Représentations de groupes p-adiques : finitude, cohomologie et correspondance de Langlands

1er Décembre 2006

Représentations sur des corps valués

Fixons deux pro-p-sous-groupes ouverts H_1 et H_2 et posons $\Xi(g) := |H_1 g H_2 / H_2| \in p^{\mathbb{N}}$.

Fixons deux pro-p-sous-groupes ouverts H_1 et H_2 et posons $\Xi(g) := |H_1 g H_2 / H_2| \in p^{\mathbb{N}}$.

Définition *Soit $\mathcal{K}$ un corps normé non-archimédien. Une $\mathcal{K}$-représentation admissible de G est dite* tempérée, *resp.* discrète, *si pour tout coefficient matriciel c, la fonction $g \mapsto c(g)^2 \Xi(g)$ est bornée, resp. tend "essentiellement" vers 0 à l'infini.*

Fixons deux pro-p-sous-groupes ouverts H_1 et H_2 et posons $\Xi(g) := |H_1 g H_2/H_2| \in p^{\mathbb{N}}$.

Définition *Soit $\mathcal{K}$ un corps normé non-archimédien. Une $\mathcal{K}$-représentation admissible de G est dite* tempérée, *resp.* discrète, *si pour tout coefficient matriciel c, la fonction $g \mapsto c(g)^2\Xi(g)$ est bornée, resp. tend "essentiellement" vers 0 à l'infini.*

Lorsque $\mathcal{K}$ est algébriquement clos, on dispose d'un théorème du quotient de Langlands :

Fixons deux pro-p-sous-groupes ouverts H_1 et H_2 et posons $\Xi(g) := |H_1 g H_2 / H_2| \in p^{\mathbb{N}}$.

Définition *Soit $\mathcal{K}$ un corps normé non-archimédien. Une $\mathcal{K}$-représentation admissible de G est dite* tempérée, *resp.* discrète, *si pour tout coefficient matriciel c, la fonction $g \mapsto c(g)^2 \Xi(g)$ est bornée, resp. tend "essentiellement" vers 0 à l'infini.*

Lorsque $\mathcal{K}$ est algébriquement clos, on dispose d'un théorème du quotient de Langlands : toute $\mathcal{K}$-représentation irréductible s'obtient comme unique quotient d'une induite $i_P(\sigma\psi)$ avec σ représentation tempérée de M_P et ψ un caractère non-ramifié de M_P dont la valuation est dans la chambre de Weyl associée à P.

Supposons $\mathcal{K} = \overline{\mathbb{Q}}_l$, avec $l \neq p$.

Supposons $\mathcal{K} = \overline{\mathbb{Q}}_l$, avec $l \neq p$.

- **Proposition** *Soit π une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation admissible*
  - *π est tempérée ssi elle est entière (*i.e. *admet un $\overline{\mathbb{Z}}_l$-réseau stable).*

Supposons $\mathcal{K} = \overline{\mathbb{Q}}_l$, avec $l \neq p$.

- **Proposition** *Soit π une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation admissible*
  - *π est tempérée ssi elle est entière (*i.e. *admet un $\overline{\mathbb{Z}}_l$-réseau stable).*
  - *Si G est classique alors π est discrète ssi elle est supercuspidale et entière.*

Supposons $\mathcal{K} = \overline{\mathbb{Q}}_l$, avec $l \neq p$.

- **Proposition** *Soit π une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation admissible*
  - *π est tempérée ssi elle est entière (*i.e. *admet un $\overline{\mathbb{Z}}_l$-réseau stable).*
  - *Si G est classique alors π est discrète ssi elle est supercuspidale et entière.*

Corollaire
- *π est entière si et seulement si ses sous-quotients irréductibles le sont.*

Supposons $\mathcal{K} = \overline{\mathbb{Q}}_l$, avec $l \neq p$.

Proposition *Soit π une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation admissible*

- *π est tempérée ssi elle est entière (*i.e.* admet un $\overline{\mathbb{Z}}_l$-réseau stable).*
- *Si G est classique alors π est discrète ssi elle est supercuspidale et entière.*

Corollaire

- *π est entière si et seulement si ses sous-quotients irréductibles le sont.*
- *Si π irréductible et G est classique, alors π est entière si et seulement si son support cuspidal est un point entier du spectre de Bernstein, au sens suivant :*

$$(M, \sigma) \in \textit{s.c.}(\pi) \Leftrightarrow \textit{im}\ \omega_\sigma \subset \overline{\mathbb{Z}}_l^\times .$$

Supposons $\mathcal{K} = \overline{\mathbb{Q}}_p$.

Supposons $\mathcal{K} = \overline{\mathbb{Q}}_p$.

Proposition *Pour G classique, une $\overline{\mathbb{Q}}_p$-représentation π est discrète ssi pour tout isomorphisme $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, la $\mathbb{C}$-représentation $\iota\pi$ est l'image d'une série discrète par l'involution de Zelevinski.*

Définition *Une $\overline{\mathbb{Q}}_p$-représentation admissible π est dite* localement entière *si pour tout sous-groupe ouvert compact H, l'espace des H-invariants admet un réseau stable sous l'action de l'algèbre de Hecke entière $\mathbb{Z}_p[H\backslash G/H]$.*

- **Définition** *Une $\overline{\mathbb{Q}}_p$-représentation admissible π est dite* localement entière *si pour tout sous-groupe ouvert compact H, l'espace des H-invariants admet un réseau stable sous l'action de l'algèbre de Hecke entière $\mathbb{Z}_p[H\backslash G/H]$.*

Théorème
- *π est localement entière si et seulement si ses sous-quotients irréductibles le sont.*

Définition *Une $\overline{\mathbb{Q}}_p$-représentation admissible π est dite* localement entière *si pour tout sous-groupe ouvert compact H, l'espace des H-invariants admet un réseau stable sous l'action de l'algèbre de Hecke entière $\mathbb{Z}_p[H\backslash G/H]$.*

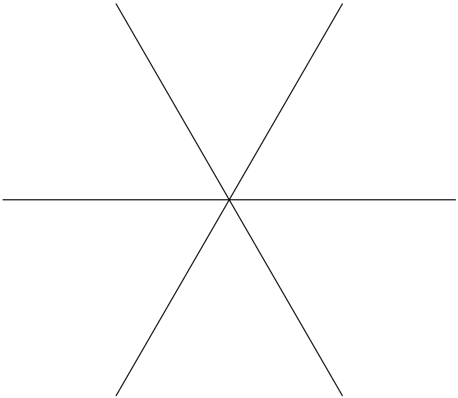
Théorème

- *π est localement entière si et seulement si ses sous-quotients irréductibles le sont.*
- *Supposons π irréductible et G classique. Alors π est localement entière si et seulement si son support cuspidal est dans l'affinoïde du spectre de Bernstein défini par les équations :*

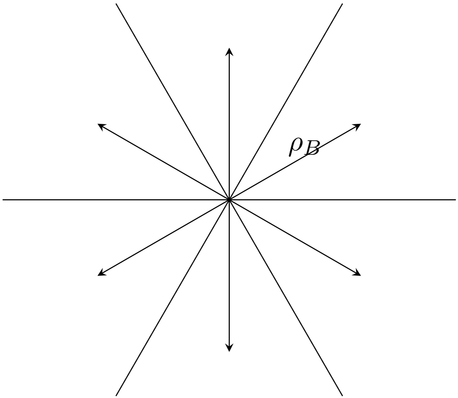
$$|\omega_\sigma \delta_P^{-\frac{1}{2}}|(a) \leqslant 1, \;\; P \supset M, \; a \in Z(M) \text{ contracte } P.$$

Par exemple, une série principale π de $SL_3(\mathbb{Q}_p)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ est localement entière ssi pour tout caractère $\omega : T \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ intervenant dans $r_B(\pi)$, l'élément $\nu_p \circ \omega \in \mathit{Hom}(T/T^0, \mathbb{R})$ est dans le polyèdre suivant :

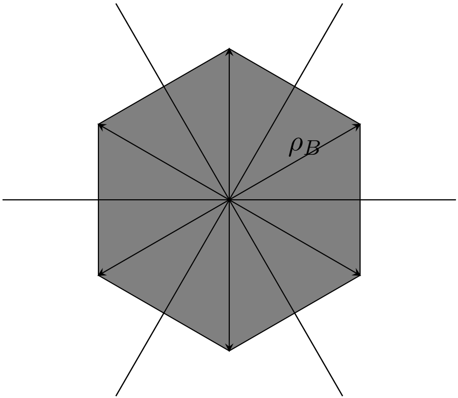
Par exemple, une série principale π de $SL_3(\mathbb{Q}_p)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ est localement entière ssi pour tout caractère $\omega : T \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ intervenant dans $r_B(\pi)$, l'élément $\nu_p \circ \omega \in \mathit{Hom}(T/T^0, \mathbb{R})$ est dans le polyèdre suivant :



Par exemple, une série principale π de $SL_3(\mathbb{Q}_p)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ est localement entière ssi pour tout caractère $\omega : T \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ intervenant dans $r_B(\pi)$, l'élément $\nu_p \circ \omega \in \mathit{Hom}(T/T^0, \mathbb{R})$ est dans le polyèdre suivant :



Par exemple, une série principale π de $SL_3(\mathbb{Q}_p)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ est localement entière ssi pour tout caractère $\omega : T \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ intervenant dans $r_B(\pi)$, l'élément $\nu_p \circ \omega \in Hom(T/T^0, \mathbb{R})$ est dans le polyèdre suivant :



On suppose que G admet des sous-groupes discrets cocompacts.

On suppose que G admet des sous-groupes discrets cocompacts. Supposons $\mathcal{K}$ de caractéristique positive, muni d'une valuation $\nu : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Si $\omega : Z(M) \longrightarrow \mathcal{K}^\times$ est un caractère lisse, l'élément $\nu \circ \omega \in X_*(Z(M)) \otimes \mathbb{R}$ appartient au mur associé à un unique parabolique $Q_\omega = M_\omega U_\omega$ contenant M.

On suppose que G admet des sous-groupes discrets cocompacts. Supposons $\mathcal{K}$ de caractéristique positive, muni d'une valuation $\nu : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Si $\omega : Z(M) \longrightarrow \mathcal{K}^\times$ est un caractère lisse, l'élément $\nu \circ \omega \in X_*(Z(M)) \otimes \mathbb{R}$ appartient au mur associé à un unique parabolique $Q_\omega = M_\omega U_\omega$ contenant M.

Théorème *(Contrôle) Soit $\sigma \in Irr_{\mathcal{K}}(M)$ et P un parabolique de Levi M contenu dans Q_{ω_σ}.*

- *On a long$(i_P(\sigma))$ = long$(i_{P\cap M_{\omega_\sigma}}(\sigma))$.*

On suppose que G admet des sous-groupes discrets cocompacts. Supposons $\mathcal{K}$ de caractéristique positive, muni d'une valuation $\nu : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Si $\omega : Z(M) \longrightarrow \mathcal{K}^\times$ est un caractère lisse, l'élément $\nu \circ \omega \in X_*(Z(M)) \otimes \mathbb{R}$ appartient au mur associé à un unique parabolique $Q_\omega = M_\omega U_\omega$ contenant M.

Théorème *(Contrôle) Soit $\sigma \in \mathit{Irr}_{\mathcal{K}}(M)$ et P un parabolique de Levi M contenu dans Q_{ω_σ}.*

- *On a long$(i_P(\sigma))$ = long$(i_{P\cap M_{\omega_\sigma}}(\sigma))$. En particulier si $Q_{\omega_\sigma} \neq G$ (c'est-à-dire si $\nu \circ \omega_{\sigma|Z(M)\cap[G,G]}$ n'est pas nul), alors $i_P(\sigma)$ n'a pas de sous-quotient cuspidal.*

On suppose que G admet des sous-groupes discrets cocompacts. Supposons $\mathcal{K}$ de caractéristique positive, muni d'une valuation $\nu : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Si $\omega : Z(M) \longrightarrow \mathcal{K}^\times$ est un caractère lisse, l'élément $\nu \circ \omega \in X_*(Z(M)) \otimes \mathbb{R}$ appartient au mur associé à un unique parabolique $Q_\omega = M_\omega U_\omega$ contenant M.

Théorème *(Contrôle) Soit $\sigma \in Irr_{\mathcal{K}}(M)$ et P un parabolique de Levi M contenu dans Q_{ω_σ}.*

- *On a long$(i_P(\sigma))$ = long$(i_{P\cap M_{\omega_\sigma}}(\sigma))$. En particulier si $Q_{\omega_\sigma} \neq G$ (c'est-à-dire si $\nu \circ \omega_{\sigma|Z(M)\cap[G,G]}$ n'est pas nul), alors $i_P(\sigma)$ n'a pas de sous-quotient cuspidal.*
- *Si P' est un autre parabolique contenant P, on a $i_P(\sigma)^{ss} = i_{P'}(\sigma)^{ss}$.*

Application

Considérons une famille d'induites $\psi \mapsto i_P(\sigma\psi)$ avec $\sigma \in Irr_{\overline{\mathbb{F}}_l}(M)$ et $\psi : M \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_l^\times$ non-ramifié.

Application

Considérons une famille d'induites $\psi \mapsto i_P(\sigma\psi)$ avec $\sigma \in Irr_{\overline{\mathbb{F}}_l}(M)$ et $\psi : M \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_l^\times$ non-ramifié.

- Elle est génériquement irréductible.

Application

Considérons une famille d'induites $\psi \mapsto i_P(\sigma\psi)$ avec $\sigma \in Irr_{\overline{\mathbb{F}}_l}(M)$ et $\psi : M \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_l^\times$ non-ramifié.

- Elle est génériquement irréductible.
- Les points où apparaissent des sous-quotients cuspidaux forment une réunion finie d'orbites sous $Hom(G/G^0, \overline{\mathbb{F}}_l^\times)$.

Propriétés de finitude

Conjecture *Si R est noethérien, alors l'anneau de Hecke $R[H\backslash G/H]$ l'est aussi.*

Conjecture *Si R est noethérien, alors l'anneau de Hecke $R[H\backslash G/H]$ l'est aussi.*

Théorème *La seconde adjonction implique la conjecture.*

Ceci utilise le résultat de contrôle des sous-quotients cuspidaux d'une induite.

Conjecture *Si R est noethérien, alors l'anneau de Hecke $R[H\backslash G/H]$ l'est aussi.*

Théorème *La seconde adjonction implique la conjecture.*

Ceci utilise le résultat de contrôle des sous-quotients cuspidaux d'une induite.

Proposition *La seconde adjonction est vraie pour les groupes classiques et les groupes de rang 1.*

Conjecture *Si R est noethérien, alors l'anneau de Hecke $R[H\backslash G/H]$ l'est aussi.*

Théorème *La seconde adjonction implique la conjecture.*

Ceci utilise le résultat de contrôle des sous-quotients cuspidaux d'une induite.

Proposition *La seconde adjonction est vraie pour les groupes classiques et les groupes de rang 1.*

Espoir : les groupes modérément ramifiés.

Notons $B(G)$ l'immeuble étendu, G_x le fixateur de $x \in B(G)$ et G_x^+ son pro-p-radical, puis $H_x^+ := H \cap G_x^+$ pour tout sous-groupe H de G.

Notons $B(G)$ l'immeuble étendu, G_x le fixateur de $x \in B(G)$ et G_x^+ son pro-p-radical, puis $H_x^+ := H \cap G_x^+$ pour tout sous-groupe H de G.

Définition *Soit P un parabolique de Levi M et $x \in B(M)$. Un idempotent $\varepsilon \in RM_x$ est dit P-bon si pour tout plongement $B(M) \hookrightarrow B(G)$ on a*

$$e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \varepsilon \in RG_x e_{U_x} e_{\overline{U}_x} \varepsilon.$$

Ici e_H désigne la distribution idempotente associée à un pro-p-groupe H.

Notons $B(G)$ l'immeuble étendu, G_x le fixateur de $x \in B(G)$ et G_x^+ son pro-p-radical, puis $H_x^+ := H \cap G_x^+$ pour tout sous-groupe H de G.

Définition *Soit P un parabolique de Levi M et $x \in B(M)$. Un idempotent $\varepsilon \in RM_x$ est dit P-bon si pour tout plongement $B(M) \hookrightarrow B(G)$ on a*

$$e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \varepsilon \in RG_x e_{U_x} e_{\overline{U}_x} \varepsilon.$$

Ici e_H désigne la distribution idempotente associée à un pro-p-groupe H.

Proposition *S'il existe suffisamment d'idempotents à la fois P-bons et $\overline{P}$-bons, alors la paire $(i_P, r_{\overline{P}})$ est adjointe.*

Utilise un argument dynamique sur l'immeuble.

Soit $\underline{\mathcal{G}}$ un modèle lisse et connexe de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{O}_F$. Un Levi $\mathcal{M}$ de $\mathcal{G}$ est dit $\underline{\mathcal{G}}$-admissible s'il est le centralisateur d'un tore déployé de $\mathcal{G}$ qui se prolonge en un tore de $\underline{\mathcal{G}}$. On note $\underline{\mathcal{G}}^\dagger \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}$ la dilatation du radical unipotent de la fibre spéciale de $\underline{\mathcal{G}}$.

Soit $\underline{\mathcal{G}}$ un modèle lisse et connexe de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{O}_F$. Un Levi $\mathcal{M}$ de $\mathcal{G}$ est dit $\underline{\mathcal{G}}$-admissible s'il est le centralisateur d'un tore déployé de $\mathcal{G}$ qui se prolonge en un tore de $\underline{\mathcal{G}}$. On note $\underline{\mathcal{G}}^\dagger \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}$ la dilatation du radical unipotent de la fibre spéciale de $\underline{\mathcal{G}}$.

Définition *Un idempotent central $\varepsilon \in R\underline{G}$ est dit* essentiellement de niveau zéro *si pour tout parabolique $\underline{\mathcal{G}}$-admissible $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$, on a*

$$\varepsilon \in R\underline{G}^\dagger e_{\underline{U}^\dagger} R\underline{G}^\dagger.$$

Soit $\underline{\mathcal{G}}$ un modèle lisse et connexe de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{O}_F$. Un Levi $\mathcal{M}$ de $\mathcal{G}$ est dit $\underline{\mathcal{G}}$-admissible s'il est le centralisateur d'un tore déployé de $\mathcal{G}$ qui se prolonge en un tore de $\underline{\mathcal{G}}$. On note $\underline{\mathcal{G}}^\dagger \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}$ la dilatation du radical unipotent de la fibre spéciale de $\underline{\mathcal{G}}$.

Définition *Un idempotent central $\varepsilon \in R\underline{G}$ est dit* essentiellement de niveau zéro *si pour tout parabolique $\underline{\mathcal{G}}$-admissible $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$, on a*

$$\varepsilon \in R\underline{G}^\dagger e_{\underline{U}^\dagger} R\underline{G}^\dagger.$$

Théorème *Soit $(\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}, \overline{\mathcal{P}} = \mathcal{M}\overline{\mathcal{U}})$ une paire de paraboliques opposés $\underline{\mathcal{G}}$-admissibles et $\varepsilon \in R\underline{M}$ un idempotent essentiellement de niveau zéro. Alors*

$$e_{\underline{U}^\dagger} e_{\underline{\overline{U}}} \varepsilon \in R\underline{G} e_{\underline{U}} e_{\underline{\overline{U}}} \varepsilon.$$

Espaces symétriques de Drinfeld

Théorème *(Valable pour G semi-simple) Posons $\delta(I,J) = |I \cup J| - |I \cap J|$ pour $I, J \subseteq S$.*

- *Soient I, J deux sous ensembles de S, alors :*

$$\mathit{Ext}^*_G(\pi_I, \pi_J) = \begin{cases} \overline{\mathbb{Q}}_l & \textit{if} \quad * = \delta(I,J) \\ 0 & \textit{if} \quad * \neq \delta(I,J) \end{cases} .$$

Théorème *(Valable pour G semi-simple) Posons $\delta(I,J) = |I \cup J| - |I \cap J|$ pour $I, J \subseteq S$.*

- *Soient I, J deux sous ensembles de S, alors :*

$$\mathrm{Ext}^*_G(\pi_I, \pi_J) \quad = \quad \begin{cases} \overline{\mathbb{Q}}_l & \text{if} \quad * = \delta(I,J) \\ 0 & \text{if} \quad * \neq \delta(I,J) \end{cases} \quad .$$

- *Soient I, J, K trois sous-ensembles de S tels que $\delta(I,J) + \delta(J,K) = \delta(I,K)$, alors le cup-produit*

$$\cup \;:\; \mathrm{Ext}^{\delta(I,J)}_G(\pi_I, \pi_J) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \mathrm{Ext}^{\delta(J,K)}_G(\pi_J, \pi_K) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{\delta(I,K)}_G(\pi_I, \pi_K)$$

est un isomorphisme.

Corollaire *L'algèbre* $\mathit{End}_{D^b(G)}(R\Gamma_c(\Omega^{d-1}, \overline{\mathbb{Q}}_l))$ *est isomorphe à l'algèbre des matrices triangulaires supérieures de taille* d*.*

Corollaire *L'algèbre* $\mathit{End}_{D^b(G)}(R\Gamma_c(\Omega^{d-1}, \overline{\mathbb{Q}}_l))$ *est isomorphe à l'algèbre des matrices triangulaires supérieures de taille* d.

On peut choisir l'isomorphisme de sorte que l'action d'un relèvement de Frobenius ϕ dans W_F fixé à l'avance soit donnée par une matrice diagonale et que l'action de l'inertie soit donnée par l'exponentielle d'une matrice de Jordan.

Corollaire *L'algèbre $End_{D^b(G)}(R\Gamma_c(\Omega^{d-1}, \overline{\mathbb{Q}}_l))$ est isomorphe à l'algèbre des matrices triangulaires supérieures de taille d.*

On peut choisir l'isomorphisme de sorte que l'action d'un relèvement de Frobenius ϕ dans W_F fixé à l'avance soit donnée par une matrice diagonale et que l'action de l'inertie soit donnée par l'exponentielle d'une matrice de Jordan.

Proposition *La matrice de Jordan est la régulière, autrement dit $N^{d-1} \neq 0$.*

Corollaire *L'algèbre $End_{D^b(G)}(R\Gamma_c(\Omega^{d-1},\overline{\mathbb{Q}}_l))$ est isomorphe à l'algèbre des matrices triangulaires supérieures de taille d.*

On peut choisir l'isomorphisme de sorte que l'action d'un relèvement de Frobenius ϕ dans W_F fixé à l'avance soit donnée par une matrice diagonale et que l'action de l'inertie soit donnée par l'exponentielle d'une matrice de Jordan.

Proposition *La matrice de Jordan est la régulière, autrement dit $N^{d-1} \neq 0$.*

Utilise le modèle formel semi-stable et la suite spectrale de Rapoport-Zink.

Un calcul simple mais miraculeux donne alors :

Corollaire *Pour tout* $I \subseteq S$, *on a*

$$R\mathit{Hom}_{D^b(G)}(R\Gamma_c(\Omega^{d-1}, \overline{\mathbb{Q}}_l), \pi_I)[1-d] \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{k=0}^{|I|} \mathit{Sp}_{d_k}(i_k)[-|I|+2k]$$

Un calcul simple mais miraculeux donne alors :

Corollaire *Pour tout $I \subseteq S$, on a*

$$RHom_{D^b(G)}(R\Gamma_c(\Omega^{d-1}, \overline{\mathbb{Q}}_l), \pi_I)[1-d] \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{k=0}^{|I|} Sp_{d_k}(i_k)[-|I| + 2k]$$

Ce qui en oubliant les graduations donne

$$\mathcal{H}^*(RHom_{D^b(G)}(R\Gamma_c(\Omega^{d-1}, \overline{\mathbb{Q}}_l), \pi_I)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(\pi_I)(\frac{d-1}{2}).$$

Les deux tours

Théorème *Pour toute $\pi \in Irr(G)$, on a*

$$\mathcal{H}^*\left(RHom_{D^b(G)}(R\Gamma_c(\mathcal{M},\overline{\mathbb{Q}}_l),\pi)\right) \underset{D^\times \times W_K}{\simeq} \mathcal{LJ}(\pi)\otimes\mathcal{L}(\pi)|-|^{\frac{d-1}{2}}.$$

Théorème *Pour toute $\pi \in Irr(G)$, on a*

$$\mathcal{H}^*\left(RHom_{D^b(G)}(R\Gamma_c(\mathcal{M}, \overline{\mathbb{Q}}_l), \pi)\right) \underset{D^\times \times W_K}{\simeq} \mathcal{LJ}(\pi) \otimes \mathcal{L}(\pi)|-|^{\frac{d-1}{2}}.$$

$\mathcal{LJ} : \mathcal{R}(G) \longrightarrow \mathcal{R}(D^\times)$ est l'application duale du transfert des classes de conjugaison de $D^\times$ vers G. On sait que

$$\mathcal{LJ}(\pi) = \begin{cases} \pm[\rho] \text{ avec } \rho \in Irr(D^\times) & \text{si } \pi \text{ elliptique} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$