W_{\mathfrak{s}_M}}$. En conséquence, si $\tau \in T^0_{ell}(\mathfrak{s}_M)$, l'élément $\overline{x^M_\tau} \in \overline{\mathcal{R}}_\Psi^{\overline{\mathbb{Z}}}(\mathcal{M}, \mathfrak{s})$ ne dépend que de la $W_{\mathfrak{s}_M}$-orbite de τ. On choisit une section

$$s : T^0_{ell}(\mathfrak{s}_M)/(\mathbb{Z} \times W_{\mathfrak{s}_M}) \hookrightarrow T_{ell}(\mathfrak{s}_M)/W_{\mathfrak{s}_M}$$

et on identifie $T^0_{\mathcal{M}}(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}$ à un sous-ensemble de $T^0_{ell}(\mathfrak{s}_M)/(\mathbb{Z} \times W_{\mathfrak{s}_M})$ via la bijection de 4.5 vi)). Alors on peut énoncer l'analogue de 4.7 :

Proposition 4.12 – *L'image de $x^M_{s(\tau)}$ dans $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathcal{M}, \mathfrak{s})$ est non-nulle si et seulement si τ est G-essentiel,* i.e. $\tau \in T^0_{\mathcal{M}}(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}$.

– *La famille $\overline{x^M_{s(\tau)}}$ pour $\tau \in T^0_{\mathcal{M}}(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}$ est une base de $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathcal{M}, \mathfrak{s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ qui engendre un $\overline{\mathbb{Z}}$-module libre $\overline{\mathcal{R}}^T_\Psi(\mathcal{M}, \mathfrak{s})$ (indépendant du choix de la section s) et tel que :*

$$|W_G|.\overline{\mathcal{R}}_\Psi^{\overline{\mathbb{Z}}}(\mathcal{M}, \mathfrak{s}) \subset \overline{\mathcal{R}}^T_\Psi(\mathcal{M}, \mathfrak{s}) \subset \overline{\mathcal{R}}_\Psi^{\overline{\mathbb{Z}}}(\mathcal{M}, \mathfrak{s}).$$

Preuve : Soit $\tau = (N, \sigma, \widetilde{r}) \in T^0_{ell}(\mathfrak{s}_M)$. Par définition, τ n'est pas G-essentiel si et seulement si

$$\exists w \in R^G_\sigma, z \in \mathbb{Z} \;\; w\widetilde{r}w^{-1} = z\widetilde{r} \;\text{ et }\; \chi_\sigma(z) \neq 1.$$

Remarquons que dans ce cas, $L(\widetilde{r}) = M$ est invariant par w, si bien que c'est équivalent à la même assertion avec $\exists\, w \in W_{\mathfrak{s}_M}$, etc...

D'autre part l'image $\overline{x^M_\tau}$ de x^M_τ dans $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathcal{M}, \mathfrak{s})$ vérifie :

$$\overline{x^M_{z\tau}} = \chi_\sigma(z)^{-1}\overline{x^M_\tau} \quad \text{et} \quad \forall w \in W_{\mathfrak{s}_M},\; \overline{x^M_{w\tau}} = \overline{x^M_\tau}$$

Il est donc clair que si τ n'est pas G-essentiel, $\overline{x_\tau^M}$ est nul. La seule chose qui reste à montrer, compte tenu de ce qui a été fait dans la preuve de 4.7 est que la famille $\overline{x_{s(\tau)}^M}$, pour $\tau \in T^0_{\mathcal{M}}(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}$ est libre. Ceci sera déduit de l'analogue des formules d'orthogonalité de 4.10. $\square$

4.13 *Sous-groupes de Levi et produit scalaire :* Soit $\mathcal{M} \in \mathcal{L}(G)$ et $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)$, on définit une forme bilinéaire symétrique de manière naturelle sur $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathcal{M}, \mathfrak{s})$ en l'identifiant à $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(M, \mathfrak{s}_M)_{W_{\mathfrak{s}_M}}$ pour $M \in \mathcal{M}$ et $\mathfrak{s}_M|\mathfrak{s}$ fixés. Notons $[\ ,\ ]_M$ l'analogue pour M de la forme sur $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(M, \mathfrak{s}_M)$ définie au moyen de la formule 4.9, alors il est facile de voir que cette forme est invariante sous $\mathcal{N}_G(M)/M$ puisque celui-ci permute les (classes de conjugaison de) tores elliptiques de M en respectant les mesures de Haar fixées. En conséquence, la forme

$$x, y \in \overline{\mathcal{R}}_\Psi(M, \mathfrak{s}_M) \mapsto \sum_{w \in W_{\mathfrak{s}_M}} [x, y^w]_M$$

est symétrique et contient les éléments de la forme $x - wx$ dans son noyau, donc induit une forme bilinéaire sur $\overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathcal{M}, \mathfrak{s})$. Celle-ci est indépendante des choix effectués et sera notée $[\ ,\ ]_{\mathcal{M}}$.

Fixons une section $s : T^0_{\mathcal{M}}(\mathfrak{s})/\mathbb{Z} \hookrightarrow T_{\mathcal{M}}(\mathfrak{s})$, alors

Proposition 4.14 *La famille $\overline{x_{s(\tau)}^M}$ pour $\tau \in T^0_{\mathcal{M}}(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}$ est orthogonale pour la forme bilinéaire $[\ ,\ ]_{\mathcal{M}}$. De plus, si τ est l'image du triplet $t = (N, \sigma, \widetilde{r})$, on a la formule indépendante du choix de s :*

$$\left[\overline{x_{s(\tau)}^M}, \overline{x_{s(\tau)}^M}\right]_{\mathcal{M}} = |W_t||\Psi_\tau(M)||R^M_{\sigma,r}||d_M(r)|$$

où $W_t = Stab_{W_{\mathfrak{s}_M}}(t)$ est le normalisateur dans $W_{\mathfrak{s}_M}$ de l'image de t dans $T^0(\mathfrak{s}_M)$ et les autres notations sont les analogues de celles de 4.10 pour M à la place de G.

Preuve : Puisque les éléments de $T^0_{\mathcal{M}}(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}$ sont dans des $W_{\mathfrak{s}_M}$-orbites disjointes (d'après 4.5 v)), l'orthogonalité est une conséquence de celle de 4.10. D'autre part, t étant le triplet de l'énoncé, notons encore t l'élément de $T^0_{ell}(\mathfrak{s}_M)$ qu'il définit ainsi que $x_t^M \in \overline{\mathcal{R}}_\Psi(M, \mathfrak{s}_M)$ l'élément associé. Alors, dans la formule

$$\left[\overline{x_{s(\tau)}^M}, \overline{x_{s(\tau)}^M}\right]_{\mathcal{M}} = \sum_{w \in W_{\mathfrak{s}_M}} [x_t^M, x_{t^w}^M]_M,$$

les seuls termes non nuls de la somme de droite sont obtenus pour $w(t) \in \mathbb{Z}.t$ à cause des formules d'orthogonalité de 4.10. Or, l'essentialité de t s'exprime par l'implication $w(t) \in \mathbb{Z}t \Rightarrow w(t) = t$ ce qui montre la formule annoncée. $\square$

5 Bases duales. Une formule de type Plancherel

Nous allons exhiber des bases de $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$ et $\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})^*_c$ indexées par les $\mathbb{Z}$-orbites dans $T^0(G)$ et (presque) duales l'une de l'autre, en utilisant les résultats et notations de la partie précédente. Ces bases dépendent du choix d'une section

$$s :\ T^0(G)/\mathbb{Z} \hookrightarrow T(G)$$

qu'on supposera fixée dans toute la suite. En fait, ce choix a une influence minime sur les éléments qu'on va définir : un autre choix conduirait à des multiples de ces éléments, de facteur une racine de l'unité. Rappelons par ailleurs qu'on a une union disjointe

$$T^0(G)/\mathbb{Z} = \coprod_{\mathcal{M} \in \mathcal{L}(G)} T^0_{\mathcal{M}}(G)/\mathbb{Z}.$$

5.1 *Une jolie base de $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$:* Rappelons que puisque $\mathcal{H}(G)$ est de dimension cohomologique finie, tout G-module de type fini définit par résolution projective un élément de $\mathcal{K}(G)$. C'est en particulier le cas, si $M < G$ et $\sigma \in Irr(M)$, pour le G-module $i_M^G(\sigma \otimes \mathbb{C}[M/M^0])$ (où M agit diagonalement sur $\sigma \otimes \mathbb{C}[M/M^0]$). De plus d'après [12, 4.26], le morphisme obtenu :

$$\begin{array}{rrcl} \phi_{\mathcal{M}} : & \bigoplus_{M\in\mathcal{M},\mathfrak{s}_M|\mathfrak{s}} \mathcal{R}(M,\mathfrak{s}_M) & \rightarrow & \mathcal{K}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s}) \\ & (M,\sigma) & \mapsto & i_M^G(\sigma \otimes \mathbb{C}[M/M^0]) \end{array}$$

se factorise par la projection $\bigoplus_{M,\mathfrak{s}_M} \mathcal{R}(M,\mathfrak{s}_M) \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathcal{M},\mathfrak{s})$. Ceci permet de faire la définition suivante :

(5.2) $$\text{Soit } \tau \in T^0_{\mathcal{M}}(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}, \text{ on pose } \quad X_\tau := \phi_{\mathcal{M}}(\overline{x^M_{s(\tau)}}) \in \mathcal{K}^{\overline{\mathbb{Z}}}(\mathfrak{s})$$

avec les notations de 4.12 et 4.14 (les choix de $M \in \mathcal{M}$, $\mathfrak{s}_M|\mathfrak{s}$ n'ont évidemment aucune influence). On a alors le résultat suivant

Proposition 5.3 *La famille des X_τ pour $\tau \in T^0(G)/\mathbb{Z}$ est une base de $\mathcal{K}(\mathfrak{s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$. Si $\mathcal{K}^T(\mathfrak{s})$ est le $\overline{\mathbb{Z}}$-module (libre) qu'elle engendre alors il existe un entier $k_G \in \mathbb{N}$ (indépendant de $\mathfrak{s}$) tel que :*

$$\widetilde{w_G}^{k_G} \mathcal{K}^{\overline{\mathbb{Z}}}(\mathfrak{s}) \subset \mathcal{K}^T(\mathfrak{s}) \subset \mathcal{K}^{\overline{\mathbb{Z}}}(\mathfrak{s}).$$

Avant de passer à la preuve, il nous faut effectuer quelques rappels de [12] et même en raffiner un peu les résultats et constructions.

Proposition 5.4 *Il existe une famille de projecteurs $\pi_{\mathcal{M}} \in End_{\mathbb{Q}}(\mathcal{K}(\mathfrak{s}) \otimes \mathbb{Q})$ pour chaque $\mathcal{M} \in \mathcal{L}(G)$ telle que*

i) $\pi_{\mathcal{M}} \circ \pi_{\mathcal{L}} = 0$ *si* $\mathcal{M} \neq \mathcal{L}$.

ii) $\pi_{\mathcal{M}} \circ \phi_{\mathcal{M}} = \phi_{\mathcal{M}}$

iii) $\pi_{\mathcal{M}} = \frac{1}{W_{\mathcal{M}}}\left(1 - \sum_{N<\mathcal{M}} c_{\mathcal{M}}(N) i_N^G \circ r_G^N\right)$ *où la notation $N < \mathcal{M}$ signifie $N < M$ pour un certain $M \in \mathcal{M}$, les $c_{\mathcal{M}}(N)$ sont des entiers et $W_{\mathcal{M}}$ est un entier divisant une puissance de $|W_G|$*

D'autre part l'application $\bigoplus_{\mathcal{M}\in\mathcal{L}(G)} \phi_{\mathcal{M}}$: $\bigoplus_{\mathcal{M}} \overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathcal{M},\mathfrak{s}) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{K}(\mathfrak{s}) \otimes \mathbb{Q}$ est un isomorphisme ; ce qui a pour conséquence l'égalité $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)} = \sum_{\mathcal{M}} \pi_{\mathcal{M}}$.

Preuve : Si $M < G$ on notera $d(M) = dim_{\mathbb{Q}}(X^*(M) \otimes \mathbb{Q})$. Nous invitons le lecteur à se référer à [12] partie 2 où ont été définis (suivant une idée de Bernstein) des projecteurs π^d, $d \in \mathbb{N}$ de $End_{\mathbb{Q}}(\mathcal{K}(\mathfrak{s}) \otimes \mathbb{Q})$ (voir [12, prop. 2.5]).

Soit $M < G$ et π^d_M le projecteur défini de manière analogue pour M. Notons, comme dans [12, 2.4], $P_M := |\mathcal{N}_G(M)/M|$. Alors si $M \in \mathcal{M}$, on définit

(5.5) $$\pi_{\mathcal{M}} := \frac{1}{P_M} i_M^G \circ \pi_M^{d(M)} \circ r_G^M$$

Le fait que cela ne dépende que de $\mathcal{M}$ est une conséquence formelle du fait que $(\mathcal{K}(.) \otimes \mathbb{Q}, r, i, w)$ est un système de Hopf vérifiant la propriété iii) de [12, prop 2.5] et de la remarque [12, 2.6.i)] qui par conséquent s'y applique. La propriété i) vient du fait que si $L \notin \mathcal{M}$ et $d(L) \geqslant d(\mathcal{M})$, alors :

(5.6) $$r_G^L \circ \pi_{\mathcal{M}} = 0 \quad \text{et} \quad \pi_{\mathcal{M}} \circ i_L^G = 0$$

(conséquence de [12, prop. 2.5]). L'egalité $\pi_{\mathcal{M}} \circ \pi_{\mathcal{M}} = \pi_{\mathcal{M}}$ est aussi une conséquence de [12, 2.5] et de la formule de composition $r_G^M \circ i_M^G$. La propriété ii) vient de ce que

$$r_G^M \circ i_M^G[\sigma \otimes \mathbb{C}[M/M^0]] = \sum_{w\in\mathcal{N}(M)/M} [\sigma^w \otimes \mathbb{C}[M/M^0]] \quad \text{et} \quad \pi_M^{d(M)}[\sigma \otimes \mathbb{C}[M/M^0]] = [\sigma \otimes \mathbb{C}[M/M^0]$$

(conséquence de [12, 4.26]). La formule iii) vient de la définition de $\pi_M^{d(M)}$. Quant à la propriété d'isomorphisme, elle vient du théorème 4.25 de [12]. □

Preuve : (de la proposition 5.3) Le fait que la famille est une base de $\mathcal{K}(\mathfrak{s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ (ou de manière équivalente de $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$) est une conséquence de la dernière assertion de 5.4 et des propositions 4.7 et 4.12. De même, la deuxième inclusion vient de la définition et des "deuxièmes inclusions" de 4.7 et 4.12. Intéressons-nous donc à la première inclusion. Remarquons que grâce aux propositions 4.7 et 4.12 et au fait que $|W_G|$ divise $\widetilde{w_G}$, il suffit de montrer l'existence d'un $k_G \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathcal{K}^{\mathbb{Z}}(G) \subset \frac{1}{\widetilde{w_G}^k} \sum_{\mathcal{M} \in \mathcal{L}(G)} \phi_{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}_{\Psi}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{M})) := im\ \phi^{\mathbb{Z}} \tag{5.7}$$

Ceci est "contenu" dans la discussion de la partie 4 de [12] mais n'y est pas écrit puisqu'on s'y est contenté de résultats sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$. Plutôt que de reprendre pas à pas les arguments de cette discussion, nous en utilisons le résultat final qui a été rappelé dans la proposition 5.3. Celui-ci nous invite à faire une récurrence sur le rang de G. Supposons donc que pour tout sous-groupe de Levi $M < G$, il existe un entier k_M tel que l'inclusion 5.7 soit vérifiée pour les objets correspondant à M. Soit $X \in \mathcal{K}^{\mathbb{Z}}(G)$, alors on peut écrire

$$X = \sum_{\mathcal{M} \in \mathcal{L}(G)} \pi_{\mathcal{M}} X = \pi_G X + X'$$

D'après 5.3, $X' \in \sum_{\mathcal{M}} \frac{1}{W_{\mathcal{M}}} i_M^G \mathcal{K}^{\mathbb{Z}}(M)$. L'hypothèse de récurrence et le fait que M_M divise $\widetilde{w_G}$ pour $M < G$ (par définition) montre que $X' \in \frac{1}{\widetilde{w_G}^{k_G^1}}\ im\ \phi^{\mathbb{Z}}$ pour un certain k_G^1 (indépendant de X). On est donc ramené au cas "discret" où $X = \pi_G X$.

Pour ce cas discret, on ne peut pas éviter de reprendre en détail la discussion de [12, ch.4] : le lecteur est invité à s'y référer pour trouver la définition de deux filtrations, l'une "topologique" $F^*\mathcal{K}(G)$ (voir *loc.cit* 4.2) et l'autre "combinatoire" $\mathcal{K}^*(G)$ (voir *loc.cit* 2.3). Le niveau qui nous intéresse est le niveau discret où $* = d(G)$: le cas $X = \pi_G X$ correspond en effet au cas $X \in \mathcal{K}^{d(G),\mathbb{Z}}(G)$ (l'image de $\mathcal{K}^{d(G)}(G)$ dans $\mathcal{K}^{d(G)}(G) \otimes \mathbb{Q}$). D'après [12, 4.11], on a $F^{d(G)}\mathcal{K}(G) \subset \mathcal{K}^{d(G)}(G)$ et d'après [12, 4.15], on a $F^{d(G)}\mathcal{K}(G) \otimes \mathbb{Q} = \mathcal{K}^{d(G)}(G) \otimes \mathbb{Q}$. En fait la preuve de [12, 4.15] montre une propriété plus précise, à savoir que $\mathcal{K}^{d(G)}(G)/F^{d(G)}\mathcal{K}(G)$ est de torsion, annulé par une puissance de $|W_G|$. Ceci permet de supposer, en enregistrant qu'on a du multiplier par cette puissance de $|W_G|$, que $X \in F^{d(G)}\mathcal{K}^{\mathbb{Z}}(G)$.

Par définition, on a $F^{d(G)}\mathcal{K}(G) = \sum_Y i_*^Y(\mathcal{K}(G,Y))$, la somme portant sur les sous-variétés Y de dimension $d(G)$ de $\Theta(G)$ (la variété des caractères infinitésimaux de G) et les objets i_*^Y et $\mathcal{K}(G,Y)$ étant décrits dans [12, 4.2].

D'après [12, 4.12], les seules variétés irréductibles Y dont l'image de $i_*^Y\mathcal{K}(G,Y) \longrightarrow \mathcal{K}(G) \otimes \mathbb{Q}$ est non nulle sont de la forme $\Psi(G).\theta$ pour un certain caractère infinitésimal "discret" θ (voir [12, 4.12]) dans $\Theta(G)$. Supposons donc que $X \in im\,(\mathcal{K}(G, \Psi(G).\theta) \longrightarrow \mathcal{K}(G) \otimes \mathbb{Q})$ pour un θ discret et notons comme dans [12, 1.2] *EP* l'application

$$\begin{array}{cccc} EP: & \mathcal{R}(G,\theta) & \to & \mathcal{K}^{\mathbb{Z}}(G) \\ & \pi & \mapsto & [\pi \otimes \mathbb{C}[G/G^0]] \end{array}$$

et $\mathcal{N}_Y = \mathcal{N}_{\Psi(G)}(\theta)$ le normalisateur de θ dans $\Psi(G)$. D'après [12, 4.18], on a

$$< im\ EP >_{\mathbb{Q}} = < im\ (\mathcal{K}(G, \Psi(G).\theta) \longrightarrow \mathcal{K}(G) \otimes \mathbb{Q}) >_{\mathbb{Q}}$$

(espaces vectoriels engendrés sur $\mathbb{Q}$). En fait la preuve de [12, prop.4.18], montre que

$$|\mathcal{N}_Y|\ im\ (\mathcal{K}(G, \Psi(G).\theta) \longrightarrow \mathcal{K}(G) \otimes \mathbb{Q}) \subset im\ EP.$$

En particulier, $|\mathcal{N}_Y| X \in im\ \phi^{\mathbb{Z}}$. Puisque $|\mathcal{N}_Y|$ divise $|G/G^0\mathcal{Z}(G)|$ et donc divise $\widetilde{w_G}$, cela termine la preuve de la première inclusion. (Remarquons qu'à cause de la récurrence, toute explicitation d'un tel k_G serait certainement grossière) $\square$

Tournons-nous maintenant vers le côté dual.

5.8 *Une jolie base de $\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})^*_c$:* Sans vouloir ennuyer le lecteur avec des définitions formelles qui sont de peu d'intérêt ici, la dualité entre $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$ et $\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})^*_c$ permet de munir celui-ci d'une structure de système de Hopf "trivialisable" au sens de [12, prop. 2.10 iii)]. Les morphismes i et w sont ceux auxquels on pense (induction parabolique et association) mais pour r, la remarque qui suit le lemme 2.6 nous oblige à tronquer la restriction parabolique aux compacts. On pose donc ${}^c r_G^M := 1_{M_c^0} \circ r_G^M : \overline{\mathcal{H}}(G)^*_c \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}(M)^*_c$.

Les opérateurs $\pi_{\mathcal{M}}$ de la proposition 5.4 ont des adjoints notés ${}^c\pi_{\mathcal{M}} \in End(\overline{\mathcal{H}}(G)^*_c)$. Ils admettent les développements :

$$ {}^c\pi_{\mathcal{M}} = \frac{1}{W_{\mathcal{M}}}\left(1 - \sum_{N<\mathcal{M}} c_{\mathcal{M}}(N) i_N^G \circ^c r_G^N\right) $$

et jouissent de la même "table de multiplication" que les $\pi_{\mathcal{M}}$ (voir 5.4).

Fixons maintenant $\mathcal{M} \in \mathcal{L}(G)$ et $M \in \mathcal{M}$, on définit

$$ \begin{array}{rccl} \psi_{\mathcal{M}} : & \bigoplus_{M\in\mathcal{M}} \mathcal{R}(M, \mathfrak{s}_M) & \to & \overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})^*_c \\ & (M,\sigma) & \mapsto & {}^c\pi_{\mathcal{M}}.i_M^G(\chi_{\sigma|M_c^0}) \end{array} $$

On montre que $\psi_{\mathcal{M}}$ se factorise par $\bigoplus_{M\in\mathcal{M}} \mathcal{R}(M,\mathfrak{s}_M) \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{R}}_\Psi(\mathcal{M},\mathfrak{s})$; pour cela il y a trois choses à vérifier :

- $\psi_{\mathcal{M}}(M,\sigma\psi) = \psi_{\mathcal{M}}(M,\sigma)$ pour tout $\psi \in \Psi(M)$; ceci est clair sur la définition puisque $\chi_{\sigma\psi|M_c^0} = \chi_{\sigma|M_c^0}$.
- $\psi_{\mathcal{M}}(M^w,\sigma^w) = \psi_{\mathcal{M}}(M,\sigma)$ pour $M^w < G$. Pour cela il suffit d'écrire que $i_M^G(\chi_{\sigma|M_c^0}) = i_M^G(\chi_\sigma)_{|G_c^0}$ (lemme 2.6) et d'utiliser [3, 5.4.iii)].
- $\psi_{\mathcal{M}}(M,\sigma) = 0$ si $\sigma \in \mathcal{R}_I(M)$. Pour cela, on utilise encore le fait que si $L < M$ et $\rho \in \mathcal{R}(L)$, alors $i_L^G(\rho)_{|M_c^0} = i_L^G(\rho_{|L_c^0})$. On conclut par adjonction de la propriété 5.6.

Ceci nous permet de faire la définition suivante :

$$ \text{Soit } \tau \in T^0_{\mathcal{M}}(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}, \text{ on pose } \quad D_\tau := \psi_{\mathcal{M}}(\overline{x^M_{s(\tau)}}) \in \overline{\mathcal{H}}^{\overline{\mathbb{Z}}}(\mathfrak{s})^*_c \otimes \overline{\mathbb{Q}} \tag{5.9} $$

avec les notations de 4.7. On a alors :

Proposition 5.10 *La famille des D_τ pour $\tau \in T^0/\mathbb{Z}$ est une base de $\overline{\mathcal{H}}^{\overline{\mathbb{Z}}}(\mathfrak{s})^*_c \otimes \overline{\mathbb{Q}}$. Si $\overline{\mathcal{H}}^T(\mathfrak{s})^*_c$ est le $\overline{\mathbb{Z}}$-module (libre) qu'elle engendre alors il existe deux entiers $h_G^1, h_G^2 \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$ |W_G|^{h_G^1}\overline{\mathcal{H}}^{\overline{\mathbb{Z}}}(\mathfrak{s})^*_c \ \subset \ \overline{\mathcal{H}}^T(\mathfrak{s})^*_c \ \subset \ |W_G|^{-h_G^2}\overline{\mathcal{H}}^{\overline{\mathbb{Z}}}(\mathfrak{s})^*_c. $$

Preuve : Montrons d'abord la double inclusion annoncée. D'après les propositions 4.7 et 4.12, il suffit de montrer qu'il existe des entiers h^1 et h^2 tels que :

$$ |W_G|^{h^1}\overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})^*_c \subset \sum_{\mathcal{M}\in\mathcal{L}(G)} \psi_{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}^{\mathbb{Z}}_\Psi(\mathcal{M},\mathfrak{s})) := im\ \psi^{\mathbb{Z}} \subset |W_G|^{-h^2}\overline{\mathcal{H}}^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{s})^*_c. $$

Pour cela, remarquons d'abord qu'on a l'égalité, sur $\overline{\mathcal{H}}(G)^*$

$$ {}^c r_G^M \circ 1_{G_c^0} = {}^c r_G^M $$

En effet, par adjonction cela est équivalent à dire que sur $\overline{\mathcal{H}}(M)$, on a l'égalité $i_M^G \circ 1_{M_c^0} = 1_{G_c^0} \circ i_M^G \circ 1_{M_c^0}$, et ceci est vrai puisque $1_{M_c^0}\overline{\mathcal{H}}(M) = \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(M)$ et $i_M^G\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$.

En conséquence, pour tout $M < G$ et tout $x \in \mathcal{R}(M)$, on a

$$ \psi_{\mathcal{M}}(x) = \chi_{\pi_{\mathcal{M}} i_M^G x_{|G_c^0}} $$

où $\pi_{\mathcal{M}}$ est vu comme un opérateur sur $\mathcal{R}(G)\otimes\mathbb{Q}$ via la formule 5.4 iii) donnant son développement en termes de composées $i \circ r$. D'après ce même développement on a $W_{\mathcal{M}}\pi_{\mathcal{M}} \in End_{\mathbb{Z}}(\mathcal{R}(G))$ et $W_{\mathcal{M}}$ divise une puissance de $|W_G|$. On en déduit la deuxième inclusion annoncée.

Pour la première inclusion, soit $\rho \in \mathcal{R}(G)$, on écrit :

$$\chi_{\rho|G_c^0} = \sum_{\mathcal{M}\in\mathcal{L}(G)} {}^c\pi_{\mathcal{M}}\chi_{\rho|G_c^0} = \sum_{\mathcal{M}} {}^c\pi_{\mathcal{M}}\chi_{\pi_{\mathcal{M}}\rho|G_c^0} = \sum_{\mathcal{M}} {}^c\pi_{\mathcal{M}} i_M^G(\chi_{\sigma_M|M_c^0})$$

en posant $\sigma_M = \frac{1}{P_M}\pi_M^{d(M)} r_G^M \rho$. La première égalité vient de ce que $\mathrm{Id}_{\overline{\mathcal{H}}(G)_c^*} = \sum_{\mathcal{M}} {}^c\pi_{\mathcal{M}}$ par adjonction de l'égalité correspondante sur $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$. La deuxième égalité vient de la propriété de projecteur de $\pi_{\mathcal{M}}$ et la troisième de la formule 5.5 par laquelle on a défini $\pi_{\mathcal{M}}$. La première inclusion annoncée se voit facilement sur l'égalité obtenue ci-dessus.

On déduit maintenant des propositions 4.7 et 4.12 que la famille des D_τ est génératrice de $\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})_c^*$, puis par dualité avec $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s})$ qui est de dimension finie et qui admet par 5.3 une base de cardinal $|T^0(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}|$, on voit que c'est une base. □

Le ii) de la proposition suivante est la clef de voûte de l'ensemble de ce travail. C'est une conséquence d'un résultat de Schneider et Stuhler, et indépendamment de Bezrukavnikov qui décrit la restriction aux éléments (compacts) elliptiques du caractère d'une représentation, en termes d'intégrales orbitales d'un certain “pseudo-coefficient”.

Proposition 5.11 *i) Pour $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ deux classes d'associations de sous-groupes de Levi standards distinctes, on a $< im\ \phi_{\mathcal{M}}, im\ \psi_{\mathcal{L}} >= 0$.*

ii) $\forall x, y \in \overline{\mathcal{R}}_{\Psi}(\mathcal{M}, \mathfrak{s})$, $< \phi_{\mathcal{M}}(x), \psi_{\mathcal{M}}(y) >= [x, y]_{\mathcal{M}}$.

Preuve : Pour le point i), on a par définition ${}^c\pi_{\mathcal{L}}\ im\ \psi_{\mathcal{L}} = im\ \psi_{\mathcal{L}}$ et on sait par 5.4 que $\pi_{\mathcal{M}}\ im\ \phi_{\mathcal{M}} = \phi_{\mathcal{M}}$. Or par construction ${}^c\pi_{\mathcal{L}}$ est adjoint de $\pi_{\mathcal{L}}$ pour $<,>$ et par 5.4 à nouveau, $\pi_{\mathcal{L}} \circ \pi_{\mathcal{M}} = 0$. Pour le point ii), fixons $M < G$, $x, y \in \mathcal{R}(M, \mathfrak{s}_M)$ et commençons par écrire

$$\begin{aligned}
\left\langle i_M^G(x \otimes \mathbb{C}[M/M^0]), {}^c\pi_{\mathcal{M}} i_M^G(\chi_{y|M_c^0})\right\rangle_G &= \left\langle i_M^G(x \otimes \mathbb{C}[M/M^0]), i_M^G(\chi_{y|M_c^0})\right\rangle_G \\
&= \sum_{w\in\mathcal{N}_G(M)/M} \left\langle [x^w \otimes \mathbb{C}[M/M^0]], \chi_{y|M_c^0}\right\rangle_M \\
&= \sum_{w\in W_{\mathfrak{s}_M}} \left\langle [x^w \otimes \mathbb{C}[M/M^0]], \chi_{y|M_c^0}\right\rangle_M
\end{aligned}$$

où la deuxième ligne est obtenue par adjonction et par l'égalité déja utilisée dans 5.4 :

$$r_G^M \circ i_M^G[x \otimes \mathbb{C}[M/M^0]] = \sum_{w\in\mathcal{N}(M)/M} [x^w \otimes \mathbb{C}[M/M^0]] \quad \text{dans } \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(M)$$

et la troisième ligne par orthogonalité de $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(M, \mathfrak{s}_M^w)$ et $\overline{\mathcal{H}}(M, \mathfrak{s}_M)$ lorsque $\mathfrak{s}_M^w \neq \mathfrak{s}_M$. D'après la forme de l'égalité obtenue et la définition de $[\ ,\ ]_{\mathcal{M}}$ à partir de $[\ ,\ ]_M$, on est ramené à montrer l'égalité du point ii) dans le cas $\mathcal{M} = \{G\}$

Supposons donc que $\mathcal{M} = \{G\}$ et gardons $x, y \in \mathcal{R}(G)$. Rappelons que nous utilisons le même symbole χ_x pour désigner le caractère trace de x ou la fonction localement intégrable qui lui est associée par Harish-Chandra. On a donc :

$$\left\langle [x \otimes \mathbb{C}[G/G^0]], \chi_{y|G_c^0}\right\rangle = \int_{G_c^0} \chi_y(g)\, Rk[x \otimes \mathbb{C}[G/G^0]]$$

où $Rk : \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}(G)$ a été défini au 2.3. Remarquons que pour définir le terme de droite il faut choisir un représentant dans $\mathcal{H}(G)$ de $Rk[x \otimes \mathbb{C}[G/G^0]]$; l'intégrale n'en dépend pas puique χ_y est invariante par conjugaison. On peut maintenant appliquer la formule d'intégration de Weyl, telle qu'elle est écrite dans [1, p.81], par exemple, en tenant compte du fait que si $g \notin G^{ell}$, alors l'intégrale orbitale de $Rk[x \otimes \mathbb{C}[G/G^0]]$ sur l'orbite $\omega(g)$ est nulle (par [12, 3.2.iii)]). On obtient donc, avec les mêmes notations qu'au 4.8,

$$\begin{aligned}
&\int_G \chi_y(g)\, Rk[x \otimes \mathbb{C}[G/G^0]](g)dg \\
= &\sum_{T\in\mathcal{T}_{ell}} |W_T|^{-1} \int_{T^0} |D(\gamma)|\chi_y(\gamma) \left(\int_{G/Z} Rk[x \otimes \mathbb{C}[G/G^0]](g\gamma g^{-1})\right) d\gamma
\end{aligned}$$

où $T^0 = T \cap G_c^0 = T \cap G^0$ est l'ensemble des éléments compacts du tore elliptique T. On a maintenant besoin d'un résultat déja utilisé dans [12] ; notons pour tout $f \in \overline{\mathcal{H}}(G)$ la fonction localement constante sur G^{ell} définie par

$$f^\vee(\gamma) := \int_{G/Z} f(g\gamma^{-1}g^{-1})$$

Alors d'après [12, 3.6. i)] (où l'on fait $\lambda = 1$ et on choisit pour χ – notations de *loc.cit.* – le caractère central de x) et [12, 3.7] (résultat dû à Schneider-Stuhler et Bezrukavnikov), on a

$$\forall \gamma \in G^{ell} \cap G_c^0, \;\; Rk[x \otimes \mathbb{C}[G/G^0]]^\vee(\gamma) = \sum_{\psi \in \Psi_0(G)} \chi_{\psi.x}(\gamma)$$

En supposant que les restrictions des caractères centraux de x et y à Z sont égales, on peut donc réécrire le dernier terme obtenu

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_{ell}} |W_T|^{-1} \int_{T^0 Z/Z} |D(\gamma)| \chi_y(\gamma) \left(\sum_{\psi \in \Psi_0(G)} \chi_{\psi.x}(\gamma^{-1}) \right) d\gamma$$

Remarquons que le terme entre parenthèses est à support dans $T^0 Z \subset T$ si bien qu'on peut étendre le domaine d'intégration à T/Z et retrouver la formule 4.9 donnant le produit scalaire elliptique $[\, ,\,]_G$. $\square$

Corollaire 5.12 *Soit X_τ^*, $\tau \in T^0(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}$ la base de $\overline{\mathcal{H}}(\mathfrak{s})_c^*$ duale de la base des X_τ dans $\mathcal{K}_\mathbb{C}(\mathfrak{s})$, alors on a*

$$X_\tau^* = \frac{d_\tau}{m_\tau} D_\tau$$

où, avec les notations de 4.14 et 4.10,

- $m_\tau = |W_t||\Psi_t(M)||R_{\sigma,r}^M|$ *est un entier divisant une puissance de* $\widetilde{w_G}$.
- $d_\tau = |d_M(r)|^{-1} \in \frac{1}{n_\tau^{s_G}} \overline{\mathbb{Z}}$ *où n_τ est l'ordre de l'élément $r \in R_\sigma$ et s_G le rang semi-simple de G.*

Preuve : Les seules choses à prouver sont les assertions sur la nature de m_τ et d_τ. Pour m_τ, l'assertion est claire (rappelons que $R_{\sigma,r}^M$ est l'ordre d'un sous-groupe de R_σ^M, lui même “sous-quotient” de W_G...). Pour d_τ, rappelons que par la définition de [1, p.76], $d(r) = \det(1-r)_{\mathfrak{a}_N/\mathfrak{a}_M}$ où $\tau = (N, \sigma, r)$ (notation de 4.14) et $\mathfrak{a}_N = (X(N) \otimes \mathbb{Q})^*$. Donc d_τ^{-1} est le déterminant d'une matrice R de taille $\leqslant s_G$ vérifiant l'équation (déduite de $r^{n_\tau} = 1$)

$$\sum_{m=0}^{n_\tau - 1} (-1)^m \binom{n_\tau}{m} R^m = 0 = n_\tau R^{n_\tau - 1} + \cdots 1.$$

La matrice $n_\tau R$ satisfait donc une équation entière d'où $\det R \in \frac{1}{n_\tau^{s_G}} \overline{\mathbb{Z}}$.

$\square$

Corollaire 5.13 *(Théorème 3.4) Il existe une puissance de $\widetilde{w_G}$, disons $\widetilde{w_G}^d$, telle que pour toute classe d'inertie $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)$, le discriminant $d_\mathfrak{s}$ de l'accouplement entier $\mathcal{K}_\mathbb{C}^\mathbb{Z}(\mathfrak{s}) \times \overline{\mathcal{H}}^\mathbb{Z}(\mathfrak{s})_c^* \xrightarrow{<\,,\,>} \mathbb{Z}$ divise $\widetilde{w_G}^d$.*

Preuve : C'est une conséquence immédiate du corollaire précédent et des propositions 5.3 et 5.9 $\square$

La formule de type Plancherel(-Arthur) annoncée consiste maintenant simplement à écrire, en notant $\mathrm{df}(X_\tau)$ la dimension formelle comme dans 1.4 :

$$(5.14) \qquad < D_\mathfrak{s}, f > = \sum_{\tau \in T^0(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}} \frac{d_\tau}{m_\tau} < D_\tau, f.\mathrm{df}(X_\tau) >, \;\; \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(G, \mathbb{C})$$

C'est un développement de la distribution invariante $D_{\mathfrak{s}}$ en combinaison linéaire de caractères virtuels, mais qui conserve sa part de mystère dans les coefficients $\mathrm{df}(X_\tau)$. Plus précisément, remarquons que (comme d'habitude) on peut calculer les coefficients discrets (correspondant aux triplets elliptiques) de manière explicite grâce aux résolutions de Schneider-Stuhler par exemple : si τ est l'image du triplet (M, σ, r), on voit par [15, III.4] ou par comparaison avec la formule de Plancherel-Harish-Chandra (voir 5.16) que :

$$\mathrm{df}(X_\tau) = \begin{cases} d(\sigma) \text{ (degré formel)} & \text{si } M = G \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mais pour ce qui est des autres, cela semble plus compliqué : le problème est qu'on ne maîtrise pas bien les représentations du type $i_M^G(ind_{J_M}^M(\tau_M))$ où (J_M, τ_M) est un couple ouvert compact. Comme on va l'expliquer plus loin, ce problème est aussi à l'origine de la conjecture 1.11. Auparavant, il semble intéressant de comparer la formule ci-dessus à celle qu'on obtient par application de la formule de Harish-Chandra.

5.15 *Lien avec la formule de Harish-Chandra :* Ce paragraphe a un but "informatif" et ne contient pas de preuves, ni de définitions précises ; on pourra les trouver dans [21] auquel nous empruntons aussi quelques notations. Notons

$$D(G) := \{(M, \sigma),\ \ M < G,\ \sigma \in E^2(M)\}/\sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence d'association habituelle. Cet ensemble est muni d'une structure de variété analytique isomorphe à une union disjointe de tores compacts (de façon similaire à $T(G)$) et joue un rôle similaire pour l'algèbre de Schwartz-Harish-Chandra $\mathcal{C}(G)$ à celui joué par la variété $\Theta(G)$ des caractères infinitésimaux pour $\mathcal{H}(G)$. En effet, suivant Schneider et Stuhler ([16, Appendix]) on peut définir une catégorie "tempérée" $Mod_t(G)$ comme la catégorie des modules unitaux de l'algèbre $\mathcal{C}(G)$ (vue comme algèbre abstraite). Les résultats classiques sur le "support discret" des représentations irréductibles tempérées permettent de scinder $Mod_t(G)$ en un produit direct de sous-catégories abéliennes indexées par l'ensemble $D^0(G)$ des composantes connexes de $D(G)$ (voir [16, 1]). Ainsi, à chaque $\mathfrak{t} \in D^0(G)$ correspond un idempotent central de $Mod_t(G)$ auquel on associe une distribution invariante tempérée que l'on notera $E_{\mathfrak{t}}$. La formule de Plancherel-Harish-Chandra peut s'interpréter comme une formule (presque-) explicite pour ces idempotents centraux.

Fixons donc une composante $\mathfrak{t} \in D^0(G)$ et un représentant (M, σ) de $\mathfrak{t}$. Alors, par [21, VIII.1] la distribution tempérée $E_{\mathfrak{t}}$ s'écrit :

$$< E_{\mathfrak{t}}, f >= C(G|M)^{-2}\gamma(G|M)^{-1}|W_\sigma|^{-1}|\Psi_\sigma|^{-1} \int_{\Psi_u(M)} \mu(\psi, \sigma) < \chi_{i_M^G(\sigma\psi)}, f.d(\sigma) > d\psi$$

pour toute fonction de Schwartz f, et où

- $C(G|M)$ et $\gamma(G|M)$ sont des rationnels ne dépendant que de M dont on peut facilement, si l'on veut, étudier les dénominateurs (voir [21, I.1] pour leur définition).
- W_σ est le normalisateur dans $\mathcal{N}_G(M)/M$ de la $\Psi_u(M)$-orbite de σ. (Son ordre ne dépend que de $\mathfrak{t}$).
- $d(\sigma)$ est le degré formel de $\sigma \in E^2(M)$ (par définition, c'est une mesure de Haar sur M ; on en déduit une mesure de Haar sur G en assignant le même volume à K et $K \cap M$, ce qui donne un sens au crochet sous l'intégrale). Il ne dépend aussi que de $\mathfrak{t}$.
- Ψ_σ est le normalisateur de σ dans $\Psi_u(M)$ (ne dépend que de $\mathfrak{t}$).
- Et le plus important, la fonction $\psi \mapsto \mu(\psi, \sigma)$ est la densité de Plancherel-Harish-Chandra (par rapport à la mesure de Haar normalisée $d\psi$ sur le tore compact $\Psi_u(M)$) définie par exemple dans [21, V.2 et IV.3].

Soit maintenant $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)$ et $D^0(\mathfrak{s})$ l'ensemble (fini) des $\mathfrak{t} \in D^0(G)$ représentées par des couples (M, σ) tels que $i_M^G(\sigma) \in Mod(\mathfrak{s})$. Comme on peut le déduire de [16, 1], on a la formule

$$D_{\mathfrak{s}} = \sum_{\mathfrak{t} \in D^0(\mathfrak{s})} E_{\mathfrak{t}}$$

J'ignore si on peut montrer que chaque $E_{\mathfrak{t}}$ est à support dans les compacts, mais si $f \in \overline{\mathcal{H}}(G)$ a ses intégrales orbitales nulles en dehors des compacts (donc $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$), on voit grâce au lemme 2.6 que la formule pour $E_{\mathfrak{t}}$ se simplifie en :

$$< E_{\mathfrak{t}}, f >= \alpha_{\mathfrak{t}}.\mu(\mathfrak{t}). < \chi_{i_M^G(\sigma)}, f.d(\mathfrak{t}) >$$

où on a choisi (M, σ) représentant $\mathfrak{t}$, on a posé $\alpha_{\mathfrak{t}} = C(G|M)^{-2}\gamma(G|M)^{-1}|W_\sigma|^{-1}$, $d(\mathfrak{t}) = d(\sigma)$ et on a noté

$$\mu(\mathfrak{t}) = |\Psi_\sigma|^{-1} \int_{\Psi_u(M)} \mu(\psi, \sigma) d\psi$$

Ceci, avec le corollaire 2.11 nous donne la formule

$$(5.16) \qquad < D_{\mathfrak{s}}, f >= \sum_{\mathfrak{t} \in D^0(\mathfrak{s})} \alpha_{\mathfrak{t}} \mu(\mathfrak{t}) < i_M^G(\chi_\sigma)_{|G_c^0}, f.d(\mathfrak{t}) >$$

à comparer avec 5.14. Ainsi, si on cherche à étudier la rationalité et l'intégralité des idempotents centraux de $\mathcal{H}(G)$, on voit par le lemme 3.5 qu'il suffit d'étudier les coefficients qui apparaissent dans 5.16. Il est clair que l'étude de $\alpha_{\mathfrak{t}}$ ne pose pas de problème et celle des degrés formels $d(\mathfrak{t})$ a été faite par Vignéras dans [19]. Le problème est ici $\mu(\mathfrak{t})$ sur lequel, à ma connaissance, on a aucune information en général.

L'intérêt de la formule 5.14 est donc essentiellement de s'être débarassé de ces termes $\mu(\mathfrak{t})$ ... en les remplaçant malheureusement par d'autres termes inconnus (les $\mathrm{df}(X_\tau)$ pour $\mathcal{M} \neq \{G\}$) mais dont on va expliquer comment on peut espérer les obtenir. Avant de clore ce paragraphe, on peut remarquer que la disparition des termes $\mu(\mathfrak{t})$ s'explique certainement par leur utilisation "implicite" dans la normalisation des opérateurs d'entrelacement utilisée dans [1] pour définir l'action du R-groupe.

6 Sous-groupes compacts et K_0

Le but de cette section est d'étudier la conjecture 1.11, c'est à dire de comprendre la partie du K_0 qui vient des sous-groupes ouverts compacts. Ce dernier problème peut être raisonablement résolu pour $G = GL(N)$ via la théorie des types de Bushnell et Kutzko et ses développements par Schneider-Zink ou Vignéras. Pour G quelconque, la proposition suivante donne une réduction du probléme qui justifie l'aspect alambiqué de la conjecture 1.11. On utilise cette réduction pour prouver cette dernière pour G de rang 1.

Proposition 6.1 *Supposons que pour tout $M < L < G$, on a*

$$i_M^L(\mathcal{K}_{ind}(M)) \subset \mathcal{K}_{ind}(L)$$

Alors la conjecture 1.11 est vraie.

Preuve : Le raisonnement ressemble à celui de la preuve de la proposition 5.3 ; on traite d'abord le cas discret puis on raisonne par récurrence.

Cas discret : Reprenons la notation $EP : \pi \in \mathcal{R}(G) \mapsto [\pi \otimes \mathbb{C}[G/G^0]] \in F^{d(G)}\mathcal{K}(G)$. Comme il est expliqué dans la preuve de 5.3, on a

$$[G : G^0 Z] F^{d(G)}\mathcal{K}(G) \subset im\ EP \subset F^{d(G)}\mathcal{K}(G)$$

Or, comme application de la résolution de Schneider et Stuhler [15, Th II.3.1], on a montré dans [12, 3.6, proof] que $im\ EP \subset \mathcal{K}_{ind}(G)$.

Récurrence : Soit $X \in \mathcal{K}(G)$ et écrivons avec les notations de 5.3 la décomposition

$$|W_G|^k X = |W_G|^k \pi_G X + |W_G|^k (1 - \pi_G) X$$

avec k assez grand pour que $|W_G|^k \pi_G \in End_{\mathbb{Z}}(\mathcal{K}(G))$. Alors le terme de droite dans la décomposition est par définition dans $\sum_{M<G} i_M^G(\mathcal{K}(M))$ donc si par récurrence on a supposé la conjecture 1.11

vraie pour $M < G$, $M \neq G$, l'hypothèse de la présente proposition montre qu'il existe n tel que $\widetilde{w_G}^n |W_G|^k (1-\pi_G)X \in \mathcal{K}_{ind}(G)$. Quant au terme $Y = |W_G|^k \pi_G X$, par définition il appartient à $\mathcal{K}^{d(G)}(G) = \cap_{M<G} \mathit{ker}\, r_G^M$. Donc, comme il a été rappelé dans la preuve de 5.3, il existe un entier m tel que $|W_G|^m Y \in F^{d(G)}\mathcal{K}(G)$ et on est ramené au cas discret.

□

Fait 6.2 *Supposons G déployé. Alors $i_{M_0}^G \mathcal{K}_{ind}(M_0) \subset \mathcal{K}_{ind}(G)$. En particulier, si G a son rang semi-simple relatif égal à 1, alors, la conjecture 1.11 est vraie pour G.*

Preuve : Rappelons que dans le cas minimal $T = M_0$, le groupe T^0 engendré par les éléments compacts est lui-même compact. $\mathcal{K}_{ind}(T)$ est donc juste l'image du morphisme $ind_{T^0}^T$. Soit χ un caractère lisse de T, Roche a construit dans [14] une *paire couvrante* (J_χ, ρ_χ) *i.e.* un sous-groupe ouvert compact de G et une représentation lisse de celui-ci telle que :

$$ind_{J_\chi}^G(\rho_\chi) \simeq i_T^G \circ ind_{T^0}^T(\chi).$$

On en déduit la première assertion ainsi que la deuxième pour G déployé de rang 1. Remarquons que grâce à [5, p. 7], le raisonnement et le résultat sont encore valables pour les groupes non déployés de type $U(2,1)$. □

Dans le cas de $GL(N)$, la théorie des types, comme on peut s'y attendre, fournit une approche beaucoup plus efficace et précise :

Proposition 6.3 *Soit $G = GL(N)$. Alors $\mathcal{K}(G) = \mathcal{K}(G)_{tors} \oplus \mathcal{K}_{ind}(G)$. En particulier la conjecture 1.11 est vraie pour G.*

Preuve : Dans cette preuve, on appelle algèbre de Hecke affine de type A_n toute algèbre de convolution de fonctions bi-invariantes par "le" sous-groupe d'Iwahori $I(n,E)$ "standard" dans le groupe $GL(n,E)$ où E est une extension finie de F. Une telle algèbre sera notée $\mathcal{H}_a(n,E)$. Le sous-espace des fonctions à support dans $GL(n,\mathcal{O}_E) =: K$ est une sous-algèbre de dimension finie, isomorphe à l'algèbre de Hecke associée au groupe fini $GL(n,k_E)$ et à "son" sous-groupe de Borel "standard". On l'appelera algèbre de Hecke "vectorielle" et on la notera $\mathcal{H}_v(G,E)$. La théorie des types de Buschnell-Kutzko associe à toute classe d'inertie $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(G)$ une algèbre unitaire $\mathcal{H}_\mathfrak{s}$ et un foncteur $F_\mathfrak{s} :\ \mathcal{H}_\mathfrak{s} - \mathit{Mod} \longrightarrow \mathit{Mod}(\mathfrak{s})$ tels que :

- $\mathcal{H}_\mathfrak{s}$ est isomorphe à un produit tensoriel d'algèbres de Hecke affines de type A, [7][9]. On note $\mathcal{H}_\mathfrak{s}^v$ la sous-algèbre "vectorielle" correspondante.
- $F_\mathfrak{s}$ est une équivalence de catégories [8] qui envoie des modules de la forme $M^a = \mathcal{H}_\mathfrak{s} \otimes_{\mathcal{H}_\mathfrak{s}^a} M^v$ sur des représentations induites de sous-groupes ouverts compacts [16].

En conséquence, l'énoncé de la proposition se ramène à un énoncé (clair) concernant une algèbre de Hecke affine de type A et sa partie "vectorielle" que l'on notera respectivement $\mathcal{H}_a$ et $\mathcal{H}_v$.

Supposons pour fixer les idées que $E = F$ et donc $\mathcal{H}_a = \mathcal{H}(GL(N), I(N))$. À tout sous-groupe de Levi standard M de $GL(N)$, on associe une sous-algèbre $\mathcal{H}(M, M \cap I(N))$. Il est pratique de paramétrer les classes de conjugaison de sous-groupes de Levi par l'ensemble $\mathcal{P}(N)$ des partitions de N : à $\lambda \in \mathcal{P}(N)$ on associe le sous-groupe de Levi standard $M_\lambda = GL(\lambda_1) \times \cdots \times GL(\lambda_r)$. On pose alors :

$$\mathcal{H}_a^\lambda := \mathcal{H}(M_\lambda, M_\lambda \cap I(N)) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_v^\lambda := \mathcal{H}_a^\lambda \cap \mathcal{H}_v$$

Le dictionnaire entre les représentations de $GL(N)$ dans le bloc de l'Iwahori et les modules sur $\mathcal{H}_a$ est le suivant (on a écrit I_λ pour $M_\lambda \cap I$) :

$$\begin{array}{rcl} ind_K^G(\tau)^I & = & \mathcal{H}_a \otimes_{\mathcal{H}_v} \tau^I \\ i_{M_\lambda}^G(\sigma)^I & = & \mathcal{H}_a \otimes_{\mathcal{H}_a^\lambda} \sigma^{I_\lambda} \\ r_G^{M_\lambda}(\pi)^{I_\lambda} & = & \pi^I_{|\mathcal{H}_a^\lambda} \end{array}$$

Rappelons maintenant que l'on peut associer à toute partition $\lambda \in \mathcal{P}(N)$:

i) Une série discrète σ_a^λ de $\mathcal{H}_a$, unique modulo torsion par un caractère non ramifié. (Il s'agit simplement du caractère signe !)

ii) Une unique représentation "non dégénérée" σ_v^λ de $\mathcal{H}_v$. (Là encore, il s'agit du caractère signe).

iii) On a la propriété suivante, évidente : $\sigma^\lambda_{a\,|\mathcal{H}_v} = \sigma_v^\lambda$.

L'intérêt de ces représentations réside dans le fait suivant :

Fait 6.4 *On peut classifier "naturellement" les modules simples de $\mathcal{H}_v$ par les partition de N :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(N) & \rightarrow & \mathrm{Irr}(\mathcal{H}_v) \\ \lambda & \mapsto & \tau_v^\lambda \end{array}$$

de telle sorte que la matrice $\left(\left\langle \tau_v^\lambda, \mathcal{H}_v \otimes_{\mathcal{H}_v^{\lambda'}} \sigma_v^\lambda \right\rangle_v\right)_{\lambda,\lambda'}$ *soit triangulaire supèrieure pour tout ordre total raffinant l'ordre de dominance des partitions.*

Ici, le $< \; , \; >_v$ est le produit scalaire usuel sur les caractères des groupes finis. La matrice en question est donc inversible dans $\mathcal{M}_{|\mathcal{P}(N)|}(\mathbb{Z})$.

On note $< \; , \; >_a$ l'accouplement de la partie 2 entre $\mathcal{K}(\mathcal{H}_a)$ et $\mathcal{R}(\mathcal{H}_a)$ donné par $< P, \pi >_a := dim_{\mathbb{C}}(Hom_{\mathcal{H}_a}(P,\pi))$. En vertu de la proposition 5.10 ou de 1.3 qui ici se simplifient considérablement en l'absence de caractères elliptiques non discrets, on a aussi :

Fait 6.5 *Soit $X \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_a)$. Si pour toute partition $\lambda \in \mathcal{P}(N)$, on a $\left\langle X, \mathcal{H}_a \otimes_{\mathcal{H}_a^\lambda} \sigma_a^\lambda \right\rangle_a = 0$, alors $X \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_a)_{tors}$.*

La fin de la preuve est maintenant simple : considérons le morphisme

$$\begin{array}{cccc} I: & \mathcal{R}(\mathcal{H}_v) & \rightarrow & \mathcal{K}(\mathcal{H}_a) \\ & \tau & \mapsto & [\mathcal{H}_a \otimes_{\mathcal{H}_v} \tau] \end{array}$$

La matrice $\left(\left\langle I(\tau_v^\lambda), \mathcal{H}_a \otimes_{\mathcal{H}_a^\lambda} \sigma_a^\lambda \right\rangle_a\right)$ coïncide avec celle du fait 6.4. On en déduit que I est injective, et en y ajoutant le fait 6.5, que $\mathcal{K}(\mathcal{H}_a) = im\,(I) \oplus \mathcal{K}(\mathcal{H}_a)_{tors}$.

□

Remarque : Nous espérons prouver dans un prochain travail que la torsion, dans le cas de $GL(N)$, est en fait nulle.

Références

[1] J. Arthur. On elliptic tempered characters. *Acta Math.*, 171 :73–138, 1993.

[2] A.-M. Aubert and J.-L. Kim. A Plancherel formula on $Sp(4)$. *Preprint E.N.S.*, 2000.

[3] J. Bernstein, P. Deligne, and D. Kazhdan. Trace Paley-Wiener theorem. *J. of Analyse math.*, 47 :180–192, 1986.

[4] J.-N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, and M.F. Vignéras. *Représentations des groupes réductifs sur un corps local.* Travaux en cours. Hermann, Paris, 1984.

[5] L. Blasco. Description du dual admissible de $U(2,1)$ par la thorie des types de Bushnell et Kutzko. *Preprint I.R.M.A.*, 2000.

[6] A. Borel and N. Wallach. *Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups.* Annals of Math.Studies. Princeton Univ. Press, 1980.

[7] C.J. Bushnell and P.C. Kutzko. *The Admissible Dual of $GL(n)$ via open compact groups.* Number 129 in Annals of maths. Studies. Princeton university press, 1993.

[8] C.J. Bushnell and P.C. Kutzko. Smooth representations of reductive p-adic groups : Structure theory via types. *Proc. London Math. Soc.*, 77(3) :582–634, 1998.

[9] C.J. Bushnell and P.C. Kutzko. Semisimple types in $GL(n)$. *Compositio Math.*, 119 :53–97, 1999.

[10] W. Casselman. Introduction to the theory of admissible representations of p-adic groups. *Preprint*, 1974-1993.

[11] L. Clozel. Orbital integrals on p-adic groups : a proof of the Howe conjecture. *Annals of Mathematics*, 129 :237–251, 1989.

[12] J.-F. Dat. On the K_0 of a p-adic group. *Invent. Math.*, 140 :171–226, 2000.

[13] D. Kazhdan. Cuspidal geometry. *J. of Analyse math.*, 47 :1–36, 1986.

[14] A. Roche. Types and Hecke algebras for principal series representations of split reductive p-adic groups. *Ann. Sci. de l'ENS*, 31 :361–413, 1998.

[15] P. Schneider and U. Stuhler. Representation theory of sheaves on the Bruhat-Tits building. *I.H.E.S*, 1995.

[16] P. Schneider and E.-W. Zink. K-types for the tempered components of a p-adic general linear group. *J. reine angew. Math.*, 517 :161–208, 1999.

[17] F. Shahidi. A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures ; Complementary series for p-adic groups. *Annals of Mathematics*, 132 :273–330, 1992.

[18] G. van Dijk. Computation of certain induced characters of p-adic groups. *Math. Ann.*, 199 :229–240, 1972.

[19] M.-F. Vignéras. Banal characteristic for reductive p-adic groups. *J. of Number Theory*, 47 :378–397, 1994.

[20] M.F. Vignéras. *Représentations l-modulaires d'un groupe p-adique avec l différent de p*. Number 137 in Progress in Math. Birkhuser, 1996.

[21] J.-L. Waldspurger. La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques d'après Harish-Chandra. 1997.