

---

# ORIENTATION, LOI DE GROUPE FORMEL; TRANSFERTS, DUALITÉ.

*par*

Frédéric Déglise

---

## 1. Introduction

Dans la catégorie  $DM_{gm}(k)$ ,  $k$  un corps parfait, le triangle de Gysin est induit par l'isomorphisme de pureté. Celui-ci calcule le motif d'un schéma lisse  $X$  à support dans un sous-schéma fermé  $Z$ , défini comme un cône

$$M(X - Z) \rightarrow M(X) \rightarrow M_Z(X) \rightarrow M(X - Z)[1].$$

Dans le cas où  $Z$  est lisse, de codimension pure  $n$  dans  $X$ . On peut construire un isomorphisme canonique  $M_Z(X) \rightarrow M(Z)(n)[2n]$ , qui donne donc lieu à un triangle

$$M(X - Z) \rightarrow M(X) \xrightarrow{i^*} M(X)(n)[2n] \xrightarrow{\partial_{X,Z}} M(X - Z)[1].$$

J'ai commencé l'étude de ce triangle dans ma thèse en 2002. Ainsi, le morphisme de Gysin  $i^*$  se comporte, dualement, comme le morphisme  $i_* : CH^*(Z) \rightarrow CH^*(X)$ . On obtient ainsi une formule de projection, une formule d'excès d'intersection...

J'ai étendu le travail de ma thèse en montrant notamment la functorialité du morphisme de Gysin. Ceci permet par exemple d'associer à tout morphisme projectif  $f : Y \rightarrow X$  de dimension relative  $n$  un morphisme  $f^* : M(X) \rightarrow M(Y)(-n)[-2n]$ . Pour cela, on choisit une factorisation de  $f$

$$Y \xrightarrow{i} \mathbb{P}(E) \xrightarrow{p} X$$

et l'on pose  $f^* = i^*p^*$ . Le seul problème est de définir  $p^*$ .

Or,  $p_* : CH^*(\mathbb{P}(E)) \rightarrow CH^*(X)$  est, à travers le théorème du fibré projectif, la projection canonique. Exploitant l'isomorphisme canonique  $M(\mathbb{P}(E)) = \bigoplus_{i \leq N} M(X)(i)[2i]$ , on définit  $p^* : M(X) \rightarrow M(\mathbb{P}(E))(-n)[-2n]$  comme le morphisme d'inclusion canonique.

Je vais expliquer comment généraliser ce travail dans deux directions : tout d'abord, en travaillant sur une base quelconque  $S$  et aussi en raisonnant avec une généralisation des motifs qui apparait naturellement si l'on veut considérer la K-théorie entière ou encore le cobordisme algébrique.

**1.1. Une axiomatique.** — On fixe une base  $S$  noethérienne. Tous les schémas considérés sont munis d'une structure de  $S$ -schéma sous-jacente et ils admettent un fibré en droite ample.

On note  $\mathcal{P}_S$  la catégorie des couples  $(X/A)$  où  $X$  est un  $S$ -schéma lisse et  $A$  est un sous-schéma de  $X$  lisse sur  $S$ . On suppose donné une catégorie triangulée monoïdale  $\mathcal{T}$  munie d'un foncteur (covariant)  $M : \mathcal{P}_S \rightarrow \mathcal{T}$ . On pose  $M(X/\emptyset) = M(X)$ . Si  $Z$  est un sous-schéma fermé de  $X$ , on pose  $M_Z(X) = M(X/X - Z)$ . Pour un  $S$ -schéma  $X$  pointé par un  $S$ -morphisme  $S \xrightarrow{x} X$ , on pose  $\tilde{M}(X) = M(X/x(S))$ . On pose encore  $\mathbb{1}(1) = \tilde{M}(\mathbb{P}_S^1)$ .

On demande les axiomes suivants :

1. (Htp)  $M(\mathbb{A}_X^1) \rightarrow M(X)$  est un isomorphisme.
2. (Kun)  $M(X/U) \otimes M(Y/V) = M(X \times_S Y/X \times_S V \cup U \times_S Y)$ , pour  $U \subset X$  et  $V \subset Y$  ouverts. De plus,  $M(S)$  est l'objet unité de  $\mathcal{T}$ .
3. (Stab)  $\mathbb{1}(1)$  est inversible pour  $\otimes$ .
4. (Exc)  $M_T(V) \rightarrow M_Z(X)$  est un isomorphisme pour  $f : V \rightarrow X$  étale tel que  $f^{-1}(T) \rightarrow Z$  est un isomorphisme topologique.
5. (Loc) Pour tout  $(X/A)$ , il existe un triangle distingué canonique

$$M(A) \rightarrow M(X) \rightarrow M(X/A) \xrightarrow{\partial_{X/A}} M(A)[1]$$

pour lequel les deux premier morphismes sont induits par la variance naturelle. Ce triangle est fonctoriel.

6. (Orientation) Pour tout schéma lisse  $X$ , il existe un morphisme canonique

$$c_1 : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(M(X), \mathbb{1}(1)[2])$$

naturel en  $X$  et tel que, si  $\lambda$  est le fibré en droite canonique sur  $\mathbb{P}_S^1$ , le morphisme  $c_1(\lambda) : M(\mathbb{P}_S^1) \rightarrow \tilde{M}(\mathbb{P}_S^1)$  est la projection canonique.

Remarquons qu'à tout objet  $\mathbb{E}$  de  $\mathcal{T}$ , tout schéma lisse  $X$  et tout couple d'entiers  $(n, p)$ , sont associés les groupes de cohomologie et homologie suivants :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{n,p}(X) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(M(X), \mathbb{E}(p)[n]), \\ \mathbb{E}_{n,p}(X) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbb{1}(p)[n], \mathbb{E} \otimes M(X)).\end{aligned}$$

L'axiome (Kun) permet de définir un produit extérieur. Si  $X$  est un schéma lisse,  $\delta : X \rightarrow X \times_S X$  sa diagonale, d'après (Kun), on obtient un morphisme  $\delta_* : M(X) \rightarrow M(X) \otimes M(X)$ . Pour deux morphisme  $x : M(X) \rightarrow \mathbb{E}(n)[p]$  et  $x' : M(X) \rightarrow \mathbb{E}(m)[q]$ , on notera simplement

$$x \boxtimes x' = (x \otimes x') \circ \delta_*.$$

Dans le cas où  $\mathbb{E} = \mathbb{1}$ , on note les groupes précédents  $H^{n,p}$  et  $H_{n,p}$ . Le produit défini ci-dessus définit un cup-produit sur  $H^{**}$ . On pose  $A = H^{**}(S)$ . C'est donc un anneau bigradué. Remarquons qu'on obtient aussi, d'après l'axiome (Stab),  $A = H_{**}(S)$ . La bigraduation correspondante est appelée homologique, alors que la précédente est appelée cohomologique. Pour tout schéma lisse, le groupe bigradué  $\mathbb{E}^{**}(X)$  (resp.  $\mathbb{E}_{**}(X)$ ) est naturellement un  $A$ -module bigradué pour la bigraduation cohomologique (resp. homologique).

**Remarque 1.** — Un exemple de catégorie  $\mathcal{T}$  est bien sûr donné par la catégorie  $DM_{gm}(k)$ . On peut prolonger la définition de cette catégorie sur une base noethérienne quelconque – travail en cours avec Cisinski. On remarquera que dans le cas de  $DM_{gm}(S)$  l'application  $c_1$  est un morphisme de groupe.

Un exemple plus intéressant pour nous est obtenu en considérant le spectre de cobordisme algébrique défini par Voevodsky. C'est un objet en anneau, et on peut considérer la catégorie des modules sur cet anneau, *au sens dérivé*. On obtient une catégorie triangulée satisfaisant les axiomes ci-dessus et telle que la cohomologique fondamentale  $H^{**}$  est le cobordisme algébrique. Dès lors, l'application  $c_1$  n'est plus du tout un morphisme de groupe.

## 2. Orientation, loi de groupe formel

**2.1. Théorème du fibré projectif.** — Le théorème suivant est notre point de départ. Il utilise tous les axiomes énoncés précédemment à l'exception notable de (Stab).

**Théorème 1.** — Soit  $X$  un schéma lisse et  $E/X$  un fibré vectoriel de rang  $n$ . Posons  $P = \mathbb{P}(E)$ , et considérons  $\lambda$  le fibré en droite canonique,  $p : P \rightarrow X$  la projection. Alors, le morphisme suivant :

$$\sum_{0 \leq i < n} p_* \boxtimes c_1(\lambda)^i : M(P) \rightarrow \bigoplus_{0 \leq i < n} M(X)(i)[2i]$$

est un isomorphisme.

La démonstration de ce théorème est classique. On se réduit aisément au cas d'un fibré trivial. Ce cas n'est toutefois pas évident et utilise de manière essentielle l'axiome (Kun).

Ainsi,  $H^{**}(P)$  est un  $H^{**}(X)$ -module libre de base  $1, c, \dots, c^n$ . Utilisant la méthode de Grothendieck, on définit les classes de Chern par la relation :

$$\sum_{0 \leq i \leq n} c_i(E) \cdot (-c_1(\lambda))^{n-i}.$$

Dans notre cas, le signe est essentiel.

Ces classes vérifient toutes les propriétés habituelles des classes de Chern excepté le fait que  $c_1$  n'est pas nécessairement additive.

**2.2. Lois de groupe formel.** — Considérons le ind-schéma

$$\dots \rightarrow \mathbb{P}_S^n \rightarrow \mathbb{P}_S^{n+1} \rightarrow \dots$$

noté  $\mathbb{P}_S^\infty$ . On pose encore  $H^{**}(\mathbb{P}_S^\infty) = \varprojlim_n H^{**}(\mathbb{P}_S^n)$  de sorte que le théorème du fibré projectif implique  $H^{**}(\mathbb{P}_S^\infty) = A[[c]]$ .

Les plongements de Segre induisent un morphisme

$$\sigma : \mathbb{P}_S^\infty \times_S \mathbb{P}_S^\infty \rightarrow \mathbb{P}_S^\infty.$$

Le théorème du fibré projectif montre que  $H^{**}(\mathbb{P}_S^\infty \times_S \mathbb{P}_S^\infty) = A[[x, y]]$ . Dès lors, le morphisme  $\sigma^*$  en cohomologie correspond à une série formelle

$$F(x, y) = \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j \in A[[x, y]]$$

où  $a_{ij}$  est de bidegré cohomologique  $(-2(i+j), -(i+j))$ . Suivant Quillen,

**Lemme 2.1.** — 1.  $F(x, y)$  est une loi de groupe formel à coefficients dans  $A$ .

2. Soit  $X$  un schéma lisse (admettant un fibré ample). Alors, pour tout fibré en droite  $L/X$ ,  $c_1(L)$  est nilpotent. Pour tous fibrés en droite  $L$  et  $M$  sur  $X$ ,

$$c_1(L \otimes M) = F(c_1(L), c_1(M)).$$

Si  $n$  est un entier, on notera  $[n]_F.x$  la série formelle en  $x$  telle que

$$[n]_F.x = F(x, F(x, \dots))$$

où le symbole  $F$  apparaît  $n - 1$  fois.

### 3. Pureté et triangle de Gysin

**3.1. Définition.** — En utilisant l'espace de déformation au cône normal et le théorème du fibré projectif, on obtient pour toute immersion fermée  $i : Z \rightarrow X$  de codimension  $n$  entre schémas lisses un isomorphisme de pureté

$$M_Z(X) \rightarrow M(Z)(n)[2n].$$

Le théorème du fibré projectif intervient naturellement comme on se restreint au cas de

$$M_Z(\mathbb{P}(N_Z X \oplus 1)) = M(\mathbb{P}(N_Z X \oplus 1)/\mathbb{P}(N_Z X))$$

par excision. On en déduit un triangle de Gysin

$$M(X - Z) \rightarrow M(X) \xrightarrow{i^*} M(Z)(n)[2n] \xrightarrow{\partial_{X,Z}} M(X - Z)[1]$$

**3.2. Défauts dans la formule de projection.** — Un des résultats nouveaux de notre théorie est l'étude de la functorialité de ce triangle. Considérons un carré commutatif de schémazs lisses

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{j} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

avec  $i$  immersion fermée codimension  $n$   
 resp.  $j$  immersion fermée codimension  $m$   
 et telle que  $f^{-1}(X - Z) = Y - T$ .

Appliquant la functorialité de la suite de localisation, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
M(Y) & \xrightarrow{j^*} & M(T)(m)[2m] & \xrightarrow{\partial_{Y,T}} & M(Y-T)[1] \\
f_* \downarrow & & \downarrow (f,g)_! & & \downarrow h_* \\
M(X) & \xrightarrow{i^*} & M(Z)(n)[2n] & \xrightarrow{\partial_{X,Z}} & M(Y-Z)[1]
\end{array}$$

qui traduit non seulement une formule de projection généralisée mais un analogue pour le morphisme résidu.

**Théorème 2.** — *Considérons les hypothèses précédentes.*

1. *Excès d'intersection.* Supposons  $T = Z \times_X Y$ . Soit  $e = n - m$ ,  $\xi = g^* N_Z X / N_T Y$ .  
Alors,  $(f, g)_! = g_* \boxtimes c_e(\xi)(m)[2m]$ .
2. *Ramification.* On suppose les conditions suivantes sont satisfaites :
  - (a)  $n = m$ .
  - (b) Soit  $T' = Z \times_Y X$ ,  $T' = \bigcup_{i \in I} T'_i$  la réunion des composantes connexes de  $T'$ . On suppose que pour tout  $i \in I$ , il existe un entier  $r_i$  tel que la multiplicité géométrique de toute composante irréductible de  $T'_i$  est  $r_i$ .

Le morphisme canonique  $T \rightarrow T'_i$  est un épaississement. On note  $g_i$  la restriction de  $g$  à la composante connexe de  $T$  correspondant à  $T'_i$ .

Alors,  $(f, g)_! = \sum_{i \in I} [r_i]_F \cdot g_{i*}(n)[2n]$ ,

où  $[r_i]_F$  est considéré comme un endomorphisme de  $\mathbb{1}(n)[2n]$  obtenu en tronquant la série formelle  $[r_i]_F \cdot x$  pour un ordre suffisamment grand.

Pour une immersion fermée  $i : Z \rightarrow X$  entre schémas lisses, le morphisme  $i^*$  de Gysin induit en cohomologie

$$i_! : H^{**}(Z) \rightarrow H^{**}(X).$$

Classiquement, on pose  $\eta_X(Z) = i_!(1)$ , classe fondamentale de  $Z$  dans  $X$ .

La formule précédente s'interprète classiquement comme suit :

Soit  $Z, Y \subset X$  des sous-schémas fermés lisses s'intersectant proprement. Soit  $T = Z \cap Y$  et  $T = T'_{red}$ . On suppose que  $T$  est lisse. Sous les hypothèses du deuxième point du théorème précédent,

$$\eta_X(Z) \cup \eta_X(Y) = \sum_i [r_i]_F \cdot \eta_X(T_i).$$

#### 4. Transferts et dualité

**4.1. Rappels sur la dualité formelle.** — Dans une catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ , on dit qu'un objet  $M$  est fortement dualisable si

1. le foncteur  $M \otimes .$  admet un adjoint à droite,  $\underline{\mathrm{Hom}}(M, .)$ .
2. Pour tout objet  $N$ , le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}(M, \mathbb{1}) \otimes N \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(M, N)$$

est un isomorphisme.

De manière équivalente, on peut demander l'existence d'un objet  $M^\vee$  et de morphisme  $\mu : M \otimes M^\vee \rightarrow \mathbb{1}$ , et  $\eta : \mathbb{1} \rightarrow M^\vee \otimes M$  qui font de  $M^\vee \otimes .$  l'adjoint à droite de  $M \otimes .$  Dans ce cas bien sûr,  $M^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}(M, \mathbb{1})$  est le dual fort de  $M$ .

Soit  $f : M \rightarrow N$  un morphisme entre objets fortement dualisables. Le dual de  $f$  est le morphisme

$${}^t f : N^\vee \rightarrow M^\vee \otimes M \otimes N^\vee \rightarrow M^\vee \otimes N \otimes N^\vee \rightarrow M^\vee.$$

**4.2. Espace projectif et classes de cobordisme.** — Dans la catégorie des motifs purs, le morphisme de Gysin est dual du morphisme standard.

Or, le motif  $M(\mathbb{P}_S^n) = \bigoplus_{i < n} \mathbb{1}(i)[2i]$ , du fait de l'axiome (Stab), est fortement dualisable. Par ailleurs,  $M(\mathbb{P}_S^n)(-n)[-2n]$  en est un dual fort. Tout le problème est de trouver un accouplement de dualité *canonique*.

Considérons  $\delta_n : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$  le morphisme diagonal. Il lui correspond un morphisme de Gysin

$$\delta^* : M(\mathbb{P}^n) \otimes M(\mathbb{P}^n)(-n)[-2n] \rightarrow \mathbb{1}$$

Pour vérifier que c'est un accouplement de dualité, il suffit de montrer que le morphisme induit

$$\phi : M(\mathbb{P}^n)(-n)[-2n] \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(M(\mathbb{P}^n), \mathbb{1})$$

est un isomorphisme. A travers l'isomorphisme du fibré projectif, ce morphisme correspond à une matrice  $(\eta_{i,j}^n)_{0 \leq i,j \leq n}$  à coefficients dans  $A$ . Il résulte des définitions que ces coefficients sont donnés par la classe fondamentale

$$\eta_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n) = \sum_{0 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \cdot c^i d^j$$

où  $c$  (resp.  $d$ ) est la classe de Chern du fibré en droite canonique sur le premier (resp. deuxième) facteur.

**Théorème 3.** — *La matrice de  $\phi$  est de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & a_{1,1} \\ 1 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix}$$

On définit alors  $p^* = {}^t(p_*) : \mathbb{1} \rightarrow M(\mathbb{P}_S^n)$ .

Comme pour la classe fondamentale, on définit la classe de cobordisme de  $\mathbb{P}_S^n/S$  par la formule

$$[\mathbb{P}^n] = p_!(1) \in A^{-2n, -n}.$$

Du théorème précédent, on déduit l'expression suivante

$$[\mathbb{P}^n] = (-1)^n \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{1,1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & a_{1,2} \\ 1 & & & & \vdots \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & & a_{1,n} \end{pmatrix}.$$

C'est l'expression bien connue en topologie grâce au théorème de Myschenko.

**Remarque 2.** — Evidemment, cette étude dans le cas d'une loi de groupe formelle additive est triviale.

**4.3. Transferts.** — On peut alors définir le morphisme de Gysin associé à un morphisme  $f : Y \rightarrow X$  projectif de dimension  $n$  entre schémas lisses en immergeant  $Y$  dans un  $\mathbb{P}_X^N$  pour  $N$  grand

$$f^* : M(Y) \rightarrow M(X)(-n)[-2n].$$

On étend aisément le théorème 2 à ce cas. Notons aussi qu'on obtient la compatibilité du triangle de Gysin au morphisme de Gysin d'un morphisme projectif.

**4.4. Dualité.** — Soit  $X/S$  un schéma projectif lisse,  $p : X \rightarrow S$  et  $\delta : X \rightarrow X \times_S X$  projection et diagonale de  $X/S$ .

On obtient alors des accouplements de dualité :

$$\mu_X : \mathbb{1} \xrightarrow{p^*} M(X)(-n)[-2n] \xrightarrow{\delta_*} M(X)(-n)[-2n] \otimes M(X)$$

$$\epsilon_X : M(X) \otimes M(X)(-n)[-2n] \xrightarrow{\delta^*} M(X) \xrightarrow{p_*} \mathbb{1}.$$

qui font de  $M(X)(-n)[-2n]$  un dual fort de  $M(X)$ . Ces accouplements permettent de retrouver la dualité entre cohomologie et homologie, un des morphisme étant le cap-produit avec la classe fondamentale de  $X$ .

**4.5. Deux formules d'un éclatement.** — A l'aide du formalisme développé précédemment, on peut donner deux formules calculant un éclatement de centre lisse.

Soit  $X$  un schéma lisse,  $Z$  un schéma lisse, fermé de codimension  $n$  dans  $X$ ,  $B$  l'éclatement de  $X$  en  $Z$ ,  $P$  le diviseur exceptionnel. Considérons les morphismes :

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{k} & B & \xleftarrow{l} & B - P \\ p \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow h \\ Z & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & X - Z. \end{array}$$

1. La suite courte

$$0 \rightarrow M(P) \xrightarrow{\begin{pmatrix} p_* \\ k_* \end{pmatrix}} M(Z) \oplus M(B) \xrightarrow{(-i_*, f_*)} M(X) \rightarrow 0$$

est exacte scindée avec pour scindage  $\begin{pmatrix} 0 \\ f_* \end{pmatrix}$ .

2. Soit  $\xi$  le fibré quotient universel sur le fibré projectif  $P/X$ . La suite courte

$$0 \rightarrow M(B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} k^* \\ f^* \end{pmatrix}} M(P)(1)[2] \oplus M(X) \xrightarrow{(p_* \boxtimes c_{n-1}(\xi), -i^*)} M(Z)(n)[2n] \rightarrow 0$$

est exact scindé avec pour pseudo-scindage  $\begin{pmatrix} p^* \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Remarque 3.** — La première formule généralise une formule de Voevodsky dans le cas des motifs sur un corps parfait. La seconde généralise la «formule de l'éclatement» pour les groupes de Chow que l'on peut trouver dans le livre de Fulton.

---

Février 2008

FRÉDÉRIC DÉGLISE,