

# TYPES ET INDUCTIONS POUR LES REPRÉSENTATIONS MODULAIRES DES GROUPES $p$ -ADIQUES

Par J.-F. DAT (avec un appendice de M.-F. VIGNÉRAS)

---

ABSTRACT. – Bushnell-Kutzko’s theory of types aims at describing the category of smooth complex representations of a  $p$ -adic group, relying on the «classical» theory by Casselman, Bernstein, *etc.* Here we are interested in modular representations of a  $p$ -adic group, *i.e.* representations with coefficients in a field of characteristic different from  $p$ . Several proofs of «classical» results in the complex case are no longer valid, but we intend here to use the theory of types –as well the axiomatization of [BK1]– as the concrete cases of [Vig2]– in order to adapt some of these results to the modular situation. In particular, some finiteness results are obtained for  $GL(N)$  in the appendix by M.-F. Vignéras.

RÉSUMÉ. – Le but de la théorie des types de Bushnell et Kutzko est de décrire la catégorie des représentations lisses complexes d’un groupe  $p$ -adique, en s’appuyant sur les théories «classiques» de Casselman, Bernstein, *etc.* On s’intéresse ici aux représentations modulaires d’un groupe  $p$ -adique, c’est-à-dire à coefficients dans un corps de caractéristique différente de  $p$ , pour lesquelles beaucoup de résultats de la théorie «classique» complexe sont inconnus. Le but de cet article est d’utiliser les types –autant le contexte abstrait de [BK1] que les cas concrets et explicites de [Vig2]– pour suppléer aux preuves classiques de certains de ces résultats. En particulier, des résultats de finitude sont démontrés pour  $GL(N)$  dans l’appendice de M.-F. Vignéras.

## Contents

<b>0</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Types modulaires</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Un morphisme explicite</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>Injectivité de <math>\Phi_\tau</math></b>	<b>18</b>
<b>4</b>	<b>Surjectivité de <math>\Phi</math> et conséquences</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>Cas de <math>GL(N)</math></b>	<b>28</b>

## 0 Introduction

$F$  est un corps local de corps résiduel  $\mathbb{F}_q$ ,  $R$  est un corps algébriquement clos où  $q$  est inversible (en pratique  $R = \overline{\mathbb{F}_l}$  avec  $(l, q) = 1$ ). Soit  $G$  l’ensemble des  $F$ -points d’un  $F$ -groupe réductif  $\mathfrak{G}$ , on note  $\text{Mod}_R(G)$  la catégorie des  $R$ -représentations lisses de  $G$  (appelées modulaires quand  $R = \overline{\mathbb{F}_l}$ ). On veut ici tirer parti de la théorie des types que Bushnell et Kutzko ont axiomatisée dans [BK1] dans le cas complexe, et qui tout

en perdant beaucoup de propriétés dans le cas modulaire, permet d'espérer classifier les irréductibles et, dans certains cas, de décomposer  $\text{Mod}_R(G)$  en produit de blocs (voir [Vig2]).

Parmi les propriétés du cas complexe qui ne passent pas complètement au cas modulaire, il y a les diagrammes commutatifs de [BK1] (8.4). Le but ici est de démontrer une propriété qui est un corollaire trivial de ces diagrammes dans le cas complexe, mais pas dans le cas modulaire ; cette propriété, appliquée aux analogues modulaires des types complexes (niveau 0,  $\text{GL}(N)$ , série principale d'un groupe déployé . . .) entraînera divers résultats nouveaux en modulaire sur l'irréductibilité générique de certaines représentations, la généralisation (partielle) de la propriété d'adjonction entre l'induction parabolique et la restriction parabolique opposée à des représentations non admissibles, et surtout le fait que  $\text{Mod}_R(\text{GL}(N))$  est une catégorie noethérienne.

On commence dans la partie 1 par rappeler et adapter au cas modulaire les travaux de Bushnell et Kutzko dans [BK1] : ils définissent une notion de type qui sert à décrire les blocs de la décomposition de Bernstein du cas complexe en termes de modules sur certaines algèbres de Hecke (1.2). Dans le cas modulaire, on ne peut qu'espérer garder une paramétrisation des irréductibles d'un bloc (c'est-à-dire d'une classe d'inertie), puisque les catégories correspondantes au cas complexe ne sont plus des blocs. Un cas particulier de cette description est celle des cuspidales (1.6) : soit  $\rho$  une cuspidale irréductible, un  $\rho$ -type cuspidal sera un couple  $(J, \tau)$  formé d'un sous-groupe ouvert compact de  $G$  et d'une représentation de  $J$  telle que la classe d'inertie de  $\rho$  soit exactement l'ensemble des quotients de l'induite à supports compacts de  $\tau$  : celle-ci est une sorte de «représentation universelle» comme dans [Be] de la classe d'inertie de  $\rho$ .

En plus de la définition des types, Bushnell et Kutzko proposent une manière de les induire d'un sous-groupe de Levi  $M$  à  $G$  : c'est la notion de paire couvrante<sup>1</sup> (voir 1.1, 1.3 et 1.4). De la théorie complexe (dans [BK1]) on déduit que si  $(J, \tau)$  est une paire couvrant  $(J_M, \tau_M)$ , type  $\rho$ -cuspidal de  $M$ , alors pour tout sous-groupe parabolique contenant  $M$  :

$$\text{ind}_J^G(\tau) \simeq i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M))$$

(voir 1.1 pour les notations). Cette propriété n'est plus du tout aussi immédiate dans le cas modulaire et la démonstration fait l'objet des parties 2, 3 et 4 : on étudie dans la partie 2 un morphisme assez naturel  $\text{ind}_J^G(\tau) \rightarrow i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M))$  dont on démontre quelques propriétés générales. Après avoir réduit le problème, on montre dans 3 l'injectivité sous certaines hypothèses concernant la paire couvrante considérée. La surjectivité et quelques conséquences directes sont démontrées dans la partie 4. Enfin, la partie 5 consiste en la vérification des hypothèses faites dans la partie 3 dans le cas  $G = \text{GL}(N)$  : on en déduit alors, par un argument de Marie-France Vignéras que la catégorie  $\text{Mod}_{\mathbb{F}_l}(\text{GL}(N))$  est noethérienne et que l'induction parabolique respecte la propriété d'être de type fini.

Je remercie Marie-France Vignéras, ma directrice de recherches, d'avoir bien voulu écrire l'appendice exposant la preuve complète du fait que  $\text{Mod}_{\mathbb{F}_l}(\text{GL}(N))$  est noethérienne et d'avoir été autant disponible et attentive durant la rédaction de cet article. Je remercie aussi le referee d'avoir corrigé quelques idées naïves sur les types autres que ceux de  $\text{GL}(N)$ .

---

<sup>1</sup>Traduction consensuelle de « $G$ -cover»

# 1 Types modulaires

## 1.1 Notations

Voici quelques rappels et notations que nous utiliserons tout au long de ce travail :

*Généralités.* –  $P$  et  $M$  désigneront toujours respectivement l'ensemble des points  $F$ -rationnels d'un  $F$ -sous-groupe parabolique  $\mathfrak{P}$  de  $\mathfrak{G}$  (que on l'appellera lui même sous-groupe parabolique par abus de langage) et l'ensemble des  $F$ -points d'un  $F$ -sous-groupe de Levi  $\mathfrak{M}$  de  $\mathfrak{P}$ .  $N$  est le groupe des  $F$ -points du radical unipotent  $\mathfrak{N}$  de  $\mathfrak{P}$ , et  $\overline{P}$  et  $\overline{N}$  désigneront les  $F$ -points des sous-groupes paraboliques et unipotents opposés de  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{N}$  par rapport à  $\mathfrak{M}$ . Le normalisateur de  $M$  dans  $G$  sera noté  $\mathcal{N}_G(M)$ .

On notera  $G^0$  le sous-groupe de  $G$  engendré par les éléments compacts de  $G$  et  $\mathcal{Z}(G)$  le centre de  $G$  : on sait que  $G/G^0$  est un groupe abélien libre de type fini et que l'image de  $\mathcal{Z}(G)$  dans ce quotient est d'indice fini.  $X_R(G)$  est l'ensemble des  $R$ -caractères lisses non ramifiés de  $G$ , c'est-à-dire triviaux sur  $G^0$ . Pour  $M$  sous-groupe de Levi du sous-groupe parabolique  $P$ , on note  $\delta_P$  le caractère-module de  $M$  par rapport à  $P$  : c'est un caractère non ramifié de  $M$  qui vérifie pour tout sous-groupe ouvert compact  $K$  de  $P$  :

$$\forall m \in M \quad \delta_P(m) = [mKm^{-1} : K]$$

$\text{Irr}_R(G)$  et  $\text{Cusp}_R(G)$  sont respectivement l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations lisses irréductibles de  $G$  et l'ensemble des représentations lisses cuspidales de  $G$ .

*Inductions.* – Si  $H$  est un sous-groupe ouvert d'un groupe localement profini  $K$ ,  $\text{Ind}_H^K$  désigne l'induction lisse et  $\text{ind}_H^K$  l'induction lisse à supports compacts, alors que  $\text{Res}_K^H$  désigne la restriction de  $K$  à  $H$ . Avec les notations définies ci-dessus,  $i_{M,P}^G$  (parfois  $i_P^G$ ) est l'induction parabolique normalisée le long de  $P$  et  $r_{G,P}^M$  (parfois  $r_P^M$ ) est la restriction parabolique normalisée le long de  $P$ .

*Algèbres d'entrelacement.* – Soit  $(J, \tau)$  une paire formée d'un sous-groupe ouvert compact  $J$  de  $G$  et d'une représentation irréductible de  $J$  ; alors on notera  $\mathcal{H}(G, \tau)$  l'algèbre d'entrelacement de  $\tau$  dans  $G$ , c'est-à-dire, avec les conventions de [BK1, 2] :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(G, \tau) &= \{ \Psi : G \rightarrow \text{End}_R(W^*), \quad \Psi(j_1 g j_2) = \tilde{\tau}(j_1) \Psi(g) \tilde{\tau}(j_2) \} \\ &= \text{End}_G(\text{ind}_J^G(\tau))^\circ \end{aligned}$$

où  $W^*$  est le dual de  $W$ ,  $\tilde{\tau}$  la contragrédiente de  $\tau$  et le  $\circ$  en exposant désigne l'algèbre opposée. Ces conventions permettent de considérer  $\text{Hom}_{RG}(\text{ind}_J^G(\tau), \pi)$  comme un  $\mathcal{H}(G, \tau)$ -module à gauche par action naturelle sur les morphismes, pour toute représentation  $\pi$  de  $G$ . (En général, pour une algèbre  $A$ , on désigne par  $A\text{-Mod}$  la catégorie de ses modules à gauche et par  $\text{Mod-}A$  celle de ces modules à droite.)

Rappelons d'autre part que la partie  $\tau$ -isotypique d'une représentation  $V$  de  $G$  est la sous- $G$ -représentation engendrée par les images des  $J$ -morphisme  $\tau \rightarrow V$ .

*Paires couvrantes ( $G$ -covers).* – Nous rappelons cette notion définie dans [BK1, 8.1] : Soit  $(J, \tau)$  une paire comme précédemment et  $(J_M, \tau_M)$  une paire formée d'un sous-groupe ouvert compact  $J_M$  de  $M$  et d'une représentation de  $J_M$  : alors on dit que  $(J, \tau)$  est une paire  $P$ -couvrante de  $(J_M, \tau_M)$  si les conditions suivantes sont réalisées :

1.  $J$  est un sous-groupe ouvert compact de  $G$  tel que  $J \cap M = J_M$  et  $\tau$  est une représentation lisse de  $J$  telle que  $\tau|_{J_M} = \tau_M$ .

2.  $J$  a la décomposition d'Iwahori  $J = (J \cap \overline{N})J_M(J \cap N)$  avec  $\tau_{|(J \cap \overline{N})}$  et  $\tau_{|(J \cap N)}$  triviales.
3. Il existe un élément  $z_P$  de  $\mathcal{Z}(M)$  contractant strictement  $N$  par conjugaison tel que  $\mathcal{H}(G, \tau)$  contienne un élément inversible de support  $Jz_PJ$ .

On dira que  $(J, \tau)$  est une paire couvrant (ou paire couvrante de)  $(J_M, \tau_M)$  si c'est une paire  $P$ -couvrante pour tout sous-groupe parabolique  $P$  contenant  $M$ .

Lorsque  $(J, \tau)$  est une paire  $P$ -couvrante de  $(J_M, \tau_M)$ , Bushnell et Kutzko dans le cas complexe et Vignéras dans le cas modulaire ont montré qu'on peut définir un morphisme de  $R$ -espaces vectoriels préservant le support :

$$\mathcal{H}(M, \tau_M) \xrightarrow{\tau} \mathcal{H}(G, \tau)$$

par prolongement naturel des éléments de la base canonique ([BK1, 6.3] et [Vig2, II] dans le cas modulaire). Ce morphisme est multiplicatif lorsqu'on se restreint à la sous-algèbre  $\mathcal{H}(M, \tau_M)^+$  des fonctions de  $\mathcal{H}(M, \tau_M)$  de support inclus dans l'ensemble des éléments contractant  $N$  par conjugaison ([BK1, 6.12], [Vig2, II.4]) et se prolonge de manière unique à un morphisme d'algèbres :

$$\mathcal{H}(M, \tau_M) \xrightarrow{\iota^+} \mathcal{H}(G, \tau)$$

([BK1, 7.2] et [Vig2, II.6]).

## 1.2 Types

Soient  $(M, \rho)$  et  $(M', \rho')$  deux couples formés d'un sous-groupe de Levi de  $G$  et d'une représentation cuspidale irréductible de ce Levi. On dit (voir [BK1, 1] ou [Be]) qu'ils sont inertiuellement équivalents si il existe  $g \in G$  et  $\chi \in X_R(M')$  un caractère non ramifié de  $M'$  tels que  $M' = M^g$  et  $\rho^g \simeq \rho' \otimes \chi$ . On note  $[M, \rho]_G$  la classe d'inertie de  $(M, \rho)$ .

Soient maintenant  $\pi$  un  $G$ -module irréductible, on sait qu'il existe un couple  $(M, \rho)$  tel que  $\pi \subset \mathfrak{i}_{M,P}^G(\rho)$  pour un certain parabolique  $P$  de Levi  $M$  [Vig1, II.2.4]. On montre que la classe de conjugaison de  $(M, \rho)$  est unique [Vig1, II.2.20] et on l'appelle support cuspidal de  $\pi$  (notation  $\text{Sc}(\pi)$ ). On a de plus les propriétés pratiques suivantes [Vig1, II.2.20] :

*Le support cuspidal de  $\pi$  contient  $(M, \rho)$  si et seulement si :*

- $\pi$  est une sous-représentation de  $\mathfrak{i}_{M,P}^G(\rho)$  pour un certain parabolique  $P$  (ou de manière équivalente  $\rho$  est un quotient de  $\mathfrak{r}_{G,P}^M(\pi)$ ).
- $\pi$  est un quotient de  $\mathfrak{i}_{M,P}^G(\rho)$  pour un certain parabolique  $P$  (ou de manière équivalente  $\rho$  est inclus dans  $\mathfrak{r}_{G,P}^M(\pi)$ ).

Dans ces conditions, on définit :

**DÉFINITION 1.2.1.** – *Soient  $(M, \rho)$  un couple comme ci-dessus et  $(J, \tau)$  une paire formée d'un sous-groupe ouvert compact de  $G$  et d'une de ses représentations irréductibles. On dit que  $(J, \tau)$  est un  $[M, \rho]_G$ -type si :*

$$\forall \pi \in \text{Irr}_R(G), \quad \text{Sc}(\pi) \subset [M, \rho]_G \Leftrightarrow \text{Hom}_J(\tau, \pi) \neq 0$$

*Notations.* – On note  $[\tau]$  l'ensemble des représentations irréductibles de  $G$  contenant  $\tau$  et  $[\rho]_G$  l'ensemble des représentations irréductibles de  $G$  dont le support cuspidal contient  $\rho$ . Dans ce langage,  $(J, \tau)$  est un  $[M, \rho]_G$ -type si et seulement si  $[\tau] = [\rho]_G$ .

Dans le cas complexe et d'après les travaux de Bushnell et Kutzko (voir [BK1, 4.2]), on en tire des résultats très forts : d'après la théorie de Bernstein ([Be]), la sous-catégorie de  $\text{Mod}_{\mathbb{C}}(G)$  formée des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles ont leur support cuspidal inclus dans  $\mathfrak{s} = [M, \rho]_G$  est un bloc (noté  $\mathcal{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ ) de  $\text{Mod}_{\mathbb{C}}(G)$ . D'un autre côté, on note  $\mathcal{R}_{\tau}(G)$  la catégorie des représentations de  $G$  engendrée par leur partie  $\tau$ -isotypique, alors :

Si  $(J, \tau)$  est un  $\mathfrak{s}_G$ -type, on a  $\mathcal{R}_{\tau}(G) = \mathcal{R}^{\mathfrak{s}}(G)$  et le foncteur

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\tau} : \mathcal{R}^{\mathfrak{s}}(G) &\rightarrow \mathcal{H}(G, \tau) - \text{Mod} \\ \pi &\mapsto \text{Hom}_J(\tau, \pi) = \pi_{\tau} \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories.

Dans le cas  $R$  quelconque, on ne peut plus parler des blocs de Bernstein d'une part et  $\mathcal{R}_{\tau}(G)$  n'est pas en général abélienne donc on ne peut espérer garder des résultats si «catégoriques»...

Cependant, si  $R = \overline{\mathbb{F}}_l$ , l'étude dans [Vig2] des types modulaires (*i.e.* construits sur le modèle des types complexes) pour  $\text{GL}(N)$  montre que leurs induites sont «presque-projectives de type fini» (voir 2.4), ce qui implique qu'il subsiste une bijection entre les représentations irréductibles de  $G$  engendrés par leurs partie  $\tau$ -isotypique et les  $\mathcal{H}(G, \tau)$ -modules simples. Cette propriété permet d'espérer mettre à profit la théorie des types pour classifier des irréductibles dans un cadre plus général et justifie qu'on garde la définition ci-dessus.

### 1.3 Diagrammes commutatifs : cas complexe

Reprenons le cas complexe : soit  $\mathfrak{s}_M$  une classe d'inertie dans  $\text{Mod}_R(M)$  pour un certain sous-groupe de Levi  $M$  de  $G$ . Alors, d'après la théorie de Bernstein, elle définit par induction une classe d'inertie  $\mathfrak{s}_G$  dans  $\text{Mod}_R(G)$ . Supposons que  $(J_M, \tau_M)$  soit un  $\mathfrak{s}_M$ -type ; alors, d'après [BK1, 8.2],  $(J, \tau)$  est un  $\mathfrak{s}_G$ -type.

Choisissons un parabolique  $P$  de Levi  $M$ . La restriction parabolique (normalisée)  $\text{r}_{G,P}^M$  n'envoie pas forcément  $\mathcal{R}^{\mathfrak{s}_G}(G)$  dans  $\mathcal{R}^{\mathfrak{s}_M}(M)$ , mais on peut composer avec la «projection» canonique sur le bloc  $\mathcal{R}^{\mathfrak{s}_M}(M)$  : on note ce foncteur  $\text{pr}_{G,P}^M$ .

*Aparté.* – Si  $A \xrightarrow{i} B$  est un morphisme d'anneaux, on note  $i^*$  le foncteur de restriction  $\text{B-Mod} \rightarrow \text{A-Mod}$  et  $i_*$  (resp.  $*i$ ) son adjoint à droite (resp. à gauche) :

$$\begin{aligned} i_* : \text{A-Mod} &\rightarrow \text{B-Mod} & \text{et} & \quad *i : \text{A-Mod} &\rightarrow \text{B-Mod} \\ M &\mapsto \text{Hom}_A(B, M) & & & M &\mapsto B \otimes_A M \end{aligned}$$

**THÉORÈME 1.3.1.** – (Bushnell-Kutzko) *Dans les conditions du paragraphe 1.8, soit  $(P, M, N)$  un triplet parabolique ; il existe alors un unique morphisme d'algèbres avec unité :*

$$t_P : \mathcal{H}(M, \tau_M) \longrightarrow \mathcal{H}(G, \tau)$$

tel que les diagrammes suivants soient commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^{\mathfrak{s}_G}(G) & \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_{\tau} & \mathcal{H}(G, \tau) - \text{Mod} \\ \text{pr}_{G,P}^M \downarrow & & \downarrow \mathfrak{t}_P^* \\ \mathcal{R}^{\mathfrak{s}_M}(M) & \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_{\tau_M} & \mathcal{H}(M, \tau_M) - \text{Mod} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{R}^{\mathfrak{s}_G}(G) & \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_{\tau} & \mathcal{H}(G, \tau) - \text{Mod} \\ \uparrow i_{M,P}^G & & \uparrow \mathfrak{t}_{P*} \\ \mathcal{R}^{\mathfrak{s}_M}(M) & \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_{\tau_M} & \mathcal{H}(M, \tau_M) - \text{Mod} \end{array}$$

$i_{M,P}^G$  étant l'induction parabolique (normalisée) par rapport à  $P$ .

*Remarques.* – (1) –  $t_P$  n'est pas ici tout à fait le même que le  $t_P$  construit dans [BK1] (7.2) et (7.9) car nous utilisons les foncteurs normalisés : ce dernier était obtenu par torsion d'un premier morphisme  $t^+$  (voir 1.1) par  $\delta_P$  (le caractère-module de  $M$  par rapport à  $P$ ). Ici, il faut tordre par  $\delta_P^{\frac{1}{2}}$ . On définit les morphismes  $t_P$  de la même manière dans le cas modulaire après avoir choisi une racine de  $q$  dans  $R$ .

(2) – Le second diagramme se déduit du premier par adjonction à droite. On peut en déduire un troisième par adjonction à gauche (voir 1.5).

## 1.4 Diagramme commutatif : cas modulaire

Dans ce cas, le premier diagramme est encore valable (voir [Vig2, II.10.2]) à ceci près que les foncteurs  $\mathfrak{M}_\tau$  et  $\mathfrak{M}_{\tau_M}$  ne sont pas des équivalences de catégories, et qu'on ne peut parler de blocs. En résumé, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}_R(G) & \xrightarrow{\mathfrak{M}_\tau} & \mathcal{H}(G, \tau) - \text{Mod} \\ \downarrow \mathfrak{r}_{G,P}^M & & \downarrow \mathfrak{t}_P^* \\ \text{Mod}_R(M) & \xrightarrow{\mathfrak{M}_{\tau_M}} & \mathcal{H}(M, \tau_M) - \text{Mod} \end{array}$$

Le second diagramme ne se déduit donc plus, *a priori*, aussi facilement du premier. Le but ici n'est pas de démontrer la commutativité de ce second diagramme, mais une propriété plus faible, et sous certaines hypothèses :

CONJECTURE 1. – *Pour tout sous-groupe parabolique contenant  $M$ , on a*

$$\text{ind}_J^G(\tau) \simeq i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M))$$

*Remarque.* – Pour être plus précis, on va étudier par la suite un morphisme canonique  $\Phi_{M,P}^G : \text{ind}_J^G(\tau) \rightarrow i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M))$  pour chaque sous-groupe parabolique  $P$  contenant  $M$ , mais les hypothèses que l'on utilisera pour démontrer qu'il est bijectif ne seront valables que pour un seul de ces paraboliques. Cependant, dans le cas de  $\text{GL}(N)$ , on pourra en déduire que la propriété d'isomorphisme est vraie *pour tout* sous-groupe parabolique  $P$ . De plus, on espère que dans d'autres cas comme le niveau 0 ([Mo]) et la série principale d'un groupe déployé ([Ro]), on pourra comme pour  $\text{GL}(N)$  adapter à tous les paraboliques.

## 1.5 Démonstration dans le cas complexe

Elle est assez formelle. On peut utiliser l'existence d'un adjoint à gauche de la restriction parabolique, à savoir l'induction par rapport au parabolique opposé (C'est un résultat de Bernstein, non publié mais voir [1]). En utilisant le premier diagramme et par adjonction, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^{\mathfrak{s}_G}(G) & \xrightarrow{\mathfrak{M}_\tau} & \mathcal{H}(G, \tau) - \text{Mod} \\ \uparrow i_{M,\bar{P}}^G & & \uparrow \mathfrak{t}_P^* \\ \mathcal{R}^{\mathfrak{s}_M}(M) & \xrightarrow{\mathfrak{M}_{\tau_M}} & \mathcal{H}(M, \tau_M) - \text{Mod} \end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} (i_{M, \overline{P}}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)))_\tau &\simeq \text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)_{\tau_M} \otimes_{\mathcal{H}(M, \tau_M)} \mathcal{H}(G, \tau) \\ &\simeq \mathcal{H}(M, \tau_M) \otimes_{\mathcal{H}(M, \tau_M)} \mathcal{H}(G, \tau) \simeq \mathcal{H}(G, \tau) \simeq (\text{ind}_J^G(\tau))_\tau \end{aligned}$$

et on conclut parce que  $\mathfrak{M}_\tau$  est une équivalence de catégories et qu'on peut faire le même raisonnement avec  $\overline{P}$ .

*Remarque.* – Il apparaît dans ce cas que l'induite parabolique de  $\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)$  ne dépend pas du parabolique choisi.

A partir de la partie 2, on se consacrera à l'étude de cette question dans le cas modulaire.

## 1.6 Types cuspidaux

On se place dans le contexte de [BK1, 5.5], à savoir :  $(J, \tau)$  est une paire formée d'un sous-groupe ouvert compact et d'une de ses représentations irréductibles tel que :

- l'ensemble d'entrelacement  $\mathcal{I}_G(\tau) := \tilde{J}$  de  $\tau$  dans  $G$  est un sous-groupe ouvert compact modulo le centre de  $G$  et tel que  $J = \tilde{J} \cap G^0$ .
- il existe une extension  $\tilde{\tau}$  de  $\tau$  à  $\tilde{J}$  dont l'induite  $\rho = \text{ind}_{\tilde{J}}^G(\tilde{\tau})$  est cuspidale.

Alors, on peut adapter le cas complexe traité dans [BK1] de la manière suivante :

PROPOSITION 1.6.1. – *Dans les conditions ci-dessus :*

- (a) *La  $G$ -représentation cuspidale  $\rho$  est irréductible et  $\mathcal{H}(G, \tau) \simeq R[\tilde{J}/J] := \mathcal{A}$  est une algèbre commutative.* (b) *Tout sous-quotient irréductible de  $\text{ind}_J^G(\tau)$  est de la forme  $\text{ind}_J^G(\tau) \otimes_{\mathcal{A}} R_\chi$  où  $\chi$  est un caractère de  $\tilde{J}/J$  et  $R_\chi$  le  $\mathcal{A}$ -module de  $R$ -dimension 1 associé, ou, ce qui est équivalent, de la forme  $\rho \otimes \bar{\chi}$  pour un certain caractère non ramifié de  $G$ .* (c)  *$(J, \tau)$  est un  $[G, \rho]_G$ -type et est appelé «type cuspidal». De plus les  $G$ -irréductibles contenant  $\tau$  sont en bijection avec les modules irréductibles de  $\mathcal{A}$ .*

*Démonstration.* – Puisque l'entrelacement de  $\tilde{\tau}$  est inclus dans  $\tilde{J}$ , on sait (voir [Vig1, I.8.3]) que son induite  $\rho$  est irréductible et que  $\mathcal{H}(G, \tau) \simeq \mathcal{H}(\tilde{J}, \tau)$ , l'isomorphisme étant donné par simple induction :

$$\begin{aligned} \text{End}_{\tilde{J}}(\text{ind}_{\tilde{J}}^{\tilde{J}}(\tau)) &\rightarrow \text{End}_G(\text{ind}_J^G(\tau)) \\ \phi &\mapsto \text{ind}_J^G(\tau) \end{aligned}$$

Or,  $\text{ind}_{\tilde{J}}^{\tilde{J}}(\tau) \simeq \tilde{\tau} \otimes_R \mathcal{A}$  avec action de diagonale de  $\tilde{J}$  (celui-ci agissant canoniquement sur  $\mathcal{A}$ ). Comme  $J$  est normal dans  $\tilde{J}$  et comme  $\tilde{J}/J$  est abélien, on voit que  $\text{End}_{\tilde{J}}(\text{ind}_{\tilde{J}}^{\tilde{J}}(\tau)) \simeq \mathcal{A}$  et l'action de  $\mathcal{A}$  est la représentation régulière sur le terme de droite du produit tensoriel  $\tilde{\tau} \otimes \mathcal{A}$ .

Ceci explicite l'action de  $\mathcal{A}$  sur  $\text{ind}_J^G(\tau)$  : en particulier, si  $\chi$  est un caractère de  $\tilde{J}/J$ , alors :

$$\text{ind}_J^G(\tau) \otimes_{\mathcal{A}} R_\chi \simeq \text{ind}_J^G(\tilde{\tau} \otimes \chi)$$

que nous noterons  $\rho_\chi$ . On a une injection canonique :  $\tilde{J}/J \subset G/G^0$ . Soit donc un prolongement  $\bar{\chi}$  de  $\chi$  à  $G/G^0$  ; on remarque que :

$$\text{ind}_{\tilde{J}}^G(\tilde{\tau} \otimes \chi) \simeq \rho \otimes \bar{\chi}.$$

Pour montrer l'assertion sur les sous-quotients de  $\text{ind}_J^G(\tau)$ , on utilise les mêmes méthodes que [Vig1, III.4.22] ou que [Vig2, IV.1.6] : on note  $\mathcal{Z}$  le centre de  $G$ , et on appelle  $H$  le sous-groupe maximal de  $\tilde{J}$  tel que  $[H : \mathcal{Z}J]$  soit premier avec  $l$ . ( $\tilde{J}/H$  est donc un  $l$ -groupe abélien).

On induit d'abord à  $\mathcal{Z}J$ . Notons  $\tau_{\mathcal{Z}} = \tilde{\tau}|_{\mathcal{Z}J}$  : c'est une extension particulière de  $\tau$  à  $\mathcal{Z}J$  et il est clair que tout sous-quotient irréductible de  $\text{ind}_{\mathcal{Z}J}^{\mathcal{Z}J}(\tau)$  est isomorphe à cette extension tordue par un caractère non ramifié  $\chi_{\mathcal{Z}}$  de  $\mathcal{Z}$  (on raisonne sur le caractère central). On appelle  $\bar{\chi}$  un caractère non ramifié de  $G$  dont la restriction à  $\mathcal{Z}$  est  $\chi_{\mathcal{Z}}$  et on note  $\chi = \bar{\chi}|_{\tilde{J}}$  sa restriction à  $\tilde{J}$ .

On induit maintenant à  $H$  :  $\text{ind}_{\mathcal{Z}J}^H(\chi_{\mathcal{Z}}.\tau_{\mathcal{Z}})$  est semisimple et isomorphe à  $\bigoplus_{\theta} \theta.\chi_H.\tau_H$  où  $\theta$  décrit l'ensemble des caractères de  $H/(\mathcal{Z}J)$  et  $\tau_H = \tilde{\tau}|_H$ . Quitte à modifier  $\bar{\chi}$  par une extension de  $\theta.\chi_H$ , on s'aperçoit que tout sous-quotient irréductible de  $\text{ind}_J^H(\tau)$  est de la forme  $\bar{\chi}|_H.\tau_H$ .

On induit maintenant à  $\tilde{J}$  : ce n'est plus semi-simple mais on sait que tout sous-quotient de  $\text{ind}_{\tilde{J}}^{\tilde{J}}(\bar{\chi}|_H.\tau_H)$  est isomorphe à l'unique extension  $\chi.\tilde{\tau}$  de  $\bar{\chi}|_H.\tau_H$  à  $\tilde{J}$ .

Ceci démontre le deuxième point.

Pour établir que  $\tau$  est un type, on procède comme dans [BK1, 5.4] : ce qui précède montre en particulier que  $[\tau] \subset [\rho]_G$ . L'autre inclusion est évidente : si  $\pi \in [\rho]_G$ , il existe alors un caractère non ramifié  $\chi_G$  de  $G$  tel que  $\pi \simeq \rho \otimes \chi_G$ , et donc, puisque  $\rho$  contient  $\tau$  et puisque  $\chi_G$  est trivial sur  $J$ ,  $\pi$  contient  $\tau$ .

La bijection entre les irréductibles de  $G$  contenant  $\tau$  et les irréductibles de  $\mathcal{A}$  est assez claire : dans un sens, c'est simplement la partie  $\tau$ -isotypique, et dans l'autre, c'est l'application  $R_{\chi} \mapsto \text{ind}_J^G(\tau) \otimes_{\mathcal{A}} R_{\chi}$ . On peut voir une généralisation de ce phénomène au 2.4. □

## 1.7 $G$ -équivalence

Rappelons la notion de  $G$ -équivalence déjà définie dans [Vig2, II.1] :

**DÉFINITION 1.7.1.** – *Deux types  $(J, \tau)$  et  $(J', \tau')$  de  $G$  sont dits  $G$ -équivalents si leurs induites sont isomorphes :  $\text{ind}_{J'}^G(\tau') \simeq \text{ind}_J^G(\tau)$ .*

**PROPOSITION 1.7.1.** – *Soient  $(J, \tau)$  et  $(J', \tau')$  deux types cuspidaux, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $[\tau] \cap [\tau'] \neq \emptyset$ ;
- (ii)  $[\tau] = [\tau']$ ;
- (iii)  $\text{Hom}_G(\text{ind}_{J'}^G(\tau'), \text{ind}_J^G(\tau)) \neq 0$ ;
- (iv)  $(J, \tau)$  et  $(J', \tau')$  sont  $G$ -équivalents.

*Démonstration.* – i) implique ii) : c'est assez clair d'après la description précédente des quotients irréductibles de l'induite d'un type cuspidal :  $[\tau]$  et  $[\tau']$  sont tous les deux une orbite de  $\text{Irr}_R(G)$  sous  $X_R(G)$  et sont donc disjoints ou égaux.

ii) implique iii) : Commençons par rappeler la formule de Mackey ([Vig1, I.5.6]) pour une représentation  $\lambda$  de  $\tilde{J}$  :

$$\text{Res}_G^{J'}(\text{ind}_J^G(\lambda)) \simeq \bigoplus_{\tilde{J}_x J'} \text{ind}_{J' \cap \tilde{J}_x}^{J'}(\lambda^x)$$

Remarquons maintenant que le  $R$ -espace vectoriel  $\text{Hom}_G(\text{ind}_{J'}^G(\tau'), \text{ind}_J^G(\tau))$  est naturellement un  $\mathcal{A}$ -module en faisant agir  $\mathcal{A}$  ( $\mathcal{A} = \mathcal{H}(G, \tau)$ ) par composition sur le membre de droite. On peut préciser cette structure en utilisant la formule de Mackey et la

réciprocité de Frobenius

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_{J'}^G(\tau'), \mathrm{ind}_J^G(\tau)) \simeq \mathrm{Hom}_{J'}(\tau', \mathrm{ind}_J^G(\tilde{\tau} \otimes \mathcal{A})) \quad (1)$$

$$\simeq \bigoplus_{\tilde{J}^x J'} \mathrm{Hom}_{J' \cap \tilde{J}^x}(\tau', (\tilde{\tau} \otimes \mathcal{A})^x) \quad (2)$$

$$\simeq \left( \bigoplus_{\tilde{J}^x J'} \mathrm{Hom}_{J' \cap \tilde{J}^x}(\tau', \tilde{\tau}^x) \right) \otimes \mathcal{A} \quad (3)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_{J'}^G(\tau'), \rho) \otimes \mathcal{A} \quad (4)$$

La commutation avec le produit tensoriel dans le passage de (2) à (3) vient du fait que  $J' \cap \tilde{J}^x$  agit trivialement sur  $\mathcal{A}$ . De plus ce calcul est  $\mathcal{A}$ -équivariant ; donc pour tout caractère  $\chi$  de  $\mathcal{A}$ , l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_{J'}^G(\tau'), \mathrm{ind}_J^G(\tau)) \otimes_{\mathcal{A}} R_\chi \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_{J'}^G(\tau'), \mathrm{ind}_J^G(\tau) \otimes_{\mathcal{A}} R_\chi) \quad (5)$$

est un isomorphisme.

Soit  $\phi \in \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_{J'}^G(\tau'), \rho)$  non nul (un tel  $\phi$  existe car  $\rho_{\tau'} \neq 0$ ) ; alors d'après (4)  $\phi \otimes 1_{\mathcal{A}}$  fournit un morphisme non nul  $\mathrm{ind}_{J'}^G(\tau') \longrightarrow \mathrm{ind}_J^G(\tau)$ .

Pour iii) implique iv), on remarque d'abord que iii) implique i), (car  $\mathrm{ind}_{J'}^G(\tau')$  est de type fini ; donc son image par un morphisme non nul vers  $\mathrm{ind}_J^G(\tau)$  admet un quotient irréductible qui est de la forme  $\rho_\chi$  d'après la proposition 1.6.1), et on se ramène à un morphisme du type  $\phi \otimes 1_{\mathcal{A}}$  comme ci-dessus, dont on va montrer que c'est un isomorphisme : en effet son conoyau est de type fini et est donc nul ou admet un quotient irréductible de la forme  $\rho \otimes \chi$  et, puisque pour tout  $\chi$  la réduction modulo  $\chi$  de  $\phi \otimes 1$  est non nulle (d'après (5)), ce conoyau est nécessairement nul. Quant au noyau, d'après la description des quotients irréductibles des types cuspidaux, il est inclus dans le noyau de l'application produit

$$\mathrm{ind}_{J'}^G(\tau') \longrightarrow \prod_{\chi \in X^*(\mathcal{A}')} \mathrm{ind}_{J'}^G(\tau') \otimes_{\mathcal{A}'} R_\chi$$

Or,  $\tilde{\tau}' \otimes \mathcal{A}' \longrightarrow \prod_{\chi} \tilde{\tau}' \chi$  est injective ; son induite l'est donc aussi puisque l'induction est exacte et en composant avec le plongement  $\mathrm{ind}(\prod_{\chi} \tilde{\tau}' \chi) \hookrightarrow \prod_{\chi} \mathrm{ind}(\tilde{\tau}' \chi)$ , on obtient que

$$\mathrm{ind}_{J'}^G(\tilde{\tau}' \otimes \mathcal{A}') \longrightarrow \prod_{\chi \in X^*(\mathcal{A}')} \mathrm{ind}_{J'}^G(\tilde{\tau}' \chi)$$

l'est aussi.

iv) implique i) est évident. □

## 1.8 Contexte

On supposera souvent que l'on est dans le contexte suivant :

- $(J_M, \tau_M)$  est un  $M$ -type cuspidal (au sens de 1.6) et on notera toujours  $\rho$  la  $M$ -représentation cuspidale irréductible  $\mathrm{ind}_{J_M}^M(\tilde{\tau}_M)$ .
- $(J, \tau)$  est une paire couvrant  $(J_M, \tau_M)$ .

On notera pour simplifier  $\mathcal{H}(M, \tau_M) := \mathcal{H}_M$  et  $\mathcal{H}(G, \tau) := \mathcal{H}_G$ .

PROPOSITION 1.8.1. – Dans ces conditions,  $(J, \tau)$  est un  $[M, \rho]_G$ -type.

*Démonstration.* – C’est la même que celle de Bushnell et Kutzko à ceci près qu’il faut pallier au fait que  $\tau_M$  n’est pas projective, ce qui a été fait dans l’étude des sous-quotients de son induite au 1.6 :

Soit  $\pi \in [\rho]_G$  ; alors il existe un parabolique  $P$  de Levi  $M$  et un caractère  $\chi_M$  de  $M$  tel que  $\rho \otimes \chi_M \subset r_{G,P}^M(\pi)$  ; aussi, d’après 1.6,  $r_{G,P}^M(\pi)_{\tau_M} \neq 0$  et d’après 1.4  $\pi_{\tau} \neq 0$ .

Réciproquement, soient  $\pi \in [\tau]$  et  $P$  un parabolique de Levi  $M$  :  $r_{G,P}^M(\pi)_{\tau_M} \neq 0$  ;  $r_{G,P}^M(\pi)$  contient donc un sous-quotient de  $\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)$ . Puisque en plus il est de longueur finie ([Vig1, II.5.13]), il contient en fait un sous-quotient irréductible de  $\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)$  qui est de la forme  $\rho \otimes \chi_M$  d’après 1.6.1. □

## 1.9 Normalisateur d’un type

Le normalisateur  $\mathcal{N}_G(M)$  d’un Levi  $M$  agit naturellement par conjugaison sur  $\text{Irr}_R(M)$ . On notera indifféremment  $w(\pi)$  ou  $\pi^w$  la conjuguée de  $\pi$  par  $w \in \mathcal{N}_G(M)$ . De même, on note  $(J_M^w, \tau_M^w)$  la paire conjuguée de  $(J_M, \tau_M)$  ; il est clair que si  $\tau_M$  est un type cuspidal,  $\tau_M^w$  en est aussi un ( $\mathcal{I}_G(\tau_M^w) = w(\mathcal{I}_G(\tau_M))$  est donc un groupe, etc.) tel que  $\mathcal{H}(M, \tau_M) \simeq \mathcal{H}(M, \tau_M^w)$ .

**PROPOSITION 1.9.1.** – *Toujours dans le contexte 1.8, si  $w \in \mathcal{N}_G(M)$ , il y a équivalence entre les propriétés suivantes : (i)  $w([\tau_M]) \cap [\tau_M] \neq \emptyset$  (ii) Les types  $\tau_M^w$  et  $\tau_M$  sont  $M$ -équivalents (voir 1.7). (iii) Il existe  $m \in M$  tel que  $wm \in \text{Supp}(\mathcal{H}(G, \tau))$ . L’ensemble des  $w \in \mathcal{N}_G(M)$  vérifiant une de ces conditions est noté  $\mathcal{N}_G(\tau_M)$  et est appelé le normalisateur de  $\tau_M$ .*

*Démonstration.* – Remarquons d’abord que  $w(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)) \simeq \text{ind}_{J_M^w}^M(\tau_M^w)$ , et donc que  $w[\tau_M] = [\tau_M^w]$ . Ceci, avec la proposition 1.7.1, montre que *i) ⇔ ii)*.

Montrons maintenant que ces conditions impliquent *iii)* : on a un morphisme non nul

$$\tau_M^w \longrightarrow \text{Res}_{J_M}^{J_M^w}(\text{ind}_{J_M}^M(\widetilde{\tau}_M)).$$

Donc, d’après la formule de Mackey, il existe un  $x \in M$  et un morphisme non nul :  $\tau_M^w \longrightarrow \text{ind}_{J_M^w \cap J_M^x}^{J_M^w}(\widetilde{\tau}_M^x)$ . D’après la réciprocity de Frobenius, on obtient

$$\text{Hom}_{J_M^w \cap J_M^x}(\tau_M^w, \widetilde{\tau}_M^x) \neq 0$$

et, quitte à conjuguer par  $x^{-1}$  et à renommer ce dernier (en  $m$ ),

$$\text{Hom}_{J_M^{wm} \cap J_M}(\tau_M^{wm}, \tau) \neq 0$$

Cherchons maintenant une forme agréable pour  $J \cap J^{wm}$  : (on écrira  $v$  au lieu de  $wm$  pour alléger l’écriture). Soient  $P$  un parabolique de Levi  $M$  et  $N$  son radical unipotent,  $\overline{N}$  son radical opposé. Les propriétés des paires couvrantes (voir 1.1) montrent que  $J = J_{v^{-1}(\overline{N})} J_M J_{v^{-1}(N)}$ , et donc que  $J^v = (J_{v^{-1}(\overline{N})})^v J_M^v (J_{v^{-1}(N)})^v$  avec  $(J_{v^{-1}(\overline{N})})^v \subset \overline{N}$  et  $(J_{v^{-1}(N)})^v \subset N$ . Donc :

$$J \cap J^v = (J_{\overline{N}} \cap (J_{v^{-1}(\overline{N})})^v) \cdot (J_M \cap J_M^v) \cdot (J_N \cap (J_{v^{-1}(N)})^v).$$

Puisque les représentations considérées sont triviales sur les facteurs de gauche et de droite, on en déduit que  $\text{Hom}_{J \cap J^v}(\tau^v, \tau) \neq 0$ , et donc que  $v \in \text{Supp}(\mathcal{H}_G)$ .

Il est facile de remonter ce raisonnement pour voir que si  $w$  vérifie iii), il vérifie toutes les autres propriétés. □

*Remarque.* – Supposons donc ces conditions vérifiées ; on peut préciser l'action de  $w$  : il existe  $\chi_0 \in X_R^*(M)$  tel que  $w(\rho) \simeq \rho \otimes \chi_0$  : on en déduit que tout  $\chi_M \in X_R(M)$ , et on a  $w(\rho \otimes \chi_M) \simeq \rho \otimes \chi_0 \chi_M^w$ . En d'autres termes : l'action naturelle de  $w$  sur  $X_R(M)$  par conjugaison passe au quotient sur  $X^*(\widetilde{J}_M/J_M)$  et pour tout  $\chi \in X^*(\widetilde{J}_M/J_M)$ ,

$$w(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M) \otimes_{\mathcal{H}_M} R_\chi) \simeq \text{ind}_{J_M}^M(\tau_M) \otimes_{\mathcal{H}_M} R_{\chi_0 \chi^w}$$

## 1.10 Fait géométrique

L'objet de cette section ne sera pas utilisé avant la partie 4. On aura en effet besoin de renseignements sur les doubles classes  $JgJ$  et pour cela, il est commode de supposer  $J$  inclus dans un « bon » parahorique, fait qui est systématiquement observé dans les types connus, et d'utiliser la description classique des doubles classes modulo un parahorique (comme dans [Mo], par exemple).

Commençons par rappeler une manière habituelle d'associer un sous-groupe parahorique à un sous-groupe parabolique  $P$  de sous-groupe de Levi  $M$  (on supposera  $\mathfrak{G}$  déployé pour simplifier mais on pourrait tout à fait adapter au cas général).

Choisissons  $T$  un  $F$ -tore déployé maximal et  $P_\emptyset$  un  $F$ -sous-groupe parabolique minimal inclus dans  $P$  et contenant  $T$  auquel il correspond une base  $\Delta$  du système de racines  $\Phi(G, T)$  (groupe de Weyl noté  $W$ ). On peut alors écrire  $M = \mathcal{Z}_G(\bigcap_{\alpha \in \Theta} T_\alpha)^\circ$  (ici le  $\circ$  désigne la composante neutre) pour un certain  $\Theta \subset \Delta$  et  $P = P_\emptyset W_\Theta P_\emptyset$  où  $W_\Theta = \langle s_\alpha, \alpha \in \Theta \rangle$  ( $s_\alpha$  est la réflexion associée à la racine simple  $\alpha$  et  $T_\alpha$  son noyau).

Choisissons un point spécial dans l'appartement associé à  $T$  et appelons  $K$  son fixateur (c'est un sous-groupe parahorique spécial). Soit  $B$  le sous-groupe d'Iwahori canoniquement associé à  $P_\emptyset$  et à  $K$  : alors  $B_\Theta = BW_\Theta B$  est un sous-groupe parahorique de  $G$ . On note aussi  $\widetilde{W}$  le groupe de Weyl affine de  $G$  relativement à  $T$ .

PROPOSITION 1.10.1. – *Dans ces conditions, on a :*

$$\forall w, w' \in \mathcal{N}_G(M), B_\Theta w B_\Theta = B_\Theta w' B_\Theta \Rightarrow w' w^{-1} \in M$$

*Démonstration.* – Puisque les tores maximaux d'un groupe réductif sont conjugués, on peut écrire  $w = w_1.m$  et  $w' = w'_1.m'$  avec  $m, m' \in M$  et  $w_1, w'_1 \in \mathcal{N}_G(T)$ . Soit  $K^+$  le pro- $p$ -radical de  $K$  : on sait que  $K/K^+$  est un groupe réductif dont le système de racines par rapport à  $T^0/(T^0 \cap K^+)$  est isomorphe à celui de  $G$  ([Ti, 3.5.1]). En particulier, on peut relever les éléments de  $W$  à des éléments de  $K$  : écrivons donc  $w_1 = w_0.t$  et  $w'_1 = w'_0.t'$  avec  $w_0, w'_0 \in \mathcal{N}_G(M) \cap K$  et  $t, t' \in T$ . D'après la décomposition de Cartan pour  $M$ , c'est-à-dire,  $M = (K \cap M)T(K \cap M) = (B_\Theta \cap M)T(B_\Theta \cap M)$ , on peut écrire  $w = w_0.k_1.t_0.k_2$  et  $w' = w'_0.k'_1.t'_0.k'_2$ . Utilisant maintenant le fait que  $K \cap M = B_\Theta \cap M$  est normalisé par  $w_0$  (ce dernier se projetant dans  $K/K^+$  en un élément du normalisateur de  $B_\Theta/B_\Theta^+$ ), on obtient  $B_\Theta w B_\Theta = B_\Theta w_0 t_0 B_\Theta$  et  $B_\Theta w' B_\Theta = B_\Theta w'_0 t'_0 B_\Theta$ .

Notons  $B_\Theta^\dagger = \mathcal{N}_G(B_\Theta)$  le normalisateur de  $B_\Theta$ . D'après [Mo, 3.11] les doubles classes modulo  $B_\Theta^\dagger$  sont en bijection avec les doubles classes modulo  $W_\Theta$  dans  $\widetilde{W}$ . Or, les éléments de  $W_\Theta$  se relèvent en des éléments de  $M$  ; donc si  $B_\Theta w B_\Theta \cap B_\Theta w' B_\Theta \neq \emptyset$ , alors  $w_0.t_0$  et  $w'_0.t'_0$  sont congrus modulo  $M$ , et donc  $w$  et  $w'$ , qui leur sont respectivement congrus modulo  $M$  le sont aussi. □

DÉFINITION 1.10.1. – On dira que le type  $(J, \tau)$  est « adapté » au sous-groupe de Levi  $M$  si  $J$  est inclus dans un parahorique construit comme ci-dessus (les choix pour construire celui-ci portent donc sur le point spécial et le parabolique).

COROLLAIRE 1.10.1. – Si  $J$  est adapté à  $M$ , deux doubles classes  $JwJ$  et  $Jw'J$  avec  $w, w' \in \mathcal{N}_G(M)$  sont égales si et seulement si  $w$  et  $w'$  sont congrus modulo  $M$ .

Remarque. – Si  $L$  est un sous-groupe de Levi de  $G$  contenant  $M$  et si  $J$  est adapté à  $M$ , alors  $J$  est adapté à  $L$ .

## 2 Un morphisme explicite

### 2.1 Définition

On veut ici définir un morphisme dans un contexte plus général que celui de 1.8 ; on suppose seulement pour l'instant que la paire  $(J, \tau)$  est une paire couvrant  $(J_M, \tau_M)$ , sans être nécessairement un type). On note toujours  $\delta_P$  le caractère-module de  $M$  relativement à  $P$ , et on rappelle que les foncteurs de restriction et d'induction parabolique sont normalisés. Nous appellerons  $V$  l'espace de  $R$ -dimension finie de la représentation  $\tau$  et nous noterons toujours, pour  $v \in V$ , les fonctions  $i_v^G \in \text{ind}_J^G(\tau)$  et  $i_v^M \in \text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)$  qui lui sont « canoniquement » associées :

$$\left\{ \begin{array}{l} i_v^G : G \rightarrow V \text{ de support } J \\ j \mapsto \tau(j)v \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} i_v^M : M \rightarrow V \text{ de support } J_M \\ j_M \mapsto \tau_M(j_M)v \end{array} \right\}$$

LEMME 2.1.1. – Le morphisme suivant est  $J$ -équivariant :

$$\begin{aligned} \Phi_{M,P}^G : \tau &\rightarrow i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)) \\ v &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \Phi(v) : G \rightarrow \delta_P^{\frac{1}{2}} \cdot \text{ind}(\tau_M) \text{ de support } P.(J \cap \overline{N}) \\ n.m.j_{\overline{N}} \mapsto \delta_P^{\frac{1}{2}}(m).m.i_v^M \end{array} \right. \end{aligned}$$

(On écrit simplement  $\Phi_{M,P}^G = \Phi$  quand il n'y a pas d'ambiguïté).

Démonstration de la  $J$ -équivariance. – Soit  $j \in J$  et  $(n, m, j_{\overline{N}}) \in N \times M \times J \cap \overline{N}$ . On écrit  $j_{\overline{N}}.j = j^+j_Mj^-$  (décomposition d'Iwahori). Alors,

$$\begin{aligned} (j.\Phi(v))(n.m.j_{\overline{N}}) &= \Phi(v)(nmj_{\overline{N}}j) = \Phi(v)(nmj^+j_Mj^-) \\ &= \Phi(v)((n.m.j^+m^{-1})(mj_M)j^-) \\ &= \delta_P^{\frac{1}{2}}(m)mj_M.i_v^M = \delta_P^{\frac{1}{2}}(m)mi_{\tau_M(j_M)v}^M \\ &= \delta_P^{\frac{1}{2}}(m)mi_{\tau(j)v}^M. \end{aligned}$$

La dernière ligne venant de  $\tau|_{J \cap N} = \tau|_{J \cap \overline{N}} = 1$  et de  $j_{\overline{N}}.j = j^+j_Mj^-$ . □

On notera encore  $\Phi$  le morphisme  $G$ -équivariant déduit par réciprocity de Frobenius :

$$\begin{aligned} \Phi : \text{ind}_J^G(\tau) &\rightarrow i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)) \\ f &\mapsto \sum_{g \in J \setminus G} g^{-1}.\Phi(f(g)) \end{aligned}$$

*Remarque.* – Si on utilise l'égalité suivante :

$$i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)) \simeq \text{Ind}_{N.J_M}^G(\delta_P^{\frac{1}{2}}\tau_M)$$

où l'on désigne encore par  $\tau_M$  l'extension triviale de  $\tau_M$  au produit semi-direct  $N \rtimes J_M$ , on obtient l'expression suivante (sur laquelle il est peut-être plus clair que  $\Phi$  est  $J$ -équivariante) :

$$\Phi : \begin{array}{l} \tau \rightarrow \text{ind}_{N.J_M}^G(\tau_M) \\ v \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \Phi(v) : G \rightarrow V \text{ de support } N.J \\ n.j \mapsto \tau(j)v \end{array} \right. \end{array}$$

Nous allons voir maintenant quelques propriétés très générales de  $\Phi$  ne faisant intervenir que les structures des paires couvrantes, sans hypothèse sur les algèbres de Hecke et sans supposer que  $\tau_M$  est un type.

## 2.2 $\mathcal{H}_M$ -équivariance

Soient  $\mathcal{H}_M = \mathcal{H}(M, \tau_M)$  et  $\mathcal{H}_G = \mathcal{H}(G, \tau)$  ; alors  $\mathcal{H}_M$  agit naturellement sur  $\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)$ , et donc, par induction, sur  $i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M))$ . D'autre part,  $\mathcal{H}_M$  agit sur  $\text{ind}_J^G(\tau)$  via n'importe quel morphisme d'algèbres  $\mathcal{H}_M \rightarrow \mathcal{H}_G$ . On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 2.2.1. – *Faisant agir  $\mathcal{H}_M$  sur  $\text{ind}_J^G(\tau)$  via le morphisme  $t_{\overline{P}}$ ,  $\Phi$  est  $\mathcal{H}_M$ -équivariant. En d'autres termes :*

$$\forall \psi \in \mathcal{H}_M, \quad \Phi_{M,P}^G \circ t_{\overline{P}}(\psi) = i_{M,P}^G(\psi) \circ \Phi_{M,P}^G$$

*Démonstration.* – Rappelons les conventions de [BK1] (voir aussi 1.1) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(G, \tau) &= \{ \Psi : G \rightarrow \text{End}_R(V^*), \\ \Psi(j_1 g j_2) &= \tilde{\tau}(j_1) \Psi(g) \tilde{\tau}(j_2) \} = \text{End}_G(\text{ind}_J^G(\tau))^\circ, \end{aligned}$$

l'action de  $\Psi$  étant donnée par

$$i_v^G * \Psi = \sum_{x \in J \setminus G} x^{-1} i_{\Psi(x)v}^G, \quad (1)$$

où  $\widehat{\Psi}(x) = \Psi^*(x^{-1})$  (voir [BK1, 2.2]).

Soient  $I_M^- = \{t \in \text{Supp } \mathcal{H}_M, \quad t(J \cap \overline{N})t^{-1} \subset J \cap \overline{N} \text{ et } t^{-1}(J \cap N)t \subset J \cap N\}$ , et  $\mathcal{H}_M^- = \{\psi \in \mathcal{H}_M, \quad \text{Supp } \psi \subset I_M^-\}$ . On sait que le morphisme  $\mathcal{H}(M, \tau_M) \xrightarrow{t_{\overline{P}}} \mathcal{H}(G, \tau)$  s'obtient par prolongement unique de sa restriction à  $\mathcal{H}_M^-$ . Il suffit donc de vérifier l'équivariance pour  $\psi$  de support  $J_M t J_M$  avec  $t \in I_M^-$ . Or pour un tel  $\psi$ ,  $t_{\overline{P}}(\psi) = \delta_{\overline{P}}^{\frac{1}{2}}.T(\psi) = \delta_P^{-\frac{1}{2}}.T(\psi)$ , où  $T(\psi)$  est le prolongement naturel de  $\psi$  à  $JtJ$  (voir [BK1, 6.3]). On a donc (en notant  $J \cap \overline{N} = J_{\overline{N}}$  et  $\Psi = t_{\overline{P}}(\psi)$ ) :

$$\Phi(i_v^G * t_{\overline{P}}(\psi)) = \Phi\left(\sum_{x \in J \setminus Jt^{-1}J} x^{-1} i_{\Psi(x)v}^G\right) \quad (2)$$

$$= \sum_{x \in (J \cap tJt^{-1}) \setminus J} (t^{-1}x)^{-1} \cdot \Phi(i_{\Psi(t^{-1}x)v}^G) \quad (3)$$

$$= \sum_{x_M \in (J_M \cap tJ_M t^{-1}) \setminus J_M} \sum_{x \in x_M^{-1} t J_{\overline{N}} t^{-1} x_M \setminus J_{\overline{N}}} (t^{-1}x_M x)^{-1} \cdot \Phi(i_{\Psi(t^{-1}x_M x)v}^G) \quad (4)$$

$$= \sum_{x_M \in (J_M \cap tJ_M t^{-1}) \setminus J_M} \sum_{x \in x_M^{-1} t J_{\overline{N}} t^{-1} x_M \setminus J_{\overline{N}}} x^{-1} x_M^{-1} t \cdot \Phi(i_{\Psi(t^{-1}x_M) \cdot \delta_P^{-\frac{1}{2}}(t)v}^G). \quad (5)$$

Le changement d'indices dans le passage de (3) à (4) vient du fait qu'on peut écrire tout  $y \in (J \cap tJt^{-1}) \setminus J$  comme un produit  $x_M x$ , où

$$x_M \in (J_M \cap tJ_M t^{-1}) \setminus J_M \quad x \in x_M^{-1} t J_{\overline{N}} t^{-1} x_M \setminus J_{\overline{N}}$$

(on utilise la décomposition d'Iwahori et le fait que  $t$  contracte  $J \cap \overline{N}$  et dilate  $J \cap N$ ; voir aussi [Vig2, II.4] ou [BK1, 6.9]).

Posons  $v' = \widehat{\psi}(t^{-1}x_M) \cdot \delta_P^{-\frac{1}{2}}(t)v$  et étudions maintenant la première somme, après avoir remarqué que  $P \cdot J_{\overline{N}} t^{-1} x_M x = P(x_M^{-1} t J_{\overline{N}} t^{-1} x_M)x$ ; le terme  $f_{x_M}^x = x^{-1} x_M^{-1} t \cdot \Phi(i_{v'}^G)$  est la fonction

$$\begin{aligned} f_{x_M}^x : G &\rightarrow \delta_P^{\frac{1}{2}} \cdot \text{ind}(\tau_M) \text{ de support } P(x_M^{-1} t J_{\overline{N}} t^{-1} x_M)x \\ n.m.x_M^{-1} \bar{t} \bar{j} t^{-1} x_M x &\mapsto \Phi(i_{v'}^G)(nm x_M^{-1} \bar{t} \bar{j}) = \delta_P^{\frac{1}{2}}(mt) \cdot m x_M^{-1} t \cdot i_{v'}^M, \end{aligned}$$

et donc la somme

$$f_{x_M} = \sum_{x \in x_M^{-1} t J_{\overline{N}} t^{-1} x_M \setminus J_{\overline{N}}} x^{-1} x_M^{-1} t \cdot \Phi(i_{v'}^G) = \sum f_{x_M}^x$$

a comme support  $P J_{\overline{N}}$ , qui est réunion disjointe des supports  $P \cdot J_{\overline{N}} t^{-1} x_M x$  de chaque terme de la somme. De plus, si  $y \in P J_{\overline{N}}$  s'écrit  $y = nm x_M^{-1} \bar{t} \bar{j} t^{-1} x_M x$ , alors  $f_{x_M}(y) = \delta_P^{\frac{1}{2}}(mt) \cdot m x_M^{-1} t \cdot i_{v'}^M$ ;  $f_{x_M}$  est donc l'application

$$\begin{aligned} f_{x_M} : G &\rightarrow \delta_P^{\frac{1}{2}} \cdot \text{ind}(\tau_M) \text{ de support } P \cdot J_{\overline{N}} \\ n.m.\bar{j} &\mapsto \delta_P^{\frac{1}{2}}(mt) \cdot m \cdot x_M^{-1} x \cdot i_{\widehat{\psi}(t^{-1}x_M) \cdot \delta_P^{-\frac{1}{2}}(t)v}^M = \delta_P^{\frac{1}{2}}(m) \cdot m \cdot (x_M^{-1} x \cdot i_{\widehat{\psi}(t^{-1}x_M)v}^M). \end{aligned}$$

Or on sait que

$$\sum_{x_M \in (J_M \cap tJ_M t^{-1}) \setminus J_M} x_M^{-1} x \cdot i_{\widehat{\psi}(t^{-1}x_M)v}^M = i_v^M * \psi;$$

la somme des  $f_{x_M}$  est donc

$$\begin{aligned} \Phi(i_v^G * \Psi) : G &\rightarrow \delta_P^{\frac{1}{2}} \cdot \text{ind}(\tau_M) \text{ de support } P \cdot J_{\overline{N}} \\ n.m.\bar{j} &\mapsto \delta_P^{\frac{1}{2}}(m) \cdot m \cdot (i_v^M * \psi). \end{aligned}$$

Ceci est exactement  $i_{M,P}^G(\psi)(\Phi(i_v^G))$ ;  $\Phi$  est donc bien  $\mathcal{H}_M$ -équivariante.  $\square$

### 2.3 Transitivité des fonctions $\Phi$

Pour définir et étudier  $\Phi$ , on a utilisé les propriétés de décomposition d'Iwahori des paires couvrantes. Il y a dans [BK1] une notion de transitivité des paires couvrantes qui invite à étudier une propriété équivalente pour les morphismes  $\Phi$  : soit  $L$  un sous-groupe de Levi de  $M$ . Supposons que  $(J, \tau)$  est une paire couvrant  $(J_L, \tau_L)$ ; alors, par [BK1, 8.5], elle couvre aussi  $(J_M, \tau_M)$  et celle-ci couvre  $(J_L, \tau_L)$ .

Comme dans [BK1], soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  de sous-groupe de Levi  $L$  et de radical unipotent  $N$ ; on pose  $P' = P \cap M$ ; c'est un sous-groupe parabolique de  $M$  de sous-groupe de Levi  $L$  et de radical  $N'$ . Puis on pose  $Q = MP$ ; c'est un sous-groupe parabolique de  $G$  de sous-groupe de Levi  $M$  et de radical  $U$  (On mettra toujours des

«barres» pour tout ce qui est «opposé»). Sur le modèle de  $\Phi$ , on peut construire  $\Phi_{L,P}^G$ ,  $\Phi_{L,P'}^M$  et  $\Phi_{M,Q}^G$ . On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{ind}_J^G(\tau) & \xrightarrow{\Phi_{M,Q}^G} & i_{M,Q}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)) \\ \Phi_{L,P}^G \downarrow & & \downarrow i_{M,Q}^G(\Phi_{L,P'}^M) \\ i_{L,P}^G(\text{ind}_{J_L}^L(\tau_L)) & \xlongequal{\quad} & i_{M,Q}^G(i_{L,P'}^M(\text{ind}_{J_L}^L(\tau_L))) \end{array}$$

PROPOSITION 2.3.1. – *Ce diagramme est commutatif. En d'autres termes,*

$$\Phi_{L,P}^G = i_{M,Q}^G(\Phi_{L,P'}^M) \circ \Phi_{M,Q}^G$$

*Démonstration.* – On oublie ici volontairement le module pour alléger les notations : cela est sans conséquence sur la démonstration. On ne spécifiera pas non plus le parabolique :  $\Phi_M^G = \Phi_{M,Q}^G$ , etc. Rappelons que les notations  $i_v^G$ ,  $i_v^M$  et  $i_v^L$  ont été définies au sous-paragraphe 2.1 et que :

$$\begin{array}{ccc} \Phi_M^G(i_v^G) : G & \rightarrow & \text{ind}_{J_M}^M(V) \text{ de support } U.M.(J \cap \bar{U}) \\ u.m.j_{\bar{U}} & \mapsto & m.i_v^M \end{array} .$$

Utilisant l'égalité

$$i_{L,P}^G(\text{ind}_{J_L}^L(\tau_L)) = i_{M,Q}^G(i_{L,P'}^M(\text{ind}_{J_L}^L(\tau_L))), \quad (6)$$

on obtient donc l'expression suivante de  $(i_{M,Q}^G(\Phi_L^M) \circ \Phi_M^G)(i_v^G)$  dans le langage du deuxième membre de (6) :

$$\begin{array}{ccc} (i_{M,Q}^G(\Phi_L^M) \circ \Phi_M^G)(i_v^G) : G & \rightarrow & i_{L,P'}^M(\text{ind}_{J_L}^L(\tau_L)) \text{ de support } U.M.(J \cap \bar{U}) \\ u.m.j_{\bar{U}} & \mapsto & m.\Phi_L^M(i_v^M). \end{array}$$

Rappelons maintenant la correspondance explicite entre  $i_{M,Q}^G(i_{L,P'}^M(Z))$  et  $i_{L,P}^G(Z)$  pour  $Z$  un  $L$ -module quelconque : à toute fonction  $f : G \rightarrow i_{L,P'}^M(Z)$  on associe la fonction

$$\begin{array}{ccc} f' : G & \rightarrow & Z \\ g & \mapsto & f(g)[1]. \end{array}$$

On en déduit l'expression de  $(i_{M,Q}^G(\Phi_L^M) \circ \Phi_M^G)(i_v^G)$  dans le langage du premier membre de (6) :

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & \text{ind}_{J_L}^L(\tau_L) \text{ de support dans } U.M.(J \cap \bar{U}) \\ u.m.j_{\bar{U}} & \mapsto & \Phi_L^M(i_v^M)[m]. \end{array}$$

Or,  $\Phi_L^M(i_v^M)$  a par définition son support inclus dans  $N'L(J_M \cap \bar{N}')$  et envoie un élément  $n'lj_{\bar{N}'}$  sur  $l.i_v^L$  (comme au-dessus). On peut donc transformer cette expression en

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & \text{ind}_{J_L}^L(\tau_L) \text{ de support } U.(N'L(J_M \cap \bar{N}')).(J \cap \bar{U}) \\ u.n'lj_{\bar{N}'}.j_{\bar{U}} & \mapsto & \Phi_L^M(i_v^M)[n'lj_{\bar{N}'}] = l.i_v^L, \end{array}$$

et on conclut, grâce aux décompositions de [BK1, 8.5], que

$$U.N' = N \text{ et } (J \cap \bar{U}).(J_M \cap \bar{N}') = (J \cap \bar{N}).$$

□

## 2.4 Hypothèse (PP)

Nous appellerons (PP) l'hypothèse suivante pour une paire  $(J, \tau)$  : « *L'induite à supports compacts d'une enveloppe RJ-projective de  $\tau$  est une enveloppe RG-projective de  $\text{ind}_J^G(\tau)$  rendant celle-ci presque-projective de type fini.* » On peut trouver une définition de la presque-projectivité dans le cadre très général des catégories abéliennes dans l'appendice de [Vig2], mais nous la rappelons dans la démonstration du lemme 2.6.1 dans le cas qui nous préoccupe ; la conséquence intéressante de cette hypothèse est la suivante :

*Il existe une bijection canonique entre les  $G$ -modules simples contenant  $\tau$  et les  $\mathcal{H}(G, \tau)$ -modules simples.*

Cette correspondance dans un sens est simplement le foncteur  $\mathfrak{M}_\tau$  (voir 1.2) et dans l'autre

$$\begin{aligned} \text{Irr}(\mathcal{H}_G) &\rightarrow \text{Irr}_R(G) \\ X &\mapsto \rho_X \end{aligned}$$

où  $\rho_X$  est l'unique quotient irréductible de  $\text{ind}_J^G(\tau) \otimes_{\mathcal{H}_G} X$ . (Voir [Vig2] I et Appendice).

Si l'hypothèse (PP) est vérifiée pour  $(J_M, \tau_M)$ , nous appellerons  $\Phi_X$  le morphisme naturel du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{ind}_J^G(\tau) \otimes_{\mathcal{H}_M, t_{\overline{P}}} X & \xrightarrow{\Phi \otimes \text{Id}_X} & i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)) \otimes_{\mathcal{H}_M} X \\ & \searrow \Phi_X & \downarrow \\ & & i_{M,P}^G(\rho_X) \end{array}$$

*Remarque.* – Puisque  $\text{ind}_J^G(\tau)$  est de type fini, et que  $\rho_X$  est l'unique quotient de  $\text{ind}_J^G(\tau) \otimes_{\mathcal{H}_G} X$ , la projection correspondante est un morphisme essentiel, *i.e.* sa restriction à tout sous-module strict est nulle.

## 2.5 Stratégie

Le but est de démontrer (moyennant éventuellement quelques hypothèses supplémentaires) que  $\Phi$  est un isomorphisme de  $G$ -modules. Pour cela, on démontre d'abord le lemme suivant :

LEMME 2.5.1. – *Supposons que  $R = \overline{\mathbb{F}}_l$  et que  $(J, \tau)$  et  $(J_M, \tau_M)$  vérifient tous deux l'hypothèse (PP). Alors*

- $\Phi$  est injectif si  $\Phi_\tau$  est injectif, et  $\Phi_\tau : \mathcal{H}(G, \tau) \longrightarrow i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M))_\tau$  est le morphisme induit par  $\Phi$  sur les parties isotypiques :  $\Phi_\tau = \mathfrak{M}_\tau(\Phi)$ .
- Supposons que  $\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)^K$  est un  $\mathcal{H}_M$ -module de type fini pour tout sous-groupe ouvert compact  $K$  de  $M$ , et que tous les  $\mathcal{H}_M$ -modules simples sont de  $R$ -dimension finie ; dans ce cas, si pour tout  $X \in \text{Irr}(\mathcal{H}_M)$ ,  $\Phi_X$  est surjectif, alors  $\Phi$  est surjectif.

## 2.6 Démonstration du lemme 2.5.1

L'assertion sur l'injectivité découle du lemme suivant appliqué à  $\ker \Phi$ .

LEMME 2.6.1. – *Supposons  $R = \overline{\mathbb{F}}_l$  et l'hypothèse (PP) pour le type  $\tau$ . Si  $V$  est un sous- $G$ -module de  $\text{ind}_J^G(\tau)$ , alors  $V_\tau \neq 0$ .*

*Démonstration.* – L’hypothèse (PP) de 2.4 (démontrée pour  $\mathrm{GL}(N)$  dans [Vig2, IV.1.4]) s’énonce de la manière suivante : si  $P_\tau \xrightarrow{\varepsilon} \tau$  est une enveloppe  $\overline{\mathbb{F}}_l J$ -projective, alors l’application  $\mathrm{ind}_J^G(P_\tau) \xrightarrow{\mathrm{ind}(\varepsilon)} \mathrm{ind}_J^G(\tau)$  est une présentation projective de  $\mathrm{ind}_J^G(\tau)$  faisant de ce dernier un  $\overline{\mathbb{F}}_l G$ -module presque-projectif de type fini, c’est-à-dire que tout endomorphisme de  $\mathrm{ind}_J^G(P_\tau)$  stabilise le noyau de  $\mathrm{ind}(\varepsilon)$ .

Soit  $V \subset \mathrm{ind}_J^G(\tau)$  un sous- $G$ -module ; il existe par la réciprocity de Frobenius un  $J$ -morphisme non trivial  $V \rightarrow \tau$ , d’où par projectivité un  $J$ -morphisme  $P_\tau \rightarrow V$ , puis par induction un  $G$ -morphisme  $\mathrm{ind}_J^G(P_\tau) \xrightarrow{\Psi} V$ . On définit alors  $\theta$  rendant le diagramme suivant commutatif, par projectivité de  $\mathrm{ind}_J^G(P_\tau)$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ind}_J^G(P_\tau) & \xrightarrow{\Psi} & V \hookrightarrow \mathrm{ind}_J^G(\tau) \\ & \searrow \theta & \uparrow \mathrm{ind}(\varepsilon) \\ & & \mathrm{ind}_J^G(P_\tau) \end{array}$$

Or, par «presque-projectivité», on en déduit que  $\ker \mathrm{ind}(\varepsilon) \subset \ker \Psi$ , et donc,  $\Psi$  se factorise en  $\psi \circ \mathrm{ind}(\varepsilon)$  avec  $\psi : \mathrm{ind}_J^G(\tau) \rightarrow V$  non nul. □

Pour l’assertion sur la surjectivité, on utilisera le lemme suivant :

LEMME 2.6.2. – Soit  $V$  un quotient de  $i_{M,P}^G(\rho)$  où  $\rho \in \mathrm{Cusp}_R(M)$  est admissible, alors  $r_{G,\overline{P}}^M(V) \neq 0$ .

*Démonstration.* – Puisque  $\rho$  est admissible, on sait que  $i_{M,P}^G(\rho)$  et  $V$  sont admissibles. Or, sur la catégorie des représentations admissibles on sait que l’induction parabolique admet pour adjoint à droite la restriction par rapport au parabolique opposé, d’où un morphisme non trivial :  $\rho \rightarrow r_{G,\overline{P}}^M(V)$ . On en déduit le lemme. □

Soit  $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{H}_M)$ , tel que  $\Phi_X$  est surjectif. Alors  $\Phi \otimes \mathrm{Id}_X$  est surjectif ; en effet, les hypothèses de finitude du lemme 2.5.1 impliquent que  $\mathrm{ind}_{J_M}^M(\tau_M) \otimes_{\mathcal{H}_M} X$  est admissible. Il suffit donc de voir que  $A = r_{G,\overline{P}}^M(\mathrm{im}(\Phi \otimes \mathrm{Id}_X))$  est égal à  $B = r_{G,\overline{P}}^M(i_{M,P}^G(\mathrm{ind}_{J_M}^M(\tau_M) \otimes_{\mathcal{H}_M} X))$  et d’appliquer le lemme 2.6.2. Or puisque le morphisme  $\mathrm{ind}_{J_M}^M(\tau_M) \otimes_{\mathcal{H}_M} X \rightarrow \rho_X$  est essentiel (remarque 2.4), la filtration du foncteur  $r_{\overline{P}}^G \circ i_{\overline{P}}^G$  (voir [Cas]) montre que le morphisme associé  $B \rightarrow r_{\overline{P}}^G(i_{\overline{P}}^G(\rho_X))$  est aussi essentiel (puisque’il respecte la filtration et induit des morphismes essentiels sur les facteurs de composition), donc que  $A = B$ .

On en déduit que, sous les hypothèses du lemme 2.5.1, on a :

$$\forall X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{H}_M), \quad (\mathrm{coker} \Phi) \otimes_{\mathcal{H}_M} X = 0.$$

Supposons maintenant que  $\mathrm{coker} \Phi \neq 0$ . Soit  $K$  un sous-groupe ouvert compact de pro-ordre inversible dans  $R$  tel que  $(\mathrm{coker} \Phi)^K \neq 0$  ; c’est un quotient de

$$i_{M,P}^G(\mathrm{ind}_{J_M}^M(\tau_M))^K \simeq \bigoplus_{PgK} \mathrm{ind}_{J_M}^M(\tau_M)^{M \cap g(K)}$$

(voir [Vig1, I.5.6]). Il est donc de type fini sur  $\mathcal{H}_M$  ( $G/P$  est compact). Ainsi il admet un quotient irréductible  $X$  ; en particulier, pour ce  $X$  là

$$(\mathrm{coker} \Phi)^K \otimes_{\mathcal{H}_M} X = (\mathrm{coker} \Phi \otimes_{\mathcal{H}_M} X)^K \neq 0.$$

C'est une contradiction et le lemme 2.5.1 est démontré.  $\square$

## 2.7 Cas particulier

Plaçons-nous dans le contexte de 1.8 ; rappelons que  $\mathcal{H}(M, \tau_M) \simeq R[\tilde{J}_M/J_M]$ , que

$$\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M) \simeq \text{ind}_{J_M}^M(\tilde{\tau}_M \otimes_R \mathcal{H}_M),$$

et que l'action de  $\mathcal{H}_M$  sur  $\text{i}_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M))$  est la multiplication sur le terme de droite du produit tensoriel.

Notons  $\mathcal{A} = \mathcal{H}_M$  et précisons ce que devient  $\Phi$  par l'isomorphisme

$$\text{i}_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)) \simeq \text{i}_{M,P}^G(\text{ind}_{\tilde{J}_M}^M(\tilde{\tau}_M \otimes_R \mathcal{A})) \simeq \text{ind}_{N.\tilde{J}_M}^G(\delta_P^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_M \otimes_R \mathcal{A}).$$

Notons  $\chi_{\text{un}}$  le caractère « universel »  $\tilde{J}_M \rightarrow \mathcal{A} \simeq R[\tilde{J}_M/J_M]$  ; alors  $\Phi$  s'écrit dans le nouveau langage :

$$\begin{aligned} \Phi : \tau &\rightarrow \text{Ind}_{N.\tilde{J}_M}^G(\tilde{\tau}_M \otimes \mathcal{A}) \\ v &\mapsto \begin{cases} \Phi(v) : G \rightarrow V \text{ de support } N\tilde{J}_M(J \cap \bar{N}) \\ n.\tilde{j}_M j_{\bar{N}} \mapsto (\delta_P^{\frac{1}{2}}.\tilde{\tau}_M(\tilde{j}_M) \otimes \chi_{\text{un}}(\tilde{j}_M))(v \otimes 1_{\mathcal{A}}). \end{cases} \end{aligned}$$

Comme  $R$  est algébriquement clos, tout module simple de  $\mathcal{A}$  est de la forme  $R_\chi$  (donc en particulier de dimension finie égale à 1), avec  $\mathcal{A}$  agissant sur  $R$  par un caractère  $\chi$ . Le  $M$ -module simple associé à  $\chi$  (voir 2.4) est tout simplement  $\rho_\chi = \text{ind}_{J_M}^M(\tau_M) \otimes_{\mathcal{A}} R_\chi$  (voir 1.6) et on a :

$$\text{i}_{M,P}^G(\rho_\chi) \simeq \text{i}_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)) \otimes_{\mathcal{A},\chi} R.$$

Il est facile de voir dans ce cas là que pour tout sous-groupe ouvert compact de  $G$ ,  $\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)^K$  est de type fini sur  $\mathcal{A}$  :

$$\begin{aligned} \text{ind}_{J_M}^M(\tilde{\tau}_M \otimes \mathcal{A})^K &\simeq \bigoplus_{\tilde{J}_M g K} (\tilde{\tau}_M \otimes \mathcal{A})^{\tilde{J}_M \cap g(K)} \\ &\simeq \bigoplus_{\tilde{J}_M g K} \tilde{\tau}_M^{\tilde{J}_M \cap g(K)} \otimes \mathcal{A} \simeq \text{ind}_{\tilde{J}_M}^M(\tilde{\tau}_M)^K \otimes \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Les hypothèses de l'assertion sur la surjectivité du lemme 2.5.1 sont donc vérifiées et on pourra se servir de ce lemme comme critère de surjectivité.

## 2.8 Corollaire du lemme 2.6.1

PROPOSITION 2.8.1. – *Si le radical de Jacobson de  $\mathcal{H}(G, \tau)$  est nul, alors le  $RG$ -module  $\text{ind}_J^G(\tau)$  a un radical trivial.*

*Démonstration.* – Supposons  $\text{Rad}(\text{ind}_J^G(\tau)) \neq 0$  et notons-le  $V$  pour la démonstration. Soit  $\phi \in \mathcal{H}(G, \tau)$  d'image contenue dans  $V$  (lemme 2.6.1). Alors par hypothèse, il existe un  $\mathcal{H}(G, \tau)$ -module simple  $X_\phi$  tel que  $\phi$  n'annule pas  $X_\phi$ . D'après [Vig2, I.4], il existe un  $RG$ -module  $V_\phi$  tel que  $\text{Hom}_G(\text{ind}_J^G(\tau), V_\phi)$  soit  $\mathcal{H}(G, \tau)$ -isomorphe à  $X_\phi$ . Il existe donc  $\theta : \text{ind}_J^G(\tau) \rightarrow V_\phi$  tel que  $\theta \circ \phi \neq 0$ . Ainsi on arrive à la contradiction  $\theta|_V \neq 0$ .  $\square$

### 3 Injectivité de $\Phi_\tau$

On suppose dans cette section que  $(J, \tau)$  est une paire couvrant  $(J_M, \tau_M)$  vérifiant l'hypothèse (PP) de 2.4. Le type  $(J_M, \tau_M)$  n'est supposé cuspidal que de 3.3 à 3.5.

#### 3.1 Préliminaire

Dans le cas modulaire, le deuxième diagramme de 1.3 n'est plus valable *a priori*, mais il subsiste tout de même un morphisme

$$i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M))_\tau \xrightarrow{\mathbf{m}} \text{Hom}_{\mathcal{H}_M, t_P}(\mathcal{H}_G, \mathcal{H}_M)$$

que l'on peut expliciter grâce au diagramme suivant ( $\mathcal{H}_M, t_P$  signifie qu'on munit  $\mathcal{H}_G$  de la structure de  $\mathcal{H}_M$ -module fournie par le morphisme  $t_P$ ) :

$$\begin{array}{ccc} i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M))_\tau & \longrightarrow & \widetilde{\text{Hom}}_M(r_{G,P}^M(\text{ind}_J^G(\tau)), \text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)) \\ \mathbf{m} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{M}_{\tau_M} \\ \text{Hom}_{\mathcal{H}_M, t_P}(\mathcal{H}_G, \mathcal{H}_M) & \xleftarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{H}_M}(r_{G,P}^M(\text{ind}_J^G(\tau))_{\tau_M}, \mathcal{H}_M) \end{array}$$

L'isomorphisme du haut est celui de la réciprocité de Frobenius et celui du bas vient du diagramme de 1.4. Le morphisme  $\mathfrak{M}_{\tau_M}$  est celui que fournit le foncteur du même nom ; il n'est pas nécessairement bijectif dans le cas modulaire.

Soit  $\psi \in i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M))_\tau$  ; en déroulant les identifications du diagramme précédent, (rappelons que le morphisme naturel  $i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)) \rightarrow \text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)$  est l'évaluation en  $1_G$ ), on s'aperçoit que l'image de  $\Psi$  par  $\mathbf{m}$  est :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\Psi) : \mathcal{H}_G &\rightarrow \mathcal{H}_M \\ \psi &\mapsto \begin{cases} (\psi \cdot \Psi)|_M : \tau_M &\rightarrow \text{ind}_{J_M}^M(\tau_M) \\ v &\mapsto \Psi(i_v^G * \psi)(1_G) \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

*Remarque.* – On a noté  $\psi \cdot \Psi$  pour l'action naturelle d'un élément  $\psi$  de  $\mathcal{H}_G$  sur un élément  $\Psi$  de  $i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M))_\tau$ . La notation  $(\psi \cdot \Psi)|_M$  se justifie lorsqu'on regarde dans le modèle de la remarque du 2.1 ; le morphisme naturel  $\text{ind}_{N.J_M}^G(\delta_P^{\frac{1}{2}} \tau_M) \rightarrow \text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)$  est simplement la restriction des fonctions de  $G$  à  $M$ .

#### 3.2 Stratégie

Le but est de déduire l'injectivité de  $\Phi_\tau$  de celle de la composée  $\alpha = \mathbf{m} \circ \Phi_\tau$ . Pour expliciter celle-ci, rappelons que

$$\forall \phi \in \mathcal{H}_G, \quad \Phi_\tau(\phi) = \phi \cdot \Phi,$$

ce qui avec l'expression (1) ci-dessus et les notations correspondantes donne

$$\begin{aligned} \alpha = \mathbf{m} \circ \Phi_\tau : \mathcal{H}_G &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_M, t_P}(\mathcal{H}_G, \mathcal{H}_M) \\ \phi &\mapsto \begin{cases} \mathcal{H}_G &\rightarrow \mathcal{H}_M \\ \psi &\mapsto ((\psi * \phi) \Phi)|_M \end{cases}, \end{aligned}$$

dont on veut montrer que c'est un isomorphisme, à condition d'avoir certaines informations sur les algèbres  $\mathcal{H}_G$  et  $\mathcal{H}_M$ .

LEMME 3.2.1. – Soient  $\psi, \phi \in \mathcal{H}_G$  et  $\theta, \eta \in \mathcal{H}_M$  alors on a

$$\left( (t_P(\theta) * \psi * \phi * t_{\overline{P}}(\eta)) \cdot \Phi \right)_{|M} = \theta * . \left( (\psi * \phi) \Phi \right)_{|M} * \eta$$

*Démonstration.* – Pour la multiplication à gauche par  $t_P(\theta)$ , c'est l'équivariance classique donnée par 1.4. Pour la multiplication à droite par  $t_{\overline{P}}(\eta)$ , cela vient du calcul de 2.2. (Rappelons que suivant les conventions adoptées pour les algèbres d'entrelacement,  $\delta * \gamma$  correspond à  $\gamma \circ \delta$  selon qu'on regarde dans le modèle de convolution des fonctions ou celui de composition des opérateurs). □

### 3.3 Hypothèses supplémentaires

On suppose à partir d'ici que le type  $(J_M, \tau_M)$  est cuspidal. Voici une liste d'hypothèses concernant la structure de  $\mathcal{H}_G$  en tant qu'extension de  $\mathcal{H}_M$  dont nous avons besoin pour les démonstrations ; la plupart sont des propriétés connues des types déjà existants, mais ne sont pas incluses dans le contexte « abstrait » de base de [BK1, 5.5] (*i.e.* de 1.8).

- $(H_1)$  : Il existe un sous-groupe ouvert compact  $K$  de  $G$  contenant  $J$  et un sous-groupe parabolique  $P$  de sous-groupe de Levi  $M$  tel qu'en notant  $\mathcal{H}_K$  l'image du plongement naturel  $\mathcal{A}(K, \tau) \longrightarrow \mathcal{A}(G, \tau)$ , les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_K & \rightarrow & \mathcal{H}_G \\ \phi \otimes f & \mapsto & t_P(\phi) * f \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_K \otimes \mathcal{H}_M & \rightarrow & \mathcal{H}_G \\ f \otimes \phi & \mapsto & f * t_{\overline{P}}(\phi) \end{array}$$

soient des isomorphismes de  $R$ -espaces vectoriels et même de  $\mathcal{H}_M$ -modules (pour la multiplication à gauche par  $t_P(\mathcal{H}_M)$  ou la multiplication à droite par  $t_{\overline{P}}(\mathcal{H}_M)$  selon le cas).

- $(H_2)$  : Il existe un sous-groupe parabolique  $P$  comme dans  $(H_1)$  tel que

$$\forall w \in \text{Supp}(\mathcal{H}_K), \quad N.JwJ \cap M \neq 0 \Rightarrow w \in J$$

- $(H_3)$  :  $\mathcal{H}_K$  est une algèbre symétrique grâce à la forme linéaire nulle sur les éléments de support inclus dans  $K - J$  et valant 1 sur l'unité.

Il est probable qu'on puisse obtenir la validité de ces hypothèses dans les situations où l'on connaît des types respectant le modèle de 1.6 et 1.8. Notamment ceux de la série principale d'un groupe déployé de [Ro] ou certains types de niveau zéro. Néanmoins rien n'a été fait dans ce sens et nous le démontrerons seulement pour  $\text{GL}(N)$  dans la partie 5.

*Remarques.* –

(1) L'hypothèse  $(H_1)$  montre la différence de démarche entre le cas modulaire et le cas complexe : dans le cas complexe, elle peut être démontrée dans un contexte « abstrait » plus général et apparemment moins contraignant (voir [BK1, 11.2]), mais la démonstration utilise vraiment les propriétés « catégoriques » des types complexes et en particulier ce qu'on essaye de montrer ici... La démarche est ici inverse ; à partir d'informations sur la structure de l'extension  $\mathcal{H}_M \longrightarrow \mathcal{H}_G$  que l'on peut considérer comme une propriété « géométrique » des types, puisqu'elle est communément observée sur ceux que l'on connaît, on démontre un résultat concernant des représentations de  $G$ .

(2) L'hypothèse  $(H_2)$  peut paraître surprenante car elle rompt la symétrie sur le groupe parabolique  $P$  (on ne peut espérer l'avoir pour n'importe quel parabolique de Levi  $M$ ) alors que le résultat dans le cas complexe est invariant par changement de parabolique. Par exemple, dans le cas de la représentation triviale d'un sous-groupe d'Iwahori,  $(H_2)$  n'est vérifiée que pour le sous-groupe de Borel «canoniquement associé» (voir 1.10).

Quand on supposera  $(H_2)$  vérifiée, on appellera toujours  $P$  le sous-groupe parabolique qu'elle mentionne.

### 3.4 Réduction

Rappelons que l'hypothèse  $(H_1)$  de 3.3 contient la décomposition

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_K \otimes_R \mathcal{H}_M &\rightarrow \mathcal{H}_G \\ f \otimes \phi &\mapsto f * t_{\overline{P}}(\phi). \end{aligned}$$

Faisant de  $\mathcal{H}_G$  un  $\mathcal{H}_M$ -module à droite par cette décomposition, et munissant ensuite  $\text{Hom}_{\mathcal{H}_M}(\mathcal{H}_G, \mathcal{H}_M)$  de l'action régulière à droite de  $\mathcal{H}_M$  sur le deuxième terme, on peut reformuler le lemme 3.2.1 en disant que  $\alpha$  est aussi un morphisme de  $\mathcal{H}_M$ -modules pour ces structures-là. (Remarquons que dans le contexte où l'on s'est placé,  $\mathcal{H}_M$  est commutative donc les actions «à droite» sont aussi «à gauche»).

Utilisant alors l'isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}_M, t_P}(\mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_K, \mathcal{H}_M) \simeq \text{Hom}_R(\mathcal{H}_K, \mathcal{H}_M) \simeq \mathcal{H}_K^* \otimes \mathcal{H}_M$$

qui est  $\mathcal{H}_M$ -équivariant pour les actions naturelles, on obtient le diagramme  $\mathcal{H}_M$ -équivariant suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_G & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}_{\mathcal{H}_M, t_P}(\mathcal{H}_G, \mathcal{H}_M) \\ \simeq \uparrow & & \simeq \uparrow \\ \mathcal{H}_K \otimes \mathcal{H}_M & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{H}_K^* \otimes \mathcal{H}_M \end{array} \quad (2)$$

où  $\mathcal{H}_M$  agit sur  $\mathcal{H}_G$  par convolution à droite via  $t_{\overline{P}}$ .

LEMME 3.4.1. – *Sous l'hypothèse  $(H_2)$  de 3.3, on a :  $\beta(\mathcal{H}_K \otimes 1_{\mathcal{H}_M}) \subset \mathcal{H}_K^* \otimes 1_{\mathcal{H}_M}$  de sorte que  $\beta$  induit un morphisme de  $R$ -espaces vectoriels  $\mathcal{H}_K \xrightarrow{\beta_K} \mathcal{H}_K^*$  tel que*

$$\beta = \beta_K \otimes \text{Id}_{\mathcal{H}_M}. \quad (3)$$

*De plus,  $\beta_K$  est  $\mathcal{H}_K$ -équivariant pour l'action naturelle de  $\mathcal{H}_K$  sur son dual.*

*Démonstration.* – Il suffit de voir que si  $\phi$  et  $\psi$  ont un support dans  $K$ , alors  $((\phi * \psi)\Phi)|_M$  a son support dans  $J_M$ . Plus généralement, pour  $\zeta \in \mathcal{H}_G$  quelconque, on voit d'après la formule (1) de 3.1 et la formule (1) de 2.2 que

$$\text{Supp}(\zeta \cdot \Phi)|_M \subset (N \cdot \text{Supp } \zeta) \cap M. \quad (4)$$

On en déduit que  $\text{Supp}((\phi * \psi)\Phi)|_M \subset N \text{Supp}(\mathcal{H}_K) \cap M = J_M$  d'après l'hypothèse  $(H_2)$  de 3.3.

On peut donc définir  $\beta_K$  par  $\beta_K(\psi_K)[\phi_K] = ((\phi_K * \psi_K)\Phi)|_M(1_M)$  et il apparaît alors que c'est un morphisme de  $\mathcal{H}_K$ -module pour l'action usuelle de  $\mathcal{H}_K$  sur son dual.  $\square$

### 3.5 Étude de $\beta_K$

Notons  $\mathcal{H}_K^{-J}$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{H}_K$  de support inclus dans  $K - J$ .

LEMME 3.5.1. – *Sous l'hypothèse  $(H_2)$ , on a  $\beta_K(1_J)[\phi] = 0$  pour tout  $\phi \in \mathcal{H}_K^{-J}$ .*

*Démonstration.* – Cela vient directement de la formule donnant le support (4) et de l'hypothèse  $(H_2)$  de 3.3. □

On s'aperçoit donc que  $\beta_K$  est un isomorphisme si et seulement si la forme linéaire qui s'annule sur les éléments de support disjoint de  $J$  fait de  $\mathcal{H}_K$  une algèbre symétrique. C'est exactement l'hypothèse  $(H_3)$  de 3.3. On en déduit donc que dans ce cas (et nous nous y placerons dorénavant),  $\alpha$  est bien un isomorphisme. Plus précisément :

PROPOSITION 3.5.1. – *Sous les hypothèses  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  et  $(H_3)$  de 3.3,  $\alpha$  induit une équivalence entre les foncteurs  $\mathcal{H}_M - \text{Mod} \longrightarrow \mathcal{H}_G - \text{Mod}$  :*

$$A \mapsto \mathcal{H}_G \otimes_{\mathcal{H}_M, t_{\overline{P}}} A \text{ et } A \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{H}_M, t_P}(\mathcal{H}_G, A)$$

*Démonstration.* – D'après ce qui précède,  $\beta_K$  est un isomorphisme, et donc  $\beta$  également par (3), car l'extension  $R \longrightarrow \mathcal{H}_M$  est plate ( $R$  est un corps) ; donc, par (2),  $\alpha$  est un isomorphisme  $\mathcal{H}_M$ -équivariant pour la multiplication à droite via  $t_{\overline{P}}$  sur  $\mathcal{H}_G$  et la multiplication naturelle sur les fonctions à valeurs dans  $\mathcal{H}_M$ . Ceci, avec l'isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}_M, t_P}(\mathcal{H}_G, A) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{H}_M, t_P}(\mathcal{H}_G, \mathcal{H}_M) \otimes_{\mathcal{H}_M} A,$$

donne le résultat. □

COROLLAIRE 3.5.1. – *Sous les hypothèses  $(PP)$  de 2.4,  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  et  $(H_3)$  de 3.3,  $\Phi_{M,P}^G$  est injective.*

*Remarque (importante).* – N'oublions pas que  $(H_2)$  fixe le sous-groupe parabolique  $P$  par rapport auquel on induit. Cependant, soit  $w \in \mathcal{N}_G(M)$ , alors en conjuguant par  $w$ , on obtient que la composée

$$\text{ind}_J^G(\tau) \xrightarrow{\sim} w(\text{ind}_J^G(\tau)) \xrightarrow{\Phi} i_{M,w(P)}^G(\text{ind}_{J_M^w}^M(\tau_M^w))$$

est injective : en fait, on retrouve le morphisme  $\Phi^w$  qu'on aurait pu construire avec le type  $(J^w, \tau^w)$  (on précisera ceci dans la démonstration de 4.3). Supposons maintenant que  $w$  normalise  $\tau_M$  (voir 1.9) ; on obtient donc un morphisme injectif :

$$\text{ind}_J^G(\tau) \hookrightarrow i_{M,w(P)}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M))$$

Ceci n'étend pas complètement le corollaire à ces nouveaux sous-groupes paraboliques car il n'y a pas de raison que ce morphisme soit  $\Phi_{M,w(P)}^G$ .

### 3.6 Cas particulier

On ne suppose plus ici que  $(J_M, \tau_M)$  est un type cuspidal. On s'intéresse au cas où  $\text{Supp } \mathcal{H}_G = JMJ$ . Alors tous les  $t_P$  sont des isomorphismes d'algèbres (ils sont égaux à torsion par un caractère non ramifié près) et  $\alpha$  devient :

$$\alpha : \mathcal{H}_M \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_M}(\mathcal{H}_M, \mathcal{H}_M)$$

$$\phi \mapsto \begin{cases} \mathcal{H}_M \rightarrow \mathcal{H}_M \\ \psi \mapsto \psi * \phi \end{cases}$$

qui est évidemment un isomorphisme : dans ce cas  $\Phi_{M,P}^G$  est donc injective quel que soit le sous-groupe parabolique  $P$  par rapport auquel on induit.

## 4 Surjectivité de $\Phi$ et conséquences

### 4.1 Encore une hypothèse

L'hypothèse suivante est, elle aussi, souvent observée pour les types déjà connus :

$$(H_4) : \dim(\mathcal{H}_K) = |\mathcal{N}_G(\tau_M)/M|$$

(voir 1.9 pour la définition de  $\mathcal{N}_G(\tau_M)$ ). En fait, ce qui est observé en général est plus précis : on peut trouver une base de  $\mathcal{H}_K$  d'éléments inversibles  $\phi_w$  à support dans  $JwJ$ , où  $w$  décrit un ensemble de représentants de  $\mathcal{N}_G(\tau_M)/M$ .

Dans ce cas, on peut «démystifier» l'hypothèse  $(H_2)$  de 3.3 : si  $J$  est adapté à  $M$  et si  $P$  et  $K$  sont respectivement le sous-groupe parabolique et le sous-groupe compact maximal de la construction du 1.10, alors si  $P$  vérifie  $(H_1)$ , il vérifie  $(H_2)$ .

### 4.2 Diagramme commutatif affaibli

On a vu au 1.3 que les équivalences de catégories dans le cas complexe permettaient de trouver «abstraitement» un diagramme commutatif avec l'induction. Voici un énoncé affaibli dans le cas modulaire :

PROPOSITION 4.2.1. – *Dans le contexte de 1.8 et sous les hypothèses (PP) de 2.4,  $(H_1)$ ,  $(H_2)$ ,  $(H_3)$  de 3.3 et  $(H_4)$  de 4.1, on a pour tout  $\chi \in X^*(\mathcal{H}_M)$  :*

$$i_{M,P}^G(\rho_\chi)_\tau \simeq \text{Hom}_{\mathcal{H}_M, t_P}(\mathcal{H}_G, R_\chi),$$

où  $R_\chi = \rho_{\chi\tau_M}$  est le  $\mathcal{H}_M$ -module simple associé à  $\rho_\chi$ .

*Démonstration.* – (Voir 2.7 pour les notations). Soit  $\chi$  un caractère de  $\mathcal{H}_M$ . Alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{ind}_J^G(\tau) & \xrightarrow{\Phi} & i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{ind}_J^G(\tau) \otimes_{\mathcal{H}_M, t_P} R_\chi & \xrightarrow{\Phi_\chi} & i_{M,P}^G(\rho_\chi) \end{array}$$

donne, en prenant les parties  $\tau$ -isotypiques et en composant comme dans 3.1,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}_G & \xrightarrow{\Phi_\tau} & (i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)))_\tau & \xrightarrow{\mathbf{m}} & \text{Hom}_{\mathcal{H}_M, t_P}(\mathcal{H}_G, \mathcal{H}_M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_G \otimes_{\mathcal{H}_M, t_{\overline{P}}} R_\chi & \xrightarrow{\Phi_\tau^\chi} & (i_{M,P}^G(\rho_\chi))_\tau & \xrightarrow{\mathbf{m}_\chi} & \text{Hom}_{\mathcal{H}_M, t_P}(\mathcal{H}_G, R_\chi) \end{array}$$

On sait d'après 3.5 que  $\mathbf{m} \circ \Phi_\tau : \mathcal{H}_G \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_M}(\mathcal{H}_G, \mathcal{H}_M)$  est un isomorphisme ;  $\mathbf{m}_\chi$  est donc surjectif. Or (toujours 3.5),  $\text{Hom}_{\mathcal{H}_M}(\mathcal{H}_G, R_\chi)$  est isomorphe à  $\mathcal{H}_G \otimes_{\mathcal{H}_M, t_{\overline{P}}} R_\chi$  et a donc même dimension sur  $R$  que  $\mathcal{H}_K$  d'après la structure donnée par  $(H_1)$ . D'autre part, on sait que  $(i_{M,P}^G(\rho_\chi))_\tau = (r_{G,Q}^M(i_{M,P}^G(\rho_\chi)))_{\tau_M}$  (au moins en tant que  $R$ -espace vectoriel) pour tout sous-groupe parabolique  $Q$  de sous-groupe de Levi  $M$ . Or, on sait que  $r_{M,Q}^G(i_{M,P}^G(\rho_\chi))$  est filtré par les  $w(\rho_\chi)$ ,  $w$  décrivant  $\mathcal{N}_G(M)/M$ . Donc d'après la discussion de 1.9, on voit que la  $R$ -dimension  $(r_{M,Q}^M(i_{M,P}^G(\rho_\chi)))_{\tau_M}$  est au plus égale à  $|\mathcal{N}_G(\tau_M)/M|$ . On déduit alors de l'hypothèse  $(H_4)$  qu'elle lui est en fait égale et que  $\mathbf{m}_\chi$  est un isomorphisme. Un argument de dimension semblable à celui ci-dessus montre que  $\Phi_\tau^\chi$  est aussi un isomorphisme.  $\square$

*Remarque.* – Par un raisonnement analogue à 2.6 et 2.7, et après avoir remarqué que  $i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M))_\tau$  est de type fini sur  $\mathcal{H}_M$ , on peut montrer que  $\mathbf{m}$  est un isomorphisme

$$i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M))_\tau \simeq \text{Hom}_{\mathcal{H}_M, t_P}(\mathcal{H}_G, \mathcal{H}_M)$$

puisque ses réductions modulo  $\chi$  le sont pour tout  $\chi$ .

### 4.3 Premier théorème

**THÉORÈME 4.3.1.** – *Dans le contexte 1.8 et sous les hypothèses (PP) de 2.4,  $(H_1)$ ,  $(H_2)$ ,  $(H_3)$  de 3.3 et  $(H_4)$  de 4.1,  $\Phi_{M,P}^G$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* – Avec les notations de la section précédente, le but est de montrer que  $\Phi_\chi$  est surjective pour tout  $\chi$  et d'appliquer la discussion de 2.7 et le lemme 2.5.1 pour en déduire la surjectivité de  $\Phi$ . Soit donc  $\chi$  fixé ; pour montrer que  $\Phi_\chi$  est surjective, il suffit d'après le lemme 2.6.2 de montrer que  $r_{G,\overline{P}}^M(\Phi_\chi)$  l'est.

La démonstration précédente montre que pour tout sous-groupe parabolique  $Q$  de sous-groupe de Levi  $M$ ,  $\text{im}(r_{M,Q}^G(\Phi_\chi))_{\tau_M}$  est de longueur  $|\mathcal{N}_G(\tau_M)|$ .

Si  $w \in \mathcal{N}_G(M)$ , alors  $(J^w, \tau^w)$  est encore un type vérifiant le contexte 1.8 ; il couvre le  $M$ -type cuspidal  $(J_M^w, \tau_M^w)$  qui a pour algèbre d'entrelacement  $\mathcal{H}_M^w$ , qui est naturellement isomorphe à  $\mathcal{H}_M$ . En particulier, si  $\chi$  est un caractère de  $\mathcal{H}_M$ , on notera bien-sûr  $\chi^w$  le caractère de  $\mathcal{H}_M^w$  associé à  $\chi$ . De plus, on peut construire un morphisme  $\Phi^w$  de manière analogue à celle de 2.1 pour  $\Phi$ , en prenant pour parabolique  $w(P)$ . Il est clair que si  $K$  et  $P$  vérifient les hypothèses  $(H_i)$  pour  $(J, \tau)$ , alors  $K^w$  et  $w(P)$  les vérifient aussi pour  $(J^w, \tau^w)$ . De plus, le diagramme suivant est commutatif (la démonstration rigoureuse en est un peu pénible mais facile) :

$$\begin{array}{ccc} w(\text{ind}_J^G(\tau) \otimes_{\mathcal{H}_M, t_{\overline{P}}} R_\chi) & \xrightarrow{\Phi_\chi} & w(i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M) \otimes_{\mathcal{H}_M} R_\chi)) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \text{ind}_{J^w}^G(\tau^w) \otimes_{\mathcal{H}_M^w, t_{w(P)}} R_{\chi^w} & \xrightarrow{\Phi_{\chi^w}^w} & i_{M, w(P)}^G(\text{ind}_{J_M^w}^M(\tau_M^w) \otimes_{\mathcal{H}_M^w} R_{\chi^w}) \end{array}$$

On en déduit que pour tout sous-groupe parabolique  $Q$  de sous-groupe de Levi  $M$ ,  $\text{im}(r_{M,Q}^G(\Phi_\chi))_{\tau_M^w} = r_{M,Q}^G(\text{im}(\Phi_\chi))_{\tau_M^w} = r_{M,Q}^G(\text{im}(\Phi_{\chi^w}))_{\tau_M^w}$  est de longueur  $|\mathcal{N}_G(\tau_M^w)|$ , par la proposition 4.2.1 appliquée au type  $(J^w, \tau^w)$ .

Choisissons  $w_0 = 1, w_1, \dots, w_k$  des représentants de  $\mathcal{N}_G(M)/\mathcal{N}_G(\tau_M)$  : les  $M$  types cuspidaux  $\tau_M^{w_0} = \tau_M, \tau_M^{w_1}, \dots, \tau_M^{w_k}$  vérifient :

- $[\tau_M^{w_i}] \cap [\tau_M^{w_j}] = \emptyset$  pour  $i \neq j$  d'après 1.9.
- $\text{im}(r_{G,\overline{P}}^M(\Phi_\chi))_{\tau_M^{w_i}}$  est de  $R$ -dimension  $|\mathcal{N}_G(\tau_M^{w_i})| = |\mathcal{N}_G(\tau_M)|$  pour tout  $i$  d'après ce qui précède.

On en déduit que  $\text{im}(r_{G,\overline{P}}^M(\Phi_\chi))$  est de longueur au moins égale à

$$\sum_i |\mathcal{N}_G(\tau_M^{w_i})/M| = |\mathcal{N}_G(M)/M|$$

dans  $r_{G,\overline{P}}^M(i_{M,P}^G(\rho_\chi))$  qui est justement de longueur  $|\mathcal{N}_G(M)/M|$ . Donc  $\Phi_\chi$  est surjective.  $\square$

*Remarque.* – Le  $P$  du théorème était implicitement fixé par l'hypothèse  $(H_2)$ , mais comme dans la remarque du 3.5, on peut conjuguer par un élément  $w \in \mathcal{N}_G(\tau_M)$  pour obtenir

$$\text{ind}_J^G(\tau) \simeq i_{M,w(P)}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)).$$

Il n'est cependant pas évident que  $\Phi_{M,w(P)}^G$  soit lui-même un isomorphisme.

#### 4.4 Théorèmes principaux

On pourrait se contenter du théorème 4.3.1 dont l'utilisation peut paraître plus souple que le résultat qui va suivre. Cependant, celui-ci présente les deux avantages d'être particulièrement bien adapté au cas de  $\text{GL}(N)$  et d'étendre la propriété d'isomorphisme de la conjecture de 1.4 sans restriction sur le parabolique par rapport auquel on induit :

**THÉORÈME 4.4.1.** – *Soit  $(J, \tau)$  un type dans le contexte 1.8, et supposons que l'on connait un sous-groupe de Levi  $L$  contenant  $M$  tel que :*

1.  $(J_L, \tau_L)$  vérifie les hypothèses du théorème 4.3.1 (Avec  $L$  à la place de  $G$  et  $P_L$  pour le sous-groupe parabolique de  $L$  satisfaisant aux hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ ).
2.  $\mathcal{N}_L(\tau_M)$  agit transitivement sur les sous-groupes paraboliques de  $L$  contenant  $M$ .
3.  $(J, \tau)$  vérifie l'hypothèse  $(PP)$  de 2.4.
4.  $\text{Supp } \mathcal{H}_G \subset J L J$  et  $J$  est « adapté » à  $M$  (1.10) .

Alors, pour tout sous-groupe parabolique  $P$  de sous-groupe de Levi  $M$ ,

$$\text{ind}_J^G(\tau) \simeq i_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)).$$

De plus, si  $P \cap L = P_L$ , alors  $\Phi_{L,P}^G$  est un isomorphisme.

*Remarques.* –

(1) On verra dans la partie 5 que cette décomposition de l'induction intervient naturellement dans le cas  $\text{GL}(N)$  à cause de la construction des types semisimples à partir des types simples dans [BK3].

(2) Pour  $P$  tel que  $P \cap L \neq P_L$ , on verra facilement que l'isomorphisme exhibé n'est pas  $\Phi_{M,P}^G$ . Ceci n'est pas gênant pour l'application au fait que  $\text{Mod}_R(\text{GL}(N))$  est noethérienne, mais ceci l'est pour les autres applications où la propriété fondamentale dont on aura besoin sera l'équivariance de 2.2. Dans cette optique, nous donnons le résultat simple suivant dont les hypothèses, toujours plus exigeantes, sont néanmoins encore vérifiées par les types de  $\text{GL}(N)$ .

THÉORÈME 4.4.2. – *Dans les conditions du théorème 4.4.1, si on suppose de plus que*

$$\forall w \in \mathcal{N}_G(M), \quad J_M^w \simeq J_M \text{ et } \tau_M^w \simeq \tau_M$$

alors pour tout sous-groupe parabolique  $P$ , il existe une paire  $(J^P, \tau^P)$  couvrant  $(J_M, \tau_M)$  vérifiant aussi (PP) et tel que l'application  $\Phi_{M,P}^G$  lui correspondant soit un isomorphisme :

$$\text{ind}_{J^P}^G(\tau^P) \xrightarrow{\simeq} \text{ind}_{J_M}^M(\tau_M).$$

Pour la démonstration de ces résultats, il sera pratique d'utiliser la notion suivante :

## 4.5 Application à la $G$ -équivalence

On peut généraliser la proposition 1.7 de la manière suivante :

PROPOSITION 4.5.1. – *Soient  $(J, \tau)$  et  $(J', \tau')$  deux types de  $G$  vérifiant l'hypothèse (PP) de 2.4 et qui sont des paires covariantes de types cuspidaux satisfaisant la conjecture 1.4. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $[\tau] \cap [\tau'] \neq \emptyset$
- $(J, \tau)$  et  $(J', \tau')$  sont  $G$ -équivalents (voir 1.7).

*Démonstration.* – «ii) implique i)» est évident. Montrons que i) implique ii). On note  $(J_M, \tau_M)$  et  $(J'_{M'}, \tau'_{M'})$  les types cuspidaux correspondants ; si  $\pi \in [\tau'] \cap [\tau]$ , alors par unicité du support cuspidal, on sait que  $M$  est conjugué à  $M'$  par  $x \in G$  et que le type  $(J_M^x, \tau_M^x)$  est  $M$ -équivalent à  $(J_M, \tau_M)$  (voir la proposition 1.7). Le résultat découle donc de l'hypothèse d'isomorphisme et du fait que  $\text{ind}_{J'}^G(\tau') \simeq \text{ind}_{J'^x}^G(\tau'^x)$ . □

## 4.6 Démonstration du théorème 4.4.1

Nous commençons par démontrer le résultat pour  $P$  tel que  $P \cap L = P_L$ . On sait que  $\Phi_{M,P_L}^L$  est un isomorphisme ; donc d'après 2.3, il suffit de montrer que  $\Phi_{L,P}^G$  est un isomorphisme. Or, on sait déjà d'après 3.6 que celui-ci est injectif. Pour la surjectivité, on va appliquer le critère fourni par le lemme 2.5.1.

Commençons par vérifier les hypothèses : soit  $H$  un sous-groupe ouvert compact de  $L$  ; on a alors

$$\text{ind}_{J_L}^L(\tau_L)^H \simeq \text{i}_{M,P}^L(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M))^H \simeq \bigoplus_{P_L g H} \text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)^{M \cap g(H)}$$

est de type fini sur  $\mathcal{H}_M$  d'après 2.7, et donc en particulier sur  $\mathcal{H}_L$ . De plus la forme  $\mathcal{H}_L \simeq \mathcal{H}_{K_L} \otimes \mathcal{H}_M$  pour un certain  $K_L$  compact de  $L$  montre que les modules irréductibles sur  $\mathcal{H}_L$  sont de dimension finie. On peut donc appliquer le lemme 2.5.1.

Soit  $X$  un  $\mathcal{H}_L$ -module simple et  $(\rho_X, V_X)$  comme dans 2.4. On veut démontrer que  $\Phi_X = (\Phi_{L,P}^G)_X$  est surjective. D'après le lemme 2.6.2, il suffit de démontrer que  $r_{G,\overline{P}}^M(\Phi_X)$  est surjective, ou, ce qui revient au même, que la longueur de  $U = \text{im}(r_{G,\overline{P}}^M(\Phi_X))$  est égale à  $n_L^G = |\mathcal{N}_G(L)/L|$ . En fait, on va exhiber  $n_L^G$  facteurs de composition de  $U$  : en effet, on remarque comme dans la démonstration de 4.3.1 que pour tout  $w \in \mathcal{N}_G(L)$ ,  $U_{\tau_L^w} = \text{im}(r_{G,\overline{P}}^M(\Phi_X))_{\tau_L^w} \neq 0$ . Choisissons donc pour chaque classe  $wL \in \mathcal{N}_G(L)/L$  un quotient irréductible  $U_w$  de la partie  $\tau_L^w$ -isotypique de  $U$  ; si on montre qu'elles sont deux à deux non isomorphes, ce seront des facteurs de composition distincts de  $U$ .

Pour cela, on va montrer que les hypothèses  $\text{Supp } \mathcal{H}_G \subset J_L J$  et  $J$  adapté à  $M$  (donc à  $L$ ) impliquent que

$$\forall w, w' \in \mathcal{N}_G(L), [\tau_L^w] \cap [\tau_L^{w'}] \neq \emptyset \Rightarrow wL = w'L.$$

En effet, si  $[\tau_L^w] \cap [\tau_L^{w'}] \neq \emptyset$ , alors d'après 4.5, l'hypothèse sur  $\mathcal{N}_L(\tau_M)$  et la remarque de 4.3, les types  $(J_L^w, \tau_L^w)$  et  $(J_L^{w'}, \tau_L^{w'})$  sont  $L$ -équivalents et par le même argument que celui de 1.9, ceci implique qu'il existe  $l \in L$  tel que  $w'w^{-1}l \in \text{Supp } \mathcal{H}_G = J_L J$ . Le corollaire 1.10.1 et la remarque qui le suit entraînent donc que  $w'L = wL$ .

Soit maintenant  $P$  quelconque ; d'après l'hypothèse ii), il existe  $w \in \mathcal{N}_L(\tau_M)$  tel que  $P \cap L = w(P_L)$ . Donc

$$\text{ind}_J^G(\tau) \simeq \text{i}_{M,w^{-1}(P)}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)) \simeq \text{i}_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M)^w) \simeq \text{i}_{M,P}^G(\text{ind}_{J_M}^M(\tau_M))$$

La dernière égalité venant du fait que  $w$  normalise  $\tau_M$  (1.9). □

## 4.7 Démonstration du théorème 4.4.2

Les notations sont les mêmes que pour la démonstration précédente. Soient  $P$  un sous-groupe parabolique contenant  $M$  et  $w \in \mathcal{N}_L(M)$  tel que  $P \cap L = w(P_L)$  ; alors  $(J^w, \tau^w)$  est bien sûr une paire couvrant  $(J_M, \tau_M^w)$ . Fixons un  $R$ -automorphisme  $\overline{w}$  de  $V$  (l'espace de la représentation  $\tau_M$ ) tel que  $\tau_M^w = \overline{w} \circ \tau_M \circ \overline{w}^{-1}$ . On pose alors  $J_P = J^w$  et  $\tau^P = \overline{w}^{-1} \circ \tau^w \circ \overline{w}$  ; c'est une paire couvrant  $(J_M, \tau_M)$  qui vérifie toutes les hypothèses du théorème 4.4.1 avec  $w(P_L)$  au lieu de  $P_L$  dans l'hypothèse i). Le théorème 4.4.2 en découle. □

## 4.8 Application à l'adjonction à gauche de la restriction

On a vu que dans le cas complexe, l'induction par rapport au parabolique opposé était adjointe à gauche de la restriction parabolique. Dans le cas modulaire, c'est encore vrai si on se restreint aux catégories des représentations admissibles [Vig1, II.3]. Une conséquence de tout ce qui précède est qu'on peut étendre ce résultat de la manière suivante :

**PROPOSITION 4.8.1.** – *Supposons que  $\Phi_{M,P}^G$  soit un isomorphisme et soit  $\chi$  un caractère de  $\mathcal{H}_M$  et  $V \in \text{Mod}_R(G)$  (quelconque). Alors*

$$\text{Hom}_G(\text{i}_P^G(\rho_\chi), V) \simeq \text{Hom}_M(\rho_\chi, r_{\overline{P}}^M(V))$$

(On est toujours sous les hypothèses  $(H_i)$  de 3.3 et 4.1 : en particulier, on s'est donné un  $M$ -type cuspidal pour  $\rho$  dont l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}_M$  est commutative).

*Démonstration.* –

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_G(i_P^G(\rho_\chi), V) &\simeq \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_J^G(\tau) \otimes_{\mathcal{H}_{M,\chi}} R, V) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_G}(\mathcal{H}_G \otimes_{\mathcal{H}_M, t_{\overline{P}}} R_\chi, V_\tau) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_M}(R_\chi, (i_{\overline{P}}^G(V))_{\tau_M}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_M(\rho_\chi, i_{\overline{P}}^M(V))
\end{aligned}$$

La deuxième égalité vient du fait que les deux  $R$ -espaces en question sont égaux à

$$\{f : \mathrm{ind}_J^G(\tau) \rightarrow V \mid f \circ t_{\overline{P}}(\phi) = 0, \forall \phi \in I_\chi\},$$

où  $I_\chi$  est le noyau de  $\mathcal{H}_M \rightarrow R_\chi$ . □

*Remarques.* –

(1) Cette généralisation est très partielle ; on peut certainement l'améliorer en remplaçant  $\rho_\chi$  par  $\mathrm{ind}_{J_M}^M(\tau_M) \otimes_{\mathcal{H}_M} X$  pour un  $\mathcal{H}_M$ -module  $X$  de type fini. Ce serait beaucoup plus intéressant de l'avoir pour tout quotient de  $\mathrm{ind}_{J_M}^M(\tau_M)$ , ce qui n'est pas évident *a priori* (sauf dans le cas où  $\tau_M$  est projectif), mais cela ne suffirait pas et il faudrait examiner le cas des types non cuspidaux, ce qui est encore plus délicat.

(2) Cependant, avec cette technique, on espère pouvoir montrer, grâce aux types de [Ro], que  $i_{T,B}^G$  est adjoint à gauche de  $r_{T,\overline{B}}^G$  pour un sous-groupe de Borel  $B$  de tore maximal  $T$  d'un groupe déployé.

## 4.9 Application à l'irréductibilité générique

PROPOSITION 4.9.1. – *Supposons que  $\Phi_{M,P}^G$  soit un isomorphisme et que  $(J, \tau)$  vérifie l'hypothèse (PP) de 2.4 ; alors  $i_{M,P}^G(\rho_\chi)$  est irréductible si et seulement si  $\mathcal{H}_G \otimes_{\mathcal{H}_M, t_{\overline{P}}} R_\chi$  est un  $\mathcal{H}_G$ -module simple.*

*Démonstration.* – Par 2.4,  $i_{M,P}^G(\rho_\chi)$  est irréductible si et seulement si

$$(i_{M,P}^G(\rho_\chi))_\tau \simeq \left( \mathrm{ind}_J^G(\tau) \otimes_{\mathcal{H}_M, t_{\overline{P}}} R_\chi \right)_\tau \simeq \mathcal{H}_G \otimes_{\mathcal{H}_M, t_{\overline{P}}} R_\chi$$

est irréductible. La première égalité vient de l'équivariance de  $\Phi$  (voir 2.2). □

*Remarque.* – La preuve classique du théorème d'irréductibilité générique (voir dans [Cas] par exemple) utilise des arguments d'unitarité non transposables au cas modulaire. Dans le contexte du résultat ci-dessus, on voit qu'on peut ramener ce problème pour la cuspidale  $\rho$  du sous-groupe de Levi  $M$  au problème similaire pour une algèbre de Hecke. En particulier, si celle-ci est affine – c'est par exemple le cas pour  $\mathrm{GL}(N)$ , pour les irréductibles ayant un point fixe par un Iwahori, ou les irréductibles de la série principale d'un groupe déployé comme dans [Ro] – on doit pouvoir appliquer (mais les détails restent à vérifier) les méthodes de [Rog, 3.2] qui n'utilisent pas l'unitarité, pour en déduire cette irréductibilité générique.

## 5 Cas de $GL(N)$

### 5.1 A propos des hypothèses

Dans le cas des types simples de  $GL(N)$ , la structure de l'extension  $\mathcal{H}_M \rightarrow \mathcal{H}_G$  est plus précise que ce qui est requis dans les hypothèses  $(H_i)$  de 3.3 et 4.1 : on va en effet déduire des travaux de Bushnell et Kutzko la structure suivante qui implique la validité de  $(H_1)$  et  $(H_3)$  :

(H) : On est dans les conditions de 1.8 et il existe un isomorphisme de  $\mathcal{H}_G$  sur une algèbre de Hecke affine  $\mathcal{H}(\widetilde{W})$  de type  $A_n$  et de paramètre  $q^k$  et de groupe de Weyl affine associé  $\widetilde{W}$ . Il existe un sous-groupe ouvert compact  $K$  comme dans  $(H_1)$  tel que l'isomorphisme ci-dessus envoie  $\mathcal{H}_K$  sur une sous-algèbre de Hecke « sphérique »  $\mathcal{H}_0(W) = \mathcal{H}(W_0)$  pour un certain sous-groupe de Coxeter fini  $W_0$  de  $W$ . Enfin, si  $X$  est le sous-groupe des translations de  $W$ , il existe un isomorphisme de  $\mathcal{H}_M$  sur  $R[X]$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_K & \longrightarrow & \mathcal{H}_G \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ R[X] \otimes \mathcal{H}_0(W) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}(W) \end{array}$$

la flèche du haut étant celle de l'énoncé de  $(H_1)$  et la flèche du bas l'isomorphisme de Bernstein et Zelevinski.

*Remarques.* –

(1) Pour la présentation de Bernstein et Zelevinski, voir [Lu] et pour le fait qu'une algèbre de Hecke sur un groupe de Coxeter fini est symétrique, voir [Ca, 10.9.2].

(2) Aux vues des constructions des morphismes de Bernstein dans [Lu] d'une part et de  $t_{\overline{P}}$  dans [BK1] d'autre part, il est clair qu'on obtient le même genre de diagramme avec  $\overline{P}$  à la place de  $P$ .

### 5.2 Types simples

Soit  $V$  un  $F$ -espace vectoriel de dimension  $N$  et  $G = \text{Aut}_F(V)$ . On suppose ici que  $(J, \tau)$  est un type défini comme dans [BK3, 1.4.2], c'est-à-dire qu'il existe un type simple  $(\overline{J}, \lambda)$  au sens de [BK2]=*loc.cit.* tel que  $J \subset \overline{J}$ ,  $(J \cap M) = (\overline{J} \cap M)$  et  $\text{ind}_{\overline{J}}^J(\lambda) = \tau$ . On note comme dans *loc.cit.*  $[\mathfrak{A}, n, 0, b]$  la strate simple associée à  $(\overline{J}, \lambda)$ ,  $E$  le corps  $F[b]$  et  $\mathfrak{B}$  l'ordre héréditaire de périodicité  $e$  induit sur  $\text{Aut}_E(V)$ . On suppose que  $M$  correspond à la décomposition de  $V$  selon  $\mathfrak{B}$  et on prend pour  $P$  un sous-groupe parabolique subordonné à  $[\mathfrak{A}, n, 0, b]$  et minimal pour cette propriété (voir [BK2, 7.2.18]).

L'intérêt de prendre  $J$  au lieu de  $\overline{J}$  est que c'est un vrai  $G$ -cover de  $(J \cap M)$  d'après [BK3, 1.4.2] ou [BH] §10. D'autre part, d'après *loc.cit.*(7.2.18),  $\tau_M \simeq \tau' \otimes \dots \otimes \tau'$  ( $e$  facteurs) avec  $\tau'$  un type simple maximal (c'est-à-dire un type cuspidal au sens de 1.6) de  $GL(N/e, F)$ .

Notons  $W_0$ ,  $X$  et  $\widetilde{W}$  les groupes  $W_0(\mathfrak{B})$ ,  $D(\mathfrak{B})$  et  $\widetilde{W}(\mathfrak{B})$  de *loc.cit.*(5.5.9) et  $J_m$  le groupe noté  $J_M$  dans (5.6.1) associé à l'ordre  $E$ -héréditaire maximal  $\mathfrak{B}_m$  ainsi que  $\lambda'$  la représentation de  $\mathbf{U}(\mathfrak{B})J_m^{-1}$  ( $J_m^{-1}$  est le pro- $p$ -radical de  $J_m$ ) définie en (5.5.12). On a alors les propriétés suivantes :

- On a un diagramme d'inclusions (voir [Vig1, III.4.21])

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{U}(\mathfrak{B})\mathbf{U}^1(\mathfrak{A}) & \\
 \nearrow & & \nwarrow \\
 \overline{J}, \lambda & & \mathbf{U}(\mathfrak{B})J_m^{-1}, \lambda' \\
 & & \nearrow \\
 & & J_m
 \end{array}$$

- (*loc.cit.*(5.5.13)) Les induites de  $\lambda$  et  $\lambda'$  à  $\mathbf{U}(\mathfrak{B})\mathbf{U}^1(\mathfrak{A})$  selon les deux inclusions ci-dessus sont équivalentes. En particulier, il existe un isomorphisme canonique  $\mathcal{H}(G, \lambda) \simeq \mathcal{H}(G, \lambda')$  préservant le support.
- (*loc.cit.*(5.6.1)) Il existe un isomorphisme canonique et préservant le support  $\mathcal{H}(W_0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(J_m, \lambda')$ .
- (*loc.cit.*(5.6.6)) En notant  $\Psi_0$  la composée  $\mathcal{H}(W_0) \rightarrow \mathcal{H}_G$  des morphismes précédents et de l'inclusion  $\mathcal{H}(J_m, \lambda') \subset \mathcal{H}(G, \lambda')$ , il existe une famille de prolongements de  $\Psi_0$  en des isomorphismes  $\Psi : \mathcal{H}(\widetilde{W}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_G$ .
- (*loc.cit.*(7.6.20)) On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 R[X] & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}_M \\
 \downarrow \theta & & \downarrow t_P \\
 \mathcal{H}(\widetilde{W}) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{H}(G, \lambda)
 \end{array}$$

où  $\Psi$  est un isomorphisme prolongeant  $\Psi_0$ , et  $\theta$  est le morphisme de Bernstein (comme dans [Lu]).

Posons maintenant  $K = \mathbf{U}(\mathfrak{A}_m)$ ;  $K$  est un sous-groupe ouvert compact contenant les groupes  $J$ ,  $\mathbf{U}(\mathfrak{B})J_m^{-1}$  et  $\mathbf{U}(\mathfrak{B})\mathbf{U}^1(\mathfrak{A})$ ; donc, en particulier, il existe un isomorphisme préservant le support  $\mathcal{H}(K, \lambda) \simeq \mathcal{H}(K, \lambda')$ . Or,  $K$  contient  $J_m$ ;  $\mathcal{H}(K, \lambda')$  contient donc  $\mathcal{H}(W_0) = \mathcal{H}(J_m, \lambda')$ . De plus,  $\widetilde{W} \cap K$  est un sous-groupe fini de  $\widetilde{W}$  contenant  $W_0$ : il est donc égal à  $W_0$  et on a en fait  $\mathcal{H}(K, \lambda) = \mathcal{H}(J_m, \lambda')$ . En résumé: il existe un isomorphisme  $\Psi'_0 : \mathcal{H}(W_0) \rightarrow \mathcal{H}(K, \lambda)$  préservant le support (*i.e.* envoyant l'élément  $[w]$  de la base canonique de  $\mathcal{H}(W_0)$  sur une fonction à support dans  $\overline{J}w\overline{J}$ ) dont l'isomorphisme  $\Psi$  du diagramme commutatif ci-dessus est un prolongement. On déduit de tout ceci et de la présentation de Bernstein et Zelevinski (voir [Lu]) que le diagramme de l'hypothèse (H) est vérifié pour  $(\overline{J}, \lambda)$ . Revenons maintenant à  $(J, \tau)$ : par construction, on a des isomorphismes canoniques et préservant le support entre  $\mathcal{H}_G$  et  $\mathcal{H}(G, \lambda)$  ainsi qu'entre  $\mathcal{H}_K$  et  $\mathcal{H}(K, \lambda)$ . On en déduit que le diagramme de (H) est vérifié aussi pour  $(J, \tau)$ . Reste maintenant à examiner l'hypothèse (H<sub>2</sub>).

Soit  $\mathfrak{A}_M$  un ordre héréditaire maximal contenant  $\mathfrak{A}_m$ :  $\mathbf{U}(\mathfrak{A}_M)$  est un sous-groupe parahorique ouvert compact maximal de  $G$ . Appelons  $\overline{G}$  le groupe  $\mathbf{U}(\mathfrak{A}_M)/\mathbf{U}^1(\mathfrak{A}_M) \simeq GL(N, k_F)$  et  $\overline{Q}$  l'image de  $\mathbf{U}(\mathfrak{A}_M) \cap P$  dans  $\overline{G}$  (c'est un sous-groupe parabolique de  $\overline{G}$ ). On note  $L$  l'image réciproque de  $\overline{Q}$  dans  $\mathbf{U}(\mathfrak{A}_M)$ : c'est un sous-groupe parahorique de  $G$ . On a alors les inclusions suivantes

$$J \subset \mathbf{U}(\mathfrak{A}) \subset L \subset K \subset \mathbf{U}(\mathfrak{A}_M)$$

(Remarquons que l'inclusion  $L \subset K$  est une égalité si et seulement si  $(J, \tau)$  est un type maximal).

L'image  $\overline{W_0}$  de  $W_0$  dans  $\overline{G}$  lui est isomorphe et est l'ensemble des permutations des blocs d'un sous-groupe de Levi de  $\overline{Q}$  et se plonge donc dans l'ensemble des représentants «canoniques» des doubles classes de  $\overline{G}$  modulo  $\overline{Q}$  décrit dans [Cas, 1.3.1] par exemple.

Supposons donc que  $w \in W_0$  est tel que  $LwL \cap P \neq \emptyset$ ; alors  $\overline{QwQ} \cap \overline{Q} \neq \emptyset$  et donc  $w=1$ . Cela montre que  $(H_2)$  est vérifiée pour un type simple et son parabolique «subordonné minimal» qui lui est naturellement associé.

Enfin, il est clair que  $(H_4)$  est vérifiée et même mieux : on a en fait ici  $\mathcal{N}_G(\tau_M) = \mathcal{N}_G(M)$ . Tout ceci, sachant que l'hypothèse  $(PP)$  de 2.4 est vérifiée (voir [Vig2]), implique que  $\Phi_{M,P}^G$  est un isomorphisme ainsi que tous ses conjugués par un  $w$  dans le normalisateur de  $M$ . Or, celui-ci, puisque  $M$  est «homogène», agit transitivement sur les sous-groupes paraboliques contenant  $M$ ;  $\Phi$  est donc un isomorphisme pour tout parabolique  $P$  contenant  $M$ .

### 5.3 Types quelconques

On aurait pu travailler directement sur les types semisimples de Bushnell et Kutzko ([BK3]) et démontrer que les hypothèses  $(H_i)$  sont vérifiées. Cependant, le raisonnement suivant utilisant 4.4 permet de s'en passer.

A partir du contexte de 1.8 pour  $G = \mathrm{GL}(N)$ , on appelle  $L$  le plus petit sous-groupe de Levi de  $G$  contenant  $\mathcal{N}_G(\tau_M)$ . On sait alors (voir [BK3]) que  $(J_L, \tau_L)$  est un  $L$ -type simple, donc d'après 5.2, les hypothèses i) et ii) du théorème 4.4.1 sont vérifiées. On sait aussi par [BK3] que l'hypothèse iv) de ce théorème est vérifiée, et par [Vig2], que iii) l'est aussi. On peut donc appliquer le théorème 4.4.1.

### 5.4 Conséquence

**THÉORÈME 5.4.1.** – *La catégorie  $\mathrm{Mod}_{\mathbb{F}_1}(\mathrm{GL}(N))$  est noethérienne et l'induction parabolique respecte la propriété d'être de type fini.*

*Démonstration.* – Voir le rappel des arguments dans l'appendice de M.F. Vignéras □

## Références

- [1] J.N. BERNSTEIN Notes on Harvard Lectures.
- [Be] J.-N. BERNSTEIN AND P. DELIGNE AND D. KAZHDAN AND M.F. VIGNÉRAS. *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*. Travaux en cours. Hermann, Paris 1984.
- [BH] C.J. BUSHNELL AND G. HENNIART *Local tame lifting for  $GL(N)$* . Publ. IHES, 83, pp. 105-233, 1996.
- [BK3] C.J. BUSHNELL AND P.C. KUTZKO. Semisimple types in  $GL(n)$ . Preprint, 1996.
- [BK1] C.J. BUSHNELL AND P.C. KUTZKO. *Smooth representations of reductive  $p$ -adic groups : Structure via types*. Princeton university press, Annals of maths. Studies, No 129, 1993.
- [BK2] C.J. BUSHNELL AND P.C. KUTZKO. *The Admissible Dual of  $GL(n)$  via open compact groups*. To appear in Proc. of L.M.S., 1996.

- [Ca] R. CARTER. Finite groups of Lie type., Wiley Interscience, 1995.
- [Cas] W. CASSELMAN. *Introduction to the theory of admissible representations of  $p$ -adic groups*. Preprint, 1974-1993.
- [Lu] G. LUSZTIG. *Representations of Affine Hecke Algebras*. Asterisque, vol. 171-172, pp. 73-84, 1989.
- [Mo] L. MORRIS. *Tamely Ramified Intertwining Algebras* Invent. Math., vol. 114, pp. 1-54, 1993.
- [Ro] A. ROCHE. *Types and Hecke algebras for principal series representations of split reductive  $p$ -adic groups*. Ann. Sci. de l'ENS, vol. 31, 361-413, 1998.
- [Rog] J.D. ROGAWSKI. *On modules over the Hecke algebra of a  $p$ -adic group*. Invent. Math., vol. 79, pp. 443-465, 1985.
- [Ti] J. TITS. *Reductive groups over local fields*. Proc. Symp. Pure Math., 33, 29-69, 1996.
- [Vig2] M.F. VIGNÉRAS. *Induced  $R$ -representations of  $p$ -adic reductive groups*. Preprint, 1996.
- [Vig1] M.F. VIGNÉRAS. *Représentations  $l$ -modulaires d'un groupe  $p$ -adique avec  $l$  différent de  $p$* . Birkhäuser, Series Progress in Mathematics, 137, 1996.

## Appendice : Représentations de type fini

Par Marie-France Vignéras

Soient  $G$  un groupe localement profini et  $R$  un anneau commutatif. Soit  $\text{Mod}_R(G)$  la catégorie des  $R$ -représentations (lisses) de  $G$ . On dit que  $V \in \text{Mod}_R(G)$  est *noëthérien*, si chaque sous-quotient de  $V$  est de type fini. Un quotient d'une représentation de type fini est évidemment de type fini. Si  $V \in \text{Mod}_R(G)$  contient  $W \in \text{Mod}_R(G)$  tel que  $W$  et  $V/W$  soient noëthériens, alors  $V$  est noëthérien. On dit que la catégorie  $\text{Mod}_R(G)$  est *noëthérienne* si tout  $V \in \text{Mod}_R(G)$  de type fini est noëthérien. Il suffit que toute sous-représentation de toute représentation de type fini soit de type fini. Si  $H \subset G$  est un sous-groupe d'indice fini tel que  $\text{Mod}_R(H)$  est noëthérienne, alors  $\text{Mod}_R(G)$  est noëthérienne.

On suppose désormais que  $G$  est le groupe des  $F$ -points d'un groupe réductif connexe défini sur un corps local non archimédien  $F$ , et que  $R$  est un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique différente de la caractéristique résiduelle de  $F$ .

### A.1 La catégorie $\text{Mod}_R G$ est-elle noëthérienne ?

On conjecture que la réponse est oui. C'est un résultat bien connu et fondamental dans le cas complexe [3, 3.12].

*Variante.* – La propriété est équivalente à chacune des propriétés suivantes :

*Pour tout idempotent  $e$  de la  $R$ -algèbre de Hecke globale  $H := H_R(G)$  de  $G$ , l'anneau  $eHe$  est noëthérien (à gauche ou (et) à droite).*

*Pour tout sous-groupe ouvert compact  $K$  de  $G$  assez petit, la  $R$ -algèbre de Hecke  $H_R(G, K)$  de  $G$  relative à  $K$  est noëthérienne (à gauche ou (et) à droite).*

L'équivalence découle des propriétés suivantes.

1) La catégorie  $\text{Mod}_R G$  est le produit direct des sous-catégories abéliennes  $\text{Mod}_R G(r)$  des représentations de niveau donné  $r$  [1, II.5.8]

$$\text{Mod}_R G = \prod_r \text{Mod}_R G(r).$$

Donc,  $\text{Mod}_R G$  est noethérienne si et seulement si  $\text{Mod}_R G(r)$  est noethérienne pour tout niveau  $r$ .

2) Pour tout niveau  $r$ , il existe un sous-groupe ouvert compact  $K = K(r)$  de  $G$  tel que toute représentation  $V \in \text{Mod}_R G(r)$  est engendrée par ses vecteurs invariants par  $K$ . Cela résulte de [1, II.5.5].

On peut supposer que  $K$  est un pro- $p$ -groupe, donc  $H_R(G, K) \simeq e_K H e_K$  pour un idempotent  $e_K \in H$ . Toutes les représentations  $V$  de niveau  $r$  vérifient  $V = H e_K V$ .

3) Pour tout idempotent  $e \in H$ , une  $R$ -représentation de  $G$  de la forme  $V = H e V \in \text{Mod}_R G$  est de type fini, si et seulement si  $eV$  est un  $eHe$ -module de type fini.

En effet si  $V = H e V$ , des éléments  $(v_i)_{i \in I}$  de  $eV$  engendrent le  $H$ -module  $V$  si et seulement s'ils engendrent le  $eHe$ -module  $eV$ . Si  $V = H e V$  est de type fini, il est engendré par un nombre fini d'éléments que l'on peut prendre dans  $eV$ .

Soit  $Q$  un sous-groupe parabolique de  $G$  de composante de Levi  $M$ ; on dit que  $M$  est un Levi de  $G$ . La restriction parabolique  $r_{Q,G} : \text{Mod}_R(G) \rightarrow \text{Mod}_R(M)$  le long de  $Q$  est exacte et respecte la propriété d'être de type fini [1, II.2.1]. L'induction parabolique  $i_{G,Q} : \text{Mod}_R(M) \rightarrow \text{Mod}_R(G)$  le long de  $Q$ , est exacte et l'on conjecture qu'elle respecte la propriété d'être de type fini (voir le paragraphe A.3). Une représentation de  $G$  qui annule  $r_{Q,G}$  pour tout sous-groupe parabolique propre  $Q$  de  $G$ , est dite cuspidale. Lorsque le groupe dérivé de  $G$  est anisotrope, *i.e.*  $G$  est compact modulo le centre, toute représentation de  $G$  est cuspidale. Lorsque le centre de  $G$  est compact, on sait qu'une représentation cuspidale de type fini est de longueur finie. Ceci résulte de [1, I.7.4, II.2.7, II.5.10]. En général, soit  $Z$  un tore déployé central maximal de  $G$  et soit  $G^\circ$  le sous-groupe de  $G$  engendré par les éléments compacts de  $G$ . Le quotient  $G/G^\circ$  est un groupe abélien libre, et  $G^\circ \cap Z = Z^\circ$  et  $G^\circ Z$  est d'indice fini dans  $G$ . Une représentation de  $G$  est cuspidale si et seulement si sa restriction à  $G^\circ$  est compacte [1, II.2.7].

PROPOSITION A.1.1. – *Soit  $V \in \text{Mod}_R(G)$  cuspidale et de type fini. Alors  $V$  est noethérien. En particulier, la catégorie  $\text{Mod}_R(G)$  est noethérienne si le groupe dérivé de  $G$  est anisotrope.*

Ceci permet une première réduction.

PROPOSITION A.1.2. – *Si pour tout Levi  $M$ , tout  $V \in \text{Mod}_R M$  de type fini, toute sous-représentation cuspidale de  $V$  est de type fini, la catégorie  $\text{Mod}_R(G)$  est noethérienne. En particulier, la catégorie  $\text{Mod}_R(G)$  est noethérienne dans le cas banal [1, II.3.9].*

On est naturellement conduit à la définition suivante :

DÉFINITION A.1.3. – *Un sous-ensemble  $\mathcal{P}$  de  $\text{Mod}_R(G)$  est appelé distingué s'il vérifie les propriétés suivantes : (1) Tout sous-quotient cuspidal d'une représentation de  $\mathcal{P}$  quelconque est de type fini. (2) Tout  $V \in \text{Mod}_R(G)$  de type fini admet une suite de composition finie dont les quotients sont des quotients de représentations de  $\mathcal{P}$ .*

En résumé :

COROLLAIRE A.1.4. – *La catégorie  $\text{Mod}_R(G)$  est noethérienne lorsque  $\text{Mod}_R(M)$  contient un ensemble distingué pour tout Levi  $M$ .*

A.1.5. – Deux sous-ensembles  $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$  de  $\text{Mod}_R(G)$  sont dits *commensurables* si pour toute représentation  $\pi \in \mathcal{P}$ , il existe  $\pi' \in \mathcal{P}'$  telle qu'un multiple fini  $\oplus^r \pi$  soit isomorphe à un multiple fini  $\oplus^{r'} \pi'$ , et inversement. Les propriétés 1) , 2) sont conservées par commensurabilité.

On note  $\mathcal{P}_{\text{cusp}}$  l'ensemble des représentations  $i_{G,Q}(\sigma \otimes \text{ind}_{M,M^\circ} 1)$  pour toute représentation irréductible cuspidale  $\sigma$  de  $M$ , et pour tout parabolique  $Q$ .

PROPOSITION A.1.6. – *Supposons que le nombre de caractères  $\chi : M \rightarrow R^*$  triviaux sur  $M^\circ$  de restriction à  $Z$  fixée, tels que  $i_{G,Q}\sigma\chi$  ait un sous-quotient cuspidal, soit fini. Alors  $i_{G,Q}(\sigma \otimes \text{ind}_{M,M^\circ} 1)$  vérifie (A.1.3-(1)). En particulier, l'unicité du support supercuspidal [1, II.2.6] implique que  $\mathcal{P}_{\text{cusp}}$  vérifie (A.1.3-(1)).*

Un  $R$ -type  $(K, \rho)$  dans  $G$  est une  $R$ -représentation de dimension finie  $\rho$  d'un sous-groupe ouvert compact  $K$  de  $G$ . L'induite à support compact  $\text{ind}_{G,K} \rho$  est de type fini. L'ensemble de toutes les représentations de  $G$  de la forme  $\text{ind}_{G,K} \rho$  vérifient la propriété (A.1.3-(2)). La théorie des types devrait permettre de montrer qu'il contient un sous-ensemble  $\mathcal{P}_{\text{type}}$  vérifiant toujours (A.1.3-(2)) et commensurable à  $\mathcal{P}_{\text{cusp}}$ .

Pour  $G = \text{GL}(n, F)$ , l'ensemble  $\mathcal{P}_{\text{cusp}}$  vérifie (A.1.3-(1)) car l'unicité du support supercuspidal [2, V.4] et la classification des représentations irréductibles cuspidales [1, III.5.10] impliquent que tout  $(Q, M, \sigma)$  vérifie (A.1.6). On a une théorie des types [2, IV]. Soit  $\mathcal{P}_{\text{type}}$  l'ensemble des  $\text{ind}_{G,K} \rho$  pour tous les  $R$ -types  $(K, \rho)$  irréductibles cuspidaux distingués dans  $\text{GL}(n, F)$  (appelés semisimples par Bushnell-Kutzko) [2, IV.3.1].

PROPOSITION A.1.7. – *Soit  $G = \text{GL}(n, F)$ . L'ensemble  $\mathcal{P}_{\text{cusp}}$  vérifie (A.1.3-(1)), et l'ensemble  $\mathcal{P}_{\text{type}}$  vérifie (A.1.3-(2)). Si  $\mathcal{P}_{\text{cusp}}$  et  $\mathcal{P}_{\text{type}}$  sont commensurables, alors la catégorie  $\text{Mod}_R G$  est noethérienne.*

## A.2. Démonstrations

A.2.0. – *Démonstration de A.1.0.* Soit  $e \in H$  un idempotent et soit  $V = HeV \in \text{Mod}_R G$ . On déduit de 3) et de [1, I.6.1] que si  $V$  est noethérien, alors  $eV$  est noethérien, et que si  $eV$  est noethérien, alors les  $H$ -sous-modules  $W$  de  $V$  vérifiant  $W = HeW$  sont de type fini.

Si  $\text{Mod}_R G$  est noethérienne, alors  $eHe$  est noethérienne à gauche pour tout idempotent  $e \in H$ , car si  $M$  est un  $eHe$ -module, alors pour  $V = He \otimes_{eHe} M$ , on a  $eV = M$ ,  $V = HeV$ . Si  $M$  est de type fini,  $V$  est de type fini, donc noethérien, et  $M$  est noethérien.

Par 2), si l'algèbre  $H_R(G, K(r))$  est noethérienne à gauche, la catégorie  $\text{Mod}_R(G)(r)$  est noethérienne. Par 1), si les algèbres  $H_R(G, K(r))$  sont noethériennes à gauche pour tout niveau  $r$ , la catégorie  $\text{Mod}_R G$  est noethérienne.

Pour tout sous-groupe compact  $K$  de  $G$ , l'application  $KgK \rightarrow Kg^{-1}K$  induit un isomorphisme de  $H_R(G, K)$  sur l'algèbre opposée [1, I.8.6.d)], et pour tout idempotent  $e \in H$ , il existe  $K$  tel que  $ee_K = e_K e = e$  [1, I.3.2]. On peut donc remplacer «à gauche» par «à droite».

□

A.2.1. – On choisit, comme on le peut, un sous-groupe  $Z^1$  abélien libre de rang  $r$  tel que  $Z = Z^\circ \times Z^1$ ; ainsi  $G^\circ Z = G^\circ \times Z^1$ . La catégorie des  $R$ -représentations de  $Z^1$  est équivalente à la catégorie des  $R[X_1^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}]$ -modules. On sait que cette catégorie est noethérienne.

Soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $G^\circ$ . La représentation  $\text{ind}_{G^\circ Z, G^\circ} \pi = \pi \otimes \text{ind}_{Z^1, 1} 1$  est noethérienne. Si  $\pi$  est de longueur finie,  $\text{ind}_{G^\circ Z, G^\circ} \pi$  et  $\text{ind}_{G, G^\circ} \pi$  sont aussi noethériennes. La restriction à  $G^\circ$  d'une représentation irréductible  $\pi'$  de  $G$  est de longueur finie, et  $\pi' \otimes \text{ind}_{G, G^\circ} 1$  est noethérienne.

A.2.2. – *Démonstration de A.1.1.* Soit  $V \in \text{Mod}_R G$  cuspidale de type fini. La restriction  $V'$  de  $V$  à  $G^\circ Z$  est de type fini. Si  $V'$  est noéthérienne, alors  $V$  est noéthérienne. Soit  $v_1, \dots, v_r$  engendrant  $V'$ . La représentation  $\pi$  de  $G^\circ$  engendrée par  $v_1, \dots, v_r$  est compacte et de type fini. Elle est donc de longueur finie. La représentation  $V'$  est noéthérienne car c'est un quotient de la représentation noéthérienne  $\text{ind}_{G^\circ Z, G^\circ} \pi$ .  $\square$

*Remarque.* – Des erreurs de transmission entre l'éditeur et l'auteur ont rendu l'énoncé de la proposition [1, I.7.11] incompréhensible. Il doit être remplacé par l'énoncé suivant.

PROPOSITION A.2.3. – *Soit  $R$  un corps, et soit  $G$  un groupe localement profini de centre  $Z$  tel que  $G/Z$  contient un sous-groupe ouvert compact de pro-ordre inversible dans  $R^*$ .*

- 1) *Soit  $V$  une représentation  $Z$ -compacte de type fini de  $G$ . La restriction de  $V$  à  $Z$  est de type fini. Si  $Z$  agit dans  $V$  par un caractère, alors  $V$  est admissible.*
- 2) *Soit  $V$  une représentation  $Z$ -compacte irréductible de  $G$ . Supposons que toute  $R$ -représentation irréductible de  $Z$  est un caractère. Alors  $V$  a un caractère central,  $V$  est admissible,  $\text{End}_{RG} V \simeq R$ , et la contragrédiente  $\tilde{V}$  de  $V$  est  $Z$ -compacte.*
- 3) *Soit  $\omega : Z \rightarrow R^*$  un caractère de  $Z$ . Supposons que  $V$  appartienne à la catégorie  $\text{Mod}_R(G, \omega)$  des  $R$ -représentations de  $G$  de caractère central  $\omega$ , et que  $V$  soit irréductible. Alors  $V$  est projective dans  $\text{Mod}_R(G, \omega)$  et sa contragrédiente  $\tilde{V}$  est irréductible si et seulement si  $V$  est  $Z$ -compacte et a un degré formel sur  $G/Z$ .*

A.2.4. – *Démonstration de A.1.2.* On suppose, comme on le peut par A.1.1, que le rang du groupe dérivé de  $G$  est  $n > 0$ . Le rang du groupe dérivé d'un sous-groupe de Levi propre  $M$  de  $G$  est  $< n$ . Par induction sur le rang, on suppose que  $\text{Mod}_R(M)$  est une catégorie noéthérienne pour tout  $M$ .

Soit  $V \in \text{Mod}_R(G)$  de type fini. Alors  $V$  est noéthérien si et seulement si toute filtration croissante  $(V_i)_{i \geq 0}$  de  $V$  est stationnaire. Par hypothèse de récurrence, la filtration  $(r_{Q, G} V_i)_{i \geq 0}$  est stationnaire pour tout sous-groupe parabolique propre  $Q$  de  $G$ . Modulo  $G$ -conjugaison, le nombre de  $Q$  est fini. On peut donc supposer que  $(r_{Q, G} V_i)_{i \geq 0}$  est constant pour tout sous-groupe parabolique propre  $Q$  de  $G$ . Donc  $V_i/V_o$  est cuspidale pour tout  $i$ . La représentation  $(\cup_i V_i)/V_o$  est une sous-représentation cuspidale de la représentation  $V/V_o$  de type fini. Elle est de type fini par hypothèse, noéthérienne par (A.1.1), donc  $(V_i)_{i \geq 0}$  est stationnaire.  $\square$

**A.2.5** Soit  $\pi \in \text{Mod}_R M$  de longueur finie, alors la représentation  $V = i_{G, Q}(\pi \otimes \text{ind}_{M, M \cap G^\circ} 1)$  est noéthérienne.

En effet,  $\text{ind}_{M, M \cap G^\circ} 1$  relevée trivialement à  $Q$  est contenue dans  $\text{ind}_{Q, Q \cap G^\circ} 1$  (elle même contenue dans la restriction à  $Q$  de  $\text{ind}_{G, G^\circ} 1$ ). La représentation  $i_{G, Q} \pi$  est de longueur finie [1, II.5.13]; la représentation  $i_{G, Q} \pi \otimes \text{ind}_{G, G^\circ} 1$  est donc noéthérienne (A.2.1). Elle contient  $V$ , et  $V$  est donc noéthérienne.

Le groupe  $M^\circ$  est contenu dans  $G \cap M^\circ$ . Un caractère  $\chi$  de  $G \cap M^\circ$  trivial sur  $M^\circ$  s'étend en un caractère  $\tilde{\chi}$  du groupe  $M/M^\circ \simeq Z^n$ . La représentation  $i_{G, Q}(\pi \otimes \text{ind}_{M, M \cap G^\circ} \chi) \simeq i_{G, Q}((\pi \otimes \tilde{\chi}) \otimes \text{ind}_{M, M \cap G^\circ} 1)$  est noéthérienne. Plus généralement, pour toute représentation  $W$  de dimension finie de  $G \cap M^\circ$  triviale sur  $M^\circ$ , la représentation  $i_{G, Q}(\pi \otimes \text{ind}_{M, M \cap G^\circ} W)$  est noéthérienne.

A.2.6. – *Démonstration de A.1.6.* Par hypothèse, il existe une sous-représentation  $Y$  de  $\text{ind}_{M \cap G^\circ, M^\circ} 1$  de quotient de dimension finie  $W$  telle que  $i_{G, Q}(\sigma \otimes \text{ind}_{M, M \cap G^\circ} Y)$  n'a aucun sous-quotient cuspidal. La suite exacte canonique  $0 \rightarrow Y \rightarrow \text{ind}_{M \cap G^\circ, M^\circ} 1 \rightarrow$

$W \rightarrow 0$  reste exacte si on lui applique les foncteurs exacts  $\text{ind}_{M, M \cap G^\circ}$ ,  $\sigma \otimes_R -$ ,  $i_{G, Q}$  [1, I.I.5.10]. On obtient une suite exacte :

$$0 \rightarrow i_{G, Q}(\sigma \otimes \text{ind}_{M, M \cap G^\circ} Y) \rightarrow i_{G, Q}(\sigma \otimes \text{ind}_{M, M^\circ} 1) \rightarrow i_{G, Q}(\sigma \otimes \text{ind}_{M, M \cap G^\circ} W) \rightarrow 0$$

Comme  $i_{G, Q}(\sigma \otimes \text{ind}_{M, M \cap G^\circ} W)$  est noéthérienne (A.2.5), on obtient A.1.6.  $\square$

A.2.7. – *Démonstration de A.1.7.* On sait que la catégorie  $\text{Mod}_R(\text{GL}(n, F))$  est somme directe de ses blocs [2, IV.6.2] ; chaque représentation de  $\mathcal{P}_{\text{type}}$  est contenue dans un bloc, le nombre de représentations de  $\mathcal{P}_{\text{type}}$  contenues dans un bloc donné  $\mathcal{B}$  est fini (modulo isomorphisme), et le bloc  $\mathcal{B}$  est engendré par les représentations de  $\mathcal{P}_{\text{type}}$  qu'il contient.

Soient  $\pi_i = \text{ind}_{G, K_i} \rho_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) les représentations de  $\mathcal{P}_{\text{type}}$  contenues dans  $\mathcal{B}$ . Notons  $K_i^1$  le maximal pro- $p$ -groupe normal dans  $K_i$ . La restriction de  $\rho_i$  à  $K_i^1$  est notée  $\eta_i$ . Une représentation  $V$  dans  $\mathcal{B}$  est engendrée par l'union pour  $1 \leq i \leq r$  de ses éléments  $(\eta_i, K_i^1)$ -invariants. Il existe un partie génératrice  $v_{i, j}$  ( $1 \leq i \leq r$ ,  $j \in J(i)$ ) dans  $V$ , telle que  $v_{i, j}$  soit  $(\eta_i, K_i^1)$ -invariant pour tout  $(i, j)$ . On note  $\rho(i)$  (resp.  $V(i)$ ) la représentation de  $K_i$  (resp. de  $G$ ) engendrée par les  $v_{i, j}$  pour  $j \in J(i)$ . La représentation  $V(i)$  est un quotient de  $\text{ind}_{G, K_i} \rho(i)$ , et  $V$  est un quotient de la somme directe  $\bigoplus_{1 \leq i \leq r} V(i)$ . La représentation  $V$  est quotient de  $\bigoplus_{1 \leq i \leq r} \text{ind}_{G, K_i} \rho(i)$ . Chaque représentation irréductible dans  $\mathcal{B}$  est isomorphe à un quotient d'un  $\pi_i$ . Supposons  $V$  de type fini. Alors on peut choisir les  $J(i)$  finis. Donc les représentations  $\rho(i)$  sont de dimension finie. Si  $\text{ind}_{G, K_i} \rho(i)$  vérifie (A.1.3-(2)) avec  $\mathcal{P}_{\text{type}}$  pour tout  $i$ , alors  $V$  aussi.

Fixons  $i = i_o$ , et notons  $(K_{i_o}, \rho(i_o)) = (K, \rho)$ . La représentation de dimension finie  $(K, \rho)$  est un  $R$ -type distingué dans  $G$ , selon la terminologie de [2, IV.3.1]. Si  $\rho$  est irréductible, alors  $\text{ind}_{G, K} \rho$  est quotient d'une représentation dans  $\mathcal{P}_{\text{type}}$  [2, IV.4]. On suppose donc que  $\rho$  est réductible. On considère une suite de Jordan-Holder  $0 = \rho_o \subset \rho_1 \subset \dots \subset \rho_k = \rho$ , de quotients  $\rho_t / \rho_{t-1}$  ( $1 \leq t \leq k$ ) irréductibles, et automatiquement distingués. L'induction à support compact étant exacte, on a une filtration

$$0 \subset \text{ind}_{G, K} \rho_1 \subset \dots \subset \text{ind}_{G, K} \rho_k = \text{ind}_{G, K} \rho$$

de quotients  $\text{ind}_{G, K}(\rho_t / \rho_{t-1})$ , ( $1 \leq t \leq k$ ). Chacun est quotient d'une représentation dans  $\mathcal{P}_{\text{type}}$ . Donc  $\mathcal{P}_{\text{type}}$  vérifie (A.1.3-(2)).  $\square$

### A.3 L'induction parabolique respecte-t-elle la propriété d'être de type fini ?

On conjecture que oui. C'est vrai dans le cas complexe, et la même démonstration montre que c'est vrai dans le cas banal. Cette seconde question est très liée à la première question.

A.3.1 – Soit  $V \in \text{Mod}_R G$ . Soit  $Q_o$  un sous-groupe parabolique minimal de  $G$  tel que  $r_{Q_o, G} V \neq 0$ . Alors  $r_{Q_o, G} V$  est cuspidal. Soit  $V'$  le noyau de l'homomorphisme canonique  $V \rightarrow (i_{G, Q_o} \circ r_{Q_o, G}) V$ . Alors  $r_{Q_o, G} V' = 0$ , et  $r_{Q, G} V' \subset r_{Q, G} V$  pour tout sous-groupe parabolique  $Q$  de  $G$ . On recommence avec  $V'$  et on obtient une filtration finie de  $V$  telle que les quotients se plongent dans des représentations  $i_{G, Q} W$  paraboliquement induites de cuspidales  $W \in \text{Mod}_R M$ .

Si  $V$  est noéthérien, alors  $V'$  et  $r_{Q_o, G} V$  sont de type fini. Les représentations cuspidales  $(M, W)$  sont de type fini, donc noéthériennes (A.1.1). En appliquant ceci à  $V \in \text{Mod}_R M$

de type fini, et en utilisant la transitivité de l'induction parabolique, on en déduit : «*Supposons que  $\text{Mod}_R M$  est naïthérien pour tout Levi  $M$  de  $G$ . Si l'induction parabolique d'une représentation cuspidale de type fini quelconque est de type fini, l'induction parabolique respecte la propriété d'être de type fini.*»

A.3.2. – Les induites paraboliques des représentations cuspidales de type fini sont de type fini lorsque pour tout Levi  $M$  de  $G$ , on a les propriétés suivantes.

(1) Il existe un ensemble de types irréductibles distingués dans  $M$  dits *maximaux cuspidaux*, tels que toute représentation cuspidale de type fini  $W$  de  $M$  admet une suite de composition finie dont les quotients sont des quotients de représentations de la forme  $\text{ind}_{M, K_M} \rho_M$  pour des types maximaux cuspidaux  $(K_M, \rho_M)$  de  $M$ .

(2)  $i_{G, Q} \text{ind}_{M, K_M} \rho_M$  est de type fini pour tout type cuspidal  $(K_M, \rho_M)$  de  $M$ , et tout sous-groupe parabolique  $Q$  de  $G$  de composante de Levi  $M$ . Cette propriété est vérifiée si les types maximaux cuspidaux  $(K_M, \rho_M)$  de  $M$  se prolongent en des types  $(K, \rho)$  de  $G$  tels que pour tout sous-groupe parabolique  $Q$  de  $G$  de composante de Levi  $M$ ,

$$\text{ind}_{G, K} \rho \simeq i_{G, Q} \text{ind}_{M, K_M} \rho_M.$$

PROPOSITION A.3.3. – *Si pour tout Levi  $M$  de  $G$ , la catégorie  $\text{Mod}_R M$  est naïthérienne et les propriétés (A.3.2) sont vérifiées, l'induction parabolique respecte la propriété d'être de type fini.*

PROPOSITION A.3.4. –  $\text{GL}(n, F)$  vérifie la propriété (A.3.2-(1)) pour les types maximaux cuspidaux définis en [2, IV.1].

*Démonstration.* – Soit  $V \in \text{Mod}_R \text{GL}(n, F)$  cuspidale de type fini. Comme en (A.2.7), on se ramène à  $V$  cuspidale engendrée par un type distingué  $(K, \rho)$ . Si  $\rho$  est irréductible,  $V$  contient une représentation du support cuspidal de  $\rho$ , et tout type distingué cuspidal contenu dans  $V$  est maximal. Par construction du support cuspidal [2, IV.4],  $\rho$  est maximal cuspidale. Si  $V$  n'est pas irréductible, le même raisonnement montre que toute sous-représentation irréductible de  $\rho$  est maximal cuspidal. Les types maximaux cuspidaux contenus dans  $\rho$  engendrent une sous-représentation  $V_1$  de  $V$ . Le quotient  $V/V_1$  est cuspidal, et engendré par l'image de  $\rho$ . L'image de  $\rho$  dans  $V/V_1$  est un type distingué de dimension strictement plus petite que celle de  $\rho$ . Par induction, on obtient (A.3.2-(1)).  $\square$

Donc pour  $\text{GL}(n, F)$ , la propriété (A.3.2-(2)) implique que l'induction parabolique respecte la propriété d'être de type fini.

## Références

- [1] VIGNÉRAS M.-F. *Représentations  $\lambda$ -modulaires d'un groupe réductif  $p$ -adique*. Birkhäuser PM 137, 1996.
- [2] VIGNÉRAS M.-F. *Induced  $R$ -representations of  $p$ -adic groups*. Preprint MPI 1996. A paraître dans *Selecta Mathematica*.
- [3] BERNSTEIN J.-N. *Le centre de Bernstein*. Rédigé par Deligne P. dans J.N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, M.-F. Vignéras. *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*. Travaux en cours, Hermann Paris 1984.