
THÉORIES DE WEIL MIXTES

par

Frédéric Déglise

Table des matières

1. Introduction	2
1.1. Introduction orale	2
1.2. Notations	3
1.3. Axiomes d'une théorie de Weil mixte	3
2. \mathbb{A}^1 -homologie	5
2.1. Catégorie \mathbb{A}^1 -dérivée effective	5
2.4. Catégorie \mathbb{A}^1 -dérivée stable	6
3. Modules sur une théorie de Weil mixte	9
3.1. Spectre en anneau associé	9
3.3. Théorie de l'orientation	10
3.6. Dualité dans le cas pur	14
3.7. Réalisation homologique	15
3.8. Réalisation des motifs	17
Références	18

1. Introduction

1.1. Introduction orale. — Je présente ici un travail en commun avec Denis-Charles Cisinski (cf [CD07]).

La théorie des motifs purs a été conçue pour expliquer les relations entre les différentes cohomologies de Weil. De ce point de vue, il s'agit de la catégorie abélienne la plus riche à travers laquelle toute théorie de Weil se factorise.

Cette catégorie, très satisfaisante par sa propriété initiale, est encore à l'heure actuelle très mystérieuse. Le programme de Beilinson vise à comprendre cette catégorie par l'introduction de catégories beaucoup plus grosses, suivant l'exemple des faisceaux pervers. Ainsi Beilinson propose d'introduire une catégorie triangulée des motifs mixtes, notée ici $DM(S, R)$, qui contient comme sous-catégorie la catégorie des motifs purs.

Cette approche se justifie par le degré de liberté plus important dont on dispose dans $DM(S, R)$. Comme souvent en mathématiques, la définition en forme de cette catégorie par Voevodsky s'est accompagnée d'une idée nouvelle qui a donné lieu au cadre de la théorie homotopique stable des schémas, catégorie triangulée encore plus grosse que $DM(S, R)$.

En topologie algébrique, la catégorie homotopique stable permet l'étude des cohomologies comme objet *i.e. spectres*. La théorie homotopique stable des schémas livre le même cadre en géométrie algébrique. Ainsi, on est en droit d'attendre que toute cohomologie soit représentable par un spectre. C'est ce qu'on obtient pour les cohomologies de Weil classiques, en les voyant même comme un objet de $DM(S, R)$ - soit conjecturalement un complexe de motifs mixtes⁽¹⁾. Ce résultat a d'heureuses conséquences que j'aimerais vous exposer ici.

⁽¹⁾Pour arriver à ce résultat, on imagine bien que l'on ne peut se contenter des complexes bornés.

1.2. Notations. — On fixe un schéma de base régulier S . Les schémas seront toujours supposés de type fini sur S . On note \mathcal{V} catégorie des S -schémas algébriques affines lisses.

Dans cette introduction, on fixe un corps parfait k et un corps K de caractéristique 0. On se limite au cas $S = \text{Spec}(k)$. On note \mathcal{A}_K la catégorie des K -algèbres différentielles graduées commutatives.

Etant donné un préfaisceau $E : \mathcal{V}^{op} \rightarrow \mathcal{A}_K$, on pose $H^i(X, E) = H^i(E(X))$, $i \in \mathbb{Z}$, $X \in \mathcal{V}$. Ainsi, $H^*(X, E)$ est une algèbre graduée commutative.

Si (X, Z) est un couple formé d'un schéma $X \in \mathcal{V}$ et d'un sous-schéma fermé Z tel que $X - Z \in \mathcal{V}$, on pose :

$$E_Z(X) = \text{Cone}(E(X) \rightarrow E(X - Z))[-1], H_Z^i(X, E) = H^i(E_Z(X)).$$

Le couple (X, Z) est appelé une paire fermée de \mathcal{V} . Le groupe ci-dessus est naturel par rapport aux morphismes (f, g) :

$$\begin{array}{ccc} T \hookrightarrow Y & & \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z \hookrightarrow X & & \end{array}$$

tels que $f^{-1}(X - Z) = Y - T$. On dit que (f, g) est *excisif* si f est étale et g est un isomorphisme.

1.3. Axiomes d'une théorie de Weil mixte. — Les axiomes que nous avons dégagés présentes une similitude presque parfaite avec les axiomes d'Eilenberg-Steenrod :

Définition 1. — Une théorie de Weil mixte est un foncteur $E : \mathcal{V}^{op} \rightarrow \mathcal{A}_K$ tel que :

$$(\text{Dim}) \quad \dim_K H^i(\text{Spec}(k), E) = \delta_0^i$$

$$(\text{Htp}) \quad \dim_K H^i(\mathbb{A}_k^1, E) = \delta_0^i$$

$$(\text{Stab}) \quad \dim_K H^i(\mathbb{G}_m, E) = \delta_0^i + \delta_1^i$$

$$(\text{Exc}) \quad (f, g) \text{ excisif} \Rightarrow (f, g)^* : H_Z^*(X, E) \rightarrow H_T^*(Y, E) \text{ isomorphisme.}$$

$$(\text{Kun}) \quad X, Y \in \mathcal{V}, H^*(X, E) \hat{\otimes}_K H^*(Y, E) \rightarrow H^*(X \times_S Y, E) \text{ isomorphisme.}$$

Exemple 1. — Si $k = K$, le foncteur qui à un schéma affine lisse X associe sa K -algèbre de De Rham est l'exemple le plus immédiat d'une théorie de Weil mixte.

On considèrera aussi dans l'exposé une version affaiblie de la formule de Künneth :

$$(\text{wKun}) \quad X \in \mathcal{V}, Y = \mathbb{A}^1, \mathbb{G}_m, H^*(X, E) \hat{\otimes}_K H^*(Y, E) \rightarrow H^*(X \times_S Y, E) \text{ isomorphisme.}$$

1.4. — Fixons une théorie de Weil mixte E .

On peut étendre $H^*(X, E)$ aux schémas lisses X en posant : $H^*(X, E) = H_{\text{Nis}}^*(X, E)$. On peut aussi attacher canoniquement à $H^*(X, E)$ une cohomologie à support compact $H_c^*(X, E)$ définie pour X lisse munie du morphisme classique $H_c^*(X, E) \rightarrow H^*(X, E)$ qui est un isomorphisme si X est projectif. On peut résumer notre premier théorème comme suit :

Théorème 1. — *La cohomologie définie ci-dessus est de dimension finie sur K — donc en particulier bornée pour la graduation naturelle. Elle est munie d'une classe*

de cycle *canonique, naturelle et compatible au produit*. Le couple (H^*, H_c^*) vérifie la dualité de Poincaré.

On peut même généraliser considérablement la classe de cycles par la propriété suivante (qui permet de déduire le théorème précédent) :

Théorème 2. — *Il existe un foncteur triangulé monoïdal :*

$$R_E : DM_{gm}(k, K) \rightarrow D^b(K)$$

et des identifications naturelles

$$R_E(M(X)^\vee) \simeq R\Gamma_{\text{Nis}}(X, E).$$

Ainsi, les axiomes introduits sur E permettent de dériver les bonnes propriétés de la cohomologie de manière analogue à l'axiomatique d'Eilenberg-Steenrod. On obtient aussi de manière analogue le théorème suivant :

Théorème 3 (Comparaison). — *Soient E, E' des théories de Weil mixtes et $\phi : E \rightarrow E'$ un morphisme de \mathcal{A}_K -préfaisceaux. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\phi_* : H^*(\cdot, E) \rightarrow H^*(\cdot, E')$ est un isomorphisme.
2. Le morphisme induit $H^1(\mathbb{G}_m, E) \rightarrow H^1(\mathbb{G}_m, E')$ est non nul.

On peut même se borner au préfaisceaux E' vérifiant (W1) à (W4) et la formule de Künneth dans le cas $Y = \mathbb{A}^1, \mathbb{G}_m$.

1.5. — Tous ces résultats s'obtiennent dans le cadre de l'homotopie des schémas. Plus précisément, on passe par une catégorie intermédiaire introduite par Morel : la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich sur V \mathbb{A}^1 -localisé, ou plutôt sa version stable : $D_{\mathbb{A}^1}(k, K)$. On peut la penser comme la catégorie « \mathbb{A}^1 -homologique ».

Le point fondamental de la construction consiste à induire à partir de E un monoïde \mathcal{E} dans $D_{\mathbb{A}^1}(k, K)$ au sens strict. On peut alors considérer la catégorie triangulée des \mathcal{E} -modules, $D_{\mathbb{A}^1}(k, \mathcal{E})$. Ils jouent le rôle de systèmes de coefficients attachés à \mathcal{E} . Le résultat à l'origine du théorème de comparaison est le suivant :

Théorème 4. — *Le foncteur*

$$R' : D_{\mathbb{A}^1}(k, \mathcal{E}) \rightarrow D(K), M \mapsto R\text{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, M)$$

est une équivalence de catégories monoïdales symétriques.

Ce théorème est très particulier au fait que l'on s'est placé sur un corps parfait. Sur une base quelconque, il en va tout autrement.

Dans l'exposé qui suit, on travaille avec une base S régulière de dimension finie arbitraire. Beaucoup des résultats obtenus peuvent l'être dans cette généralité là.

2. \mathbb{A}^1 -homologie

2.1. Catégorie \mathbb{A}^1 -dérivée effective. — On note $Sh(\mathcal{V}, K)$ la catégorie des faisceaux Nisnevich de K -espaces vectoriels sur \mathcal{V} . Si X est un schéma lisse, on note $K(X)$ le faisceau de K -modules représenté par X . La catégorie $Sh(\mathcal{V}, K)$ est abélienne de Grothendieck avec pour générateurs les faisceaux représentables. On adopte la définition suivante due à F. Morel :

Définition 2. — La catégorie \mathbb{A}^1 -dérivée (instable) sur S est la catégorie \mathbb{A}^1 -localisée de la catégorie dérivée $D(Sh(\mathcal{V}, K))$. On la note $D_{\mathbb{A}^1}^{eff}(S, K)$.

Le point important dans l'étude de cette catégorie est le fait qu'on peut mettre sur $\text{Comp}(Sh(\mathcal{V}, K))$ une belle catégorie de modèles qui nous permet de voir la catégorie \mathbb{A}^1 -localisée comme une localisation de Bousfield. C'est utile pour obtenir un produit tensoriel et pour stabiliser cette catégorie.

2.2. — Si F est un faisceau de K -modules, on note $S^n F$ (resp. $D^n F$) le faisceau concentré en degré n de valeur F (resp. concentré en degré $[n, n + 1]$ avec pour différentielle non trivial l'identité de X). On définit la classe de flèches Cof comme la plus petite classe stable par pushout, composition transfinie et rétracte, contenant les flèches de la forme

$$S^{n+1}K(X) \rightarrow D^n K(X)$$

induites par l'identité de X pour un schéma X de \mathcal{V} .

On dit qu'un complexe de faisceaux E sur \mathcal{V} est fibrant s'il vérifie la propriété (Excision) des axiomes d'une cohomologie de Weil. D'après un résultat déjà mentionné (essentiellement dû à Morel et Voevodsky), il revient au même de demander que le morphisme canonique

$$H^*(E(X)) \rightarrow H_{\text{Nis}}^*(X, E)$$

est un isomorphisme. On dit qu'un morphisme $f : E \rightarrow E'$ de $\text{Comp}(Sh(\mathcal{V}, K))$ est une fibration si c'est un épimorphisme dans la catégorie des complexes et que son noyau est fibrant.

Proposition 2.1. — *La catégorie $\text{Comp}(Sh(\mathcal{V}, K))$ avec pour équivalences faibles les quasi-isomorphismes, munie des classes de cofibrations et de fibrations ci-dessus est une catégorie de modèles propre cellulaire (au sens de Hirschorn).*

On en déduit ainsi par localisation de Bousfield à gauche, une structure de catégorie de modèles \mathbb{A}^1 -locale sur $\text{Comp}(Sh(\mathcal{V}, K))$ dont la catégorie homotopique est $D_{\mathbb{A}^1}^{eff}(S, K)$. Notons que les complexes \mathbb{A}^1 -fibrants (ie pour la structure \mathbb{A}^1 -localisée) sont les complexes fibrants au sens précédents dont les préfaisceaux de cohomologie (ou ce qui revient au même les préfaisceaux d'hyper-cohomologie Nisnevich) sont invariants par homotopie.

2.3. — On peut définir sur $Sh(\mathcal{V}, K)$ un unique produit tensoriel symétrique tel que

$$K(X) \otimes K(Y) = K(X \times_k Y).$$

On notera particulièrement que pour ce produit tensoriel, les faisceaux $K(X)$ sont plats. Ce produit tensoriel fait de $\text{Comp}(Sh(\mathcal{V}, K))$ une catégorie monoïdale symétrique (fermée) de la manière habituelle. La remarque sur la platitude des générateurs permet essentiellement d'obtenir la proposition suivante :

Proposition 2.2. — *La structure de modèles sur $\text{Comp}(Sh(\mathcal{V}, K))$, ainsi que la structure \mathbb{A}^1 -localisée, fait de cette catégorie une catégorie de modèle monoïdale symétrique, qui vérifie l'axiome du monoïde⁽²⁾*

C'est une des premières vertues de cette structure, puisqu'on en déduit une structure monoïdale symétrique \otimes^L sur $D(Sh(\mathcal{V}, K))$, qui se calcule à l'aide de résolutions cofibrantes.

2.4. Catégorie \mathbb{A}^1 -dérivée stable. — Le morphisme de projection canonique

$$K(\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\pi} K(S) = \mathbb{1}$$

est scindé. On définit le complexe de Tate par la formule :

$$\mathbb{1}(1) = \text{Ker}(\pi)[-1].$$

Si E est un complexe de faisceaux, et $n \geq 0$ un entier, on pose $E(n) = E \otimes K(1)^{\otimes, n}$.

L'étape de stabilisation que l'on va décrire consiste à obtenir la ∞ -catégorie triangulée monoïdale symétrique universelle munie d'un foncteur monoïdal symétrique

$$\Sigma^\infty : D_{\mathbb{A}^1}^{eff}(S, K) \rightarrow D_{\mathbb{A}^1}(S, K)$$

tel que $\Sigma^\infty K(1)$ est inversible.

2.5. — Soit \mathfrak{S}_n le groupe symétrique des permutations d'ordre n . Un spectre de Tate est la donnée d'une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que E_n est un complexe de faisceaux munis d'une action de \mathfrak{S}_n ainsi que d'une suite de morphismes dits de suspension

$$\sigma_n : E_n(1) \rightarrow E_{n+1}, n \geq 0$$

telle que les applications itérées

$$E_n(m) \rightarrow E_{n+m}$$

soit $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ -équivariante pour l'action de \mathfrak{S}_m sur $K(m)$ déduite de la structure symétrique du produit tensoriel. Un morphisme de spectres de Tate est une suite de morphismes de complexes $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont \mathfrak{S}_n -équivariants et compatibles aux applications de suspensions. On note $Sp^{Tate}(\mathcal{V}, K)$ la catégorie des spectres de Tate.

Exemple 2. — Soit E un complexe de faisceaux. Le complexe $E(n)$ est naturellement muni d'une action de \mathfrak{S}_n . Les morphismes de suspensions triviaux en font un spectre de Tate. On a ainsi obtenu un foncteur $\Sigma^\infty : Sh(\mathcal{V}, K) \rightarrow Sp^{Tate}(\mathcal{V}, K)$. On peut voir qu'il est l'adjoint à gauche du foncteur d'évaluation en 0.

⁽²⁾Cela signifie que la classe de flèches stable par pushout et composition transfinie contenant les flèches de la forme $f \otimes E$ pour f une cofibration triviale et E un complexe quelconque est contenue dans la classe des équivalences faibles.

Un autre exemple est donné par le foncteur de décalage. Si (E_n) est un spectre de Tate, on définit le spectre p -décalé comme le spectre E'_* tel que $E'_m = E_{m+p}$ avec l'action induite par l'inclusion $\mathfrak{S}_m \rightarrow \mathfrak{S}_{m+p}$.

Le gros intérêt de considérer la catégorie des spectres symétriques est qu'elle est munie d'une structure monoïdale symétrique telle que Σ^∞ est monoïdal. On peut décrire cette structure monoïdale en décrivant les morphismes de spectres $E_* \otimes E'_* \rightarrow F_*$. Ils correspondent à des collections de morphismes

$$f_{n,m} : E_n \otimes E'_m \rightarrow F_{n+m}$$

qui sont $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ -équivariants.

La proposition suivante se déduit essentiellement du théorème de Hovey [Hovey] :

Proposition 2.3. — *Il existe une structure de catégorie de modèles monoïdale symétrique sur $Sp^{Tate}(\mathcal{V}, K)$ telle que le foncteur Σ^∞ soit un foncteur de Wuillen à gauche et qui fait de la catégorie homotopique correspondante la solution universelle au problème cité plus haut.*

Par ailleurs, cette catégorie de modèles satisfait l'axiome du monoïde.

Le point essentiel est de montrer que la permutation des facteurs sur $K(2)$ est homotope à l'identité (strictement homotope pour les besoins du théorème de Hovey).

Comme en topologie, les objets fibrants pour cette structure sont les spectres de Tate E_* tels que pour tout entier $n \geq 0$, E_n est \mathbb{A}^1 -fibrant et les adjoints des suspensions

$$E_n \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(K(1), E_{n+1})$$

sont des quasi-isomorphismes. On dit que E est un Ω -spectre. Dans ce cas, on peut montrer de plus que pour tout $n \geq 0$,

$$\mathrm{Hom}_{D_{\mathbb{A}^1}(S,K)}(\Sigma^\infty K(X)(-n), E) = \mathrm{Hom}_{D_{\mathbb{A}^1}^{eff}(S,K)}(K(X), E_n).$$

À l'issue de cette construction, on peut donc définir un spectre en anneaux commutatifs comme un monoïde commutatif \mathcal{E} dans la catégorie des spectres de Tate. Des résultats de Schwede et Shipley, il résulte que la catégorie des \mathcal{E} -modules au sens de la catégorie monoïdale $Sp^{Tate}(\mathcal{V}, K)$ est munie d'une structure de catégorie de modèles monoïdale, dont on note simplement $\mathcal{E}\text{-mod}$ la catégorie homotopique. On dispose par ailleurs d'un couple d'adjoints

$$L : D_{\mathbb{A}^1}(S, K) \rightleftarrows \mathcal{E}\text{-mod} : \mathcal{O}$$

induit par le foncteur \mathcal{E} -module libre associé dans la catégorie monoïdale $Sp^{Tate}(\mathcal{V}, K)$. Le foncteur L est en particulier monoïdal symétrique.

2.6. — On introduit quelques notations. Si X est un schéma, on note $\mathcal{E}(X)$ le \mathcal{E} -module libre engendré par $\Sigma^\infty K(X)$. Si $Y \rightarrow X$ est une immersion, on note $\mathcal{E}(X/Y)$ la cofibre homotopique de $\mathcal{E}(Y) \rightarrow \mathcal{E}(X)$.

Si (X, Z) est une paire fermée, on note encore $\mathcal{E}_T(X) = \mathcal{E}(X/X - Z)$. Ce \mathcal{E} -module est naturel par rapport aux morphismes de paires fermées. Notons que la

propriété d'excision qu'on a déjà vu sur les complexes fibrants implique que pour tout morphisme excisif $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$, le morphisme induit

$$\mathcal{E}_T(Y) \rightarrow \mathcal{E}_Z(X)$$

est un isomorphisme.

On en déduit par exemple les isomorphismes :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbb{P}^1/\{0\}) &= \mathcal{E}(\mathbb{P}^1/\mathbb{P}^1 - \{0\}) = \mathcal{E}(\mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1 - \{0\}) = \mathcal{E}(\mathbb{A}^1 - \{0\})[1] = \mathcal{E}(1)[2], \\ \mathcal{E}(\mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1}) &= \mathcal{E}(\mathbb{A}^n/\mathbb{A}^n - \{0\}) = \mathcal{E}(n)[2n]. \end{aligned}$$

3. Modules sur une théorie de Weil mixte

3.1. Spectre en anneau associé. — Considérons $E : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{A}_K$ un préfaisceau satisfaisant tous les axiomes de 1 sauf (Kun) remplacé par (wKun). D'après l'axiome (Exc), E_{Nis} est fibrant. D'après (Htp) et (wKun), il est aussi \mathbb{A}^1 -fibrant. Il en résulte que

$$H^i(X, E) = \text{Hom}_{D_{\mathbb{A}^1}^{\text{eff}}(S, K)}(K(X), E_{\text{Nis}}[i]).$$

De plus, E_{Nis} est naturellement un monoïde dans la catégorie des complexes de faisceaux (on utilise ici que les coefficients forment un corps). Ainsi, la représentabilité de la cohomologie à coefficients dans E dans la catégorie effective est essentiellement gratuite.

3.2. — L'axiome de stabilité permet la représentation dans la catégorie stable. Le problème est de définir un objet canonique. Pour cela, on considère le complexe $\text{Hom}^*(K(1), E)$ de sorte que

$$H^i(\text{Hom}^*(K(1), E)) = \begin{cases} H^1(\mathbb{G}_m, E) & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

car $K(1)$ est cofibrant et E est fibrant. On note L le complexe de faisceaux constant associé à $\text{Hom}^*(K(1), E)$. Il est cofibrant.

On pose $\mathcal{E}_n = \underline{\text{Hom}}(L^{\otimes n}, E)$. Le groupe \mathfrak{S}_n agit sur \mathcal{E}_n à travers l'action de permutation des facteurs sur $L^{\otimes n}$. Pour contruire les morphismes de suspension, on considère le morphisme canonique

$$L \rightarrow \underline{\text{Hom}}(K(1), E) \leftrightarrow K(1) \otimes L \rightarrow E.$$

On en déduit un morphisme canonique

$$K(1) \otimes L \otimes \mathcal{E}_n \rightarrow E \otimes \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$$

où le dernier morphisme est induit par le produit sur E . Comme $\underline{\text{Hom}}(L, \mathcal{E}_n) \simeq \mathcal{E}_{n+1}$, on en déduit par adjonction l'application de suspension σ_n . Le fait que les suspensions soient équivariantes résulte (notamment) de la commutativité de E .

De plus, \mathcal{E} est un monoïde dans la catégorie des spectres de Tate. L'unité $\Sigma^\infty K \rightarrow \mathcal{E}$ est induite par l'unité $K \rightarrow E$. Le produit est donné par les morphismes $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ -équivariants :

$$\underline{\text{Hom}}(L^{\otimes n}, E) \otimes_K \underline{\text{Hom}}(L^{\otimes m}, E) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(L^{\otimes n+m}, E \otimes_K E) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(L^{\otimes n+m}, E).$$

On a donc obtenu un spectre en anneaux qui est commutatif de manière évidente.

Proposition 3.1. — *Le spectre de Tate \mathcal{E} est un Ω -spectre. Toute générateur c de $H^1(\mathbb{G}_m, K)$ induit un isomorphisme $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}(1)$.*

Il en résulte que

$$H^i(X, E) = \text{Hom}_{D_{\mathbb{A}^1}(S, K)}(\Sigma^\infty K(X), \mathcal{E}[i]).$$

La formule de Künneth pour \mathbb{G}_m montre de plus que

$$H^i(X, E)(n) = \text{Hom}_{D_{\mathbb{A}^1}(S, K)}(\Sigma^\infty K(X), \mathcal{E}(n)[i]).$$

Démonstration. — Considérons un élément non nul $c \in H^1(\mathbb{G}_m, E)$. Il correspond à un morphisme $K(\mathbb{G}_m) \rightarrow E$, d'où un morphisme $K(1) \rightarrow E$. On en déduit un morphisme

$$1_E \cup c : E(1) \rightarrow E$$

D'après la formule de Künneth et l'axiome (Stabilité), le morphisme adjoint

$$\tau : E \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(K(1), E)$$

est un quasi-isomorphisme – rappelons que $K(1)$ est cofibrant et E \mathbb{A}^1 -fibrant.

Le choix de c induit de plus un isomorphisme $L \simeq K_S$, faisceau constant concentré en degré 0. On en déduit un isomorphisme $\mathcal{E}_n \simeq E$. De plus, à travers cet isomorphisme l'application de suspension σ_n correspond au morphisme τ .

L'isomorphisme associé à c se déduit du morphisme $1_E \cup c$. \square

Pour simplifier les notations, on pose

$$H^{p,n}(X, \mathcal{E}) = \mathrm{Hom}_{D_{\mathbb{A}^1}(S, K)}(\Sigma^\infty K(X), \mathcal{E}(n)[p]).$$

3.3. Théorie de l'orientation. —

3.3.1. Première classe de Chern. — Soit \mathbb{P}^∞ le ind-schéma obtenu par les inclusions successives :

$$\mathbb{P}^1 \rightarrow \dots \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{n+1} \dots$$

Prenant la limite inductive de $\Sigma^\infty \mathbb{P}^n$ dans $D_{\mathbb{A}^1}(S, K)$, on obtient un objet noté $\Sigma^\infty \mathbb{P}^\infty$. Une orientation du spectre en anneau \mathcal{E} est une classe c dans $H^{2,1}(\mathbb{P}^\infty)$.

Rappelons que dans $D_{\mathbb{A}^1}^{eff}(S, K)$, $K(\mathbb{P}^1) = K \oplus K(1)[2]$. L'unité de \mathcal{E} induit un morphisme canonique $K(1)[2] \rightarrow \mathcal{E}(1)[2]$, qui définit donc une classe canonique $c \in H^{2,1}(\mathbb{P}^1, \mathcal{E})$.

Soit :

- $\iota_{n,m} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m$ inclusion canonique.
- $\sigma_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^{n+m+n+m}$ plongement de Veronese.
- $\sigma^n : (\mathbb{P}^1)^n \rightarrow \mathbb{P}^{2^n-1}$ n -uple plongement de Veronese.

On utilise les faits suivants :

- (a) $\dim_K H^i(K(n), \mathcal{E}) = \delta_0^i$.
- (b) La formule de Künneth est vraie pour un produit de \mathbb{P}^1 .
- (c) Pour tous entiers $0 \leq n \leq m$, $\iota_{n,m} : H^*(\mathbb{P}^m, \mathcal{E}) \rightarrow H^*(\mathbb{P}^n, \mathcal{E})$ est un isomorphisme.
- (d) Considérons un entier $n \geq 2$. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$, l'endomorphisme σ^* de $H^*(\mathbb{P}^n, \mathcal{E})$ obtenu par permutation des facteurs de \mathbb{P}^n est un isomorphisme.

Proposition 3.2. — *Il existe une unique suite $(c_{1,n})_{n>0}$ de classes $c_{1,n} \in H^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(1))$ telles que :*

- (i) $c_{1,1} = c$.
- (ii) $\forall 0 < n \leq m$, $\iota_{n,m}^*(c_{1,m}) = c_{1,n}$.

De plus, les formules suivantes sont vraies :

- (iii) $c_{1,n}^n \neq 0$, $c_{1,n}^{n+1} = 0$.

$$(iv) \forall n, m > 0, \sigma_{n,m}^*(c_{1, nm+n+m}) = \pi_n^* c_{1,n} + \pi_m^* c_{1,m}.$$

$$(v) \forall 0 < n \leq m, \iota_{n,m}^*(c_{1,m}) = c_{1,n}.$$

Démonstration. — L'unicité résulte du point (c).

Pour l'existence, on fait une construction par récurrence. Considérons $n > 1$, et posons $m = 2^n - 1$. Soit $\nu : \mathbb{P}^1 \rightarrow (\mathbb{P}^1)^n, x \mapsto (x, 0, \dots, 0)$. On obtient à permutation près des facteurs une factorisation $\iota_{1,m} = \nu \circ \sigma^n$.

D'après (c), il existe un unique $t \in H^2(\mathbb{P}^m, \mathcal{E}(1))$ tel que $c = \iota_{1,m}^*(t)$. D'après la formule de Künneth (b),

$$H^2((\mathbb{P}^1)^n, \mathcal{E}(1)) = K.u_1 + \dots + K.u_n$$

où $u_i = \pi_i^*(c)$, π_i la projection sur le i ème facteur. Ainsi, $\nu^*(t) = \lambda_1.u_1 + \dots + \lambda_n.u_n$. D'après le choix de t , on obtient $\lambda_1 = 1$. D'après le point (d) $\nu^*(t)$ est invariant par permutation des facteurs, ce qui implique $\lambda_i = 1$ pour tout i .

On en déduit

$$\sigma^{n*}(t^n) = n!u_1 \cdots u_n$$

qui est non nul d'après la formule de Künneth (b), ce qui implique $t^n \neq 0$ – puisque $\iota_{1,m}^*$ est un isomorphisme.

On pose $c_{1,n} = \iota_{n,m}^*(t)$. On en déduit donc (ii) pour cette classe, ce qui prouve l'existence de la suite.

On a obtenu par construction la propriété (iii) pour $c_{1,n}$. On remarque, avec les notations précédentes et par unicité que $t = c_{1,m}$. Dès lors, (iv) se déduit par récurrence de la propriété

$$\sigma^{n*}(c_{1,m}) = \sum_i \pi_i^*(c_{1,1}).$$

□

La suite $(c_{1,n})_{n>0}$ définit dès lors un morphisme canonique dans $D_{\mathbb{A}^1}(S, K)$

$$\Sigma^\infty K(\mathbb{P}^\infty) \xrightarrow{c_1} \mathcal{E}(1)[2].$$

D'après un théorème de Morel, $\Sigma^\infty K(\mathbb{P}^\infty) = B\mathbb{G}_m \otimes K$. On en déduit donc une application naturelle en X

$$c_1 : \text{Pic}(X) = H_{\text{Nis}}^1(X, \mathbb{G}_m) \otimes K \rightarrow H_{\text{Nis}}^2(X, B\mathbb{G}_m \otimes K) \rightarrow H^2(X, \mathcal{E}(1)).$$

La propriété (v) du lemme ci-dessus nous dit que cette application est un morphisme de groupe (la structure de H-groupe sur \mathbb{P}^∞ étant induite par les plongements de Segre).

3.3.2. Théorème du fibré projectif, classes de Chern. — Soit X un schéma lisse, E un fibré vectoriel de rang $n + 1$ sur X , $p : P = \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ le fibré projectif associé à E et λ le fibré canonique inversible sur $\mathbb{P}(E)$ – déterminé de manière unique par la propriété $\lambda \subset p^{-1}(E)$. On considère le morphisme de \mathcal{E} -modules

$$c = c_1(\lambda) : \mathcal{E}(P) \rightarrow \mathcal{E}(1)[2].$$

Pour tout entier $i \in [0, n]$, on en déduit un morphisme

$$p_* \boxtimes c^i : \mathcal{E}(P) \xrightarrow{\delta_*} \mathcal{E}(P) \otimes \mathcal{E}(P) \xrightarrow{p_* \otimes c^i} \mathcal{E}(X)(i)[2i].$$

Théorème 5. — *Le morphisme*

$$\tau_P : \mathcal{E}(P) \xrightarrow{\sum_i p_* \boxtimes c^i} \bigoplus_{i \leq n} \mathcal{E}(X)(i)[2i]$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — En utilisant la functorialité des classes de Chern et le triangle de Mayer-Vietoris, on peut se réduire par induction noethérienne sur X au cas d'un ouvert U tel que $E|_U$ est trivialisable. Le morphisme τ_P ne dépend que de la classe d'isomorphisme de P , donc on peut supposer que $P|_U = \mathbb{P}_U^n$ est trivial. Par définition de τ_P , on est ramené finalement au cas $X = S$, $P = \mathbb{P}^n$. Dans ce cas, $c = c_{1,n}$.

On démontre le résultat par récurrence sur n . Si $n = 1$, la propriété résulte du choix de $c_{1,1}$ — propriété (i) ci-dessus. On considère le morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}(\mathbb{P}^{n-1}) & \xrightarrow{\iota_{n-1,n}} & \mathcal{E}(\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{E}(\mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1}) \xrightarrow{+1} \\ \tau_{n-1} \downarrow & & \tau_n \downarrow & & \downarrow \rho \\ \bigoplus_{i < n} \mathcal{E}(i)[2i] & \longrightarrow & \bigoplus_{i \leq n} \mathcal{E}(i)[2i] & \longrightarrow & \mathcal{E}(n)[2n] \xrightarrow{+1} \end{array}$$

En effet, le carré (1) est commutatif d'après (ii). On en déduit qu'il existe une flèche pointillée faisant commuter le diagramme Or, le morphisme ρ appartient à

$$\mathrm{Hom}_{D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathcal{E})}(\mathcal{E}(\mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1}), \mathcal{E}(n)[2n]) \simeq \mathrm{Hom}_{D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathcal{E})}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = K.$$

Donc, pour voir que ρ est un isomorphisme, il suffit de voir qu'il est non nul. Or, par définition, $\rho \circ \pi$ est le morphisme

$$c_{1,n}^n : \mathcal{E}(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathcal{E}(n)[2n].$$

Il est non nul d'après (iii) ce qui conclut. \square

On en déduit immédiatement le théorème du fibré projectif pour la cohomologie à coefficients dans \mathcal{E} , ce qui permet suivant la méthode de Grothendieck d'en déduire les classes de Chern associé à un fibré vectoriel E de rang n , définies par la relation :

$$\sum_{i=0}^n p^*(c_i(E)) \cdot c_1(\lambda^\vee)^{n-i} = 0$$

dans $H^{2n}(\mathbb{P}(E), \mathcal{E}(n))$.

On déduit facilement la naturalité de ces classes. La formule de Witney pour une suite exacte de fibré vectoriel s'en déduit aussi de manière classique.

3.3.3. Morphismes de Gysin. —

3.4. — Considérons un fibré vectoriel E/X de rang n . On définit l'espace de Thom de E :

$$\mathcal{E}(\mathrm{Th}(E)) = \mathcal{E}(\mathbb{P}(E \oplus 1)/\mathbb{P}(E)).$$

Notons au passage que l'on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\mathcal{E}(\mathrm{Th}(E)) = \mathcal{E}(\mathbb{P}(E \oplus 1)/\mathbb{P}(E \oplus 1) - X) = \mathcal{E}_X(E).$$

D'après le théorème du fibré projectif, le triangle distingué canonique

$$\mathcal{E}(\mathbb{P}(E)) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{P}(E \oplus 1)) \rightarrow \mathcal{E}(\mathrm{Th}(E)) \xrightarrow{+1}$$

est scindé. On définit la classe de Thom de E

$$t(E) = \sum_{i=0}^n c_i(E) \cdot c_1(\lambda^\vee)^{n-i} \in H^{2n}(\mathbb{P}(E \oplus 1), \mathcal{E}(n)).$$

La restriction de cette classe à $\mathbb{P}(E)$ est nulle, par définition. On en déduit un morphisme canonique

$$\bar{t}(E) : \mathcal{E}(Th(E)) \rightarrow \mathcal{E}(n)[2n]$$

qui est un isomorphisme, par une nouvelle application du théorème du fibré projectif.

3.5. — Considérons maintenant une paire fermée (X, Z) telle que Z est lisse. On rappelle le diagramme de déformation suivant :

$$\begin{array}{ccccc} Z & \longrightarrow & \mathbb{A}_Z^1 & \longleftarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{d_1} & B_Z(\mathbb{A}_X^1) & \xleftarrow{d_0} & P_Z X \end{array}$$

où $B = B_Z(\mathbb{A}_X^1)$ désigne l'éclatement de $\{0\} \times Z$ dans \mathbb{A}_X^1 et $P_Z X$ désigne la complétion projective du fibré normal $N_Z X$ de Z dans X . Rappelons que d_1 est l'inclusion de la fibre au-dessus de $\{1\}$ et d_0 est l'inclusion du diviseur exceptionnel. L'immersion de droite est induite par la section nulle de $N_Z X$. Ces carré définissent des morphismes de paires fermées, qui induisent donc des flèches canoniques

$$\mathcal{E}_Z(X) \xrightarrow{d_{1*}} \mathcal{E}_Z(B_Z(\mathbb{A}_X^1)) \xleftarrow{d_{0*}} \mathcal{E}_Z(P_Z X) = \mathcal{E}(Th(N_Z X)).$$

Il résulte de la propriété d'excision que ces morphismes sont des isomorphismes. L'idée est de se réduire au cas où (X, Z) admet une paramétrisation étale, et de là au cas où $X = \mathbb{A}_Z^c$, Z vu par la section nulle. Dans ce cas, on obtient un isomorphisme canonique $B_Z(\mathbb{A}_X^1) - B_Z X = \mathbb{A}_X^1$ est on en déduit la propriété attendue par invariance par homotopie (et excision).

Lorsque la codimension de Z dans X est pure, égale à c , on en déduit donc un isomorphisme dit de pureté :

$$\mathcal{E}_Z(X) \rightarrow \mathcal{E}(Z)(c)[2c].$$

Définition 3. — Soit $i : Z \rightarrow X$ une immersion fermée de codimension pure c entre S -schémas lisses. On définit grâce à l'isomorphisme ci-dessus le triangle de Gysin :

$$\mathcal{E}(X - Z) \rightarrow \mathcal{E}(X) \xrightarrow{i^*} \mathcal{E}(Z)(c)[2c] \xrightarrow{\partial_{X,Z}} \mathcal{E}(X - Z)[1].$$

Le morphisme de Gysin i^* vérifie les propriétés attendues. Notamment, la formule de projection $i^* f_* = g_* k^*$ dans le cas d'un carré transverse

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{k} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{i} & X. \end{array}$$

(ie carré cartésien de schémas lisses tel que la codimension de k soit partout la même que celle de i).

Le point délicat de la théorie est la naturalité du morphisme de Gysin. On l'obtient en considérant un carré cartésien d'immersion fermées

$$\begin{array}{ccc} T & \rightarrow & Y' \\ g \downarrow & & \downarrow \\ Y & \rightarrow & X. \end{array}$$

Posons $Y'' = Y \cup Y'$. On obtient un diagramme de l'octaèdre :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{E}(X - Y'') & \longrightarrow & \mathcal{E}(X - Y) & \longrightarrow & \mathcal{E}\left(\frac{X-Y}{X-Y''}\right) & \longrightarrow & \mathcal{E}(X - Y'')[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}(X - Y') & \longrightarrow & \mathcal{E}(X) & \longrightarrow & \mathcal{E}\left(\frac{X}{X-Y'}\right) & \longrightarrow & \mathcal{E}(X - Y')[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}\left(\frac{X-Y'}{X-Y''}\right) & \longrightarrow & \mathcal{E}\left(\frac{X}{X-Y}\right) & \xrightarrow{(1)} & \mathcal{E}\left(\frac{X/X-Y}{X-Y'/X-Y''}\right) & \xrightarrow{(2)} & \mathcal{E}\left(\frac{X-Y'}{X-Y''}\right)[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}(X - Y'')[1] & \rightarrow & \mathcal{E}(X - Y)[1] & \rightarrow & \mathcal{E}\left(\frac{X-Y}{X-Y''}\right)[1] & \rightarrow & \mathcal{E}(X - Y'')[2], \end{array}$$

Le point est de construire un isomorphisme de pureté supérieur (d'ordre 2!) :

$$\mathcal{E}\left(\frac{X/X - Y}{X - Y'/X - Y''}\right) = \mathcal{E}(c)[2c]$$

tqui soit compatible aux isomorphismes de pureté qu'on peut imaginer dans le diagramme précédent. Par pureté, le carré commutatif (1) donne alors la naturalité du morphisme de Gysin.

3.5.1. Classe de cycles. — Une fois obtenu un morphisme de Gysin pour les immersions fermées, la théorie des λ -opérations permet de construire suivant Grothendieck un caractère de Chern

$$ch : K_0(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^{2*}(X, \mathcal{E}(*))$$

déterminé par la propriété d'être naturel en X et tel que $ch([L]) = \sum_i \frac{1}{i} c_1(L)^i$ pour un fibré en droite L sur X . Ce caractère de Chern est compatible à la graduation, si l'on considère la γ -filtration à gauche.

On en déduit donc un classe de cycles :

$$CH^i(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow H^{2i}(X, \mathcal{E}(i))$$

que l'on vérifie être compatible au pushout pour les immersions fermées.

3.6. Dualité dans le cas pur. — On peut étendre la théorie des morphismes de Gysin à tous les morphismes projectifs entre schémas lisses.

Soit $p : P \rightarrow X$ un fibré projectif de rang n . Le théorème du fibré projectif induit un morphisme canonique

$$p^* : \mathcal{E}(X)(n)[2n] \rightarrow \bigoplus_{i \leq n} \mathcal{E}(X)(n)[2n] \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(P).$$

Si maintenant $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme projectif quelconque, après avoir choisi une factorisation

$$Y \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} X$$

de f , on pose

$$f^* : \mathcal{E}(X)(n)[2n] \xrightarrow{p^*} \mathcal{E}(P) \xrightarrow{i^*} \mathcal{E}(Y)(c)[2c].$$

Ceci définit un morphisme indépendant de la factorisation choisie (par exemple, l'entier $n - c$ est la dimension relative de f indépendant de la factorisation choisie). Il satisfait encore une formule de projection dans le cas transverse. Notons aussi la formule $f^* \otimes g^* = (f \times g)^*$.

Ce morphisme de Gysin, vu de manière interne, est très intéressant car il permet de déduire facilement la dualité forte suivante : Soit $p : X \rightarrow S$ un schéma projectif lisse de dimension pure d , $\delta : X \rightarrow X \times_S X$ la diagonale. On définit des accouplements :

$$\begin{aligned} \mu : M(X) \otimes M(X)(-d)[-2d] &\xrightarrow{\delta^*} M(X) \xrightarrow{p_*} \mathbb{1} \\ \eta : \mathbb{1} &\xrightarrow{p^*} M(X)(-d)[-2d] \xrightarrow{\delta_*} M(X)(-d)[-2d] \otimes M(X). \end{aligned}$$

Ces accouplements font de $\mathcal{E}(X)(-d)[-2d]$ le dual fort de $\mathcal{E}(X)$. Vérifions par exemple que $(\mu \otimes 1) \circ (1 \otimes \eta) = 1$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{E}(X^3) & & \\ & \nearrow^{(1 \times \delta)_*} & & \searrow^{(\delta \times 1)^*} & \\ \mathcal{E}(X) & \xrightarrow{(1 \times p)^*} & \mathcal{E}(X^2) & \xrightarrow{(p \times 1)_*} & \mathcal{E}(X) \\ & \searrow_{\delta^*} & (1) & \nearrow_{\delta_*} & \\ & & \mathcal{E}(X) & & \end{array}$$

Le carré (1) est en effet commutatif d'après la formule de projection. Le chemin du dessous est égal à l'identité par naturalité du morphisme de Gysin. Parcourant ce diagramme commutatif suivant les deux chemins possibles, on obtient la relation attendue.

Si E vérifie la formule de Künneth, on en déduit donc formellement l'accouplement de dualité de Poincaré dans le cas d'un S -schéma projectif lisse.

Remarque 3. — On peut montrer par induction sur le nombre de branche que si X est projectif lisse, et Z est un diviseur qui est localement pour la topologie de Nisnevich une réunion de diviseurs lisses ayant des intersections transverses deux à deux, alors $\mathcal{E}(X - Z)$ admet une dual fort dans $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathcal{E})$.

3.7. Réalisation homologique. — On note $D_{\mathbb{A}^1}^\vee(S, \mathcal{E})$ la sous-catégorie triangulée stable par somme de $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathcal{E})$ engendrée par les objets admettant un dual fort. Notons que $D_{\mathbb{A}^1}^\vee(S, \mathcal{E})$ est en fait une sous-catégorie triangulée monoïdale. De plus, un \mathcal{E} -module dans $D_{\mathbb{A}^1}^\vee(S, K)$ est compact dans $D_{\mathbb{A}^1}^\vee(S, \mathcal{E})$ si et seulement si il est fortement dualisable.

On considère un foncteur, dit de réalisation homologique,

$$R' : D_{\mathbb{A}^1}^\vee(S, K) \rightarrow D(K), M \mapsto \mathrm{RHom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, M).$$

Notons que formellement, ce foncteur est faiblement monoïdal symétrique.

Théorème 6. — *Supposons que E vérifie la formule de Künneth sur S . Alors le foncteur R' est une équivalence de catégories monoïdales symétriques.*

Si $\mathcal{E}(X)$ admet un dual fort, $R'(\mathcal{E}(X)) = R\Gamma(X, \mathcal{E})^$ où le membre de droite est le dual fort du complexe parfait $R\Gamma(X, \mathcal{E})$.*

Démonstration. — On montre d'abord que $R(M \otimes N) = R(M) \otimes R(N)$. Il suffit de la faire lorsque M et N sont compacts dans $D_{\mathbb{A}^1}^{\vee}(S, \mathcal{E})$. Ils admettent donc un dual fort, et leur produit tensoriel aussi. Alors,

$$\begin{aligned} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, M) \otimes R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, N) &\stackrel{(1)}{=} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(M^{\vee}, \mathcal{E}) \otimes R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(N^{\vee}, \mathcal{E}) \\ &= R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(M^{\vee} \otimes N^{\vee}, \mathcal{E}) \\ &= R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}((M \otimes N)^{\vee}, \mathcal{E}) \\ &= R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, M \otimes N) \end{aligned}$$

L'isomorphisme canonique (1) résulte de la formule de Künneth et du fait que les \mathcal{E} -modules $\mathcal{E}(X)$, X lisse, forment un système de générateurs de $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathcal{E})$.

Pour montrer la pleine fidélité, on constate que pour des objets M et N compacts de $D_{\mathbb{A}^1}^{\vee}(S, \mathcal{E})$, on obtient :

$$\begin{aligned} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(M, N) &= R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, M^{\vee} \otimes N) \\ &\stackrel{(2)}{=} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, M^{\vee}) \otimes R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, N) \\ &\stackrel{(2)}{=} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, M)^{\vee} \otimes R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, N) \\ &= R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, M), R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, N)) \end{aligned}$$

où les égalités (2) proviennent du résultat obtenu ci-dessus. Cela suffit pour montrer que R est pleinement fidèle puisque $D_{\mathbb{A}^1}^{\vee}(S, K)$ est engendré par ses objets compacts. La surjectivité essentielle est évidente. \square

Si X est un S -schéma lisse de dimension pure d , on peut alors définir la cohomologie à support compact à coefficients dans E :

$$R\Gamma_c(X, \mathcal{E}(n)) = R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}(X)(n-d)[-2d]).$$

Par définition, on obtient donc :

$$H_c^p(X, \mathcal{E}(n)) = H^p(R\Gamma_c(X, \mathcal{E}(n))) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}(X)(n-d)[p-2d]) =: H_{2d-p}(X, \mathcal{E}(d-n))$$

Le morphisme

$$\mathcal{E}(X) \otimes \mathcal{E}(X)(-d)[-2d] \xrightarrow{\delta^*} \mathcal{E}(X) \xrightarrow{p_*} \mathcal{E}$$

est toujours bien défini et induit un morphisme

$$R\Gamma_c(X, \mathcal{E}(n)) \rightarrow R\Gamma(X, \mathcal{E}(n)).$$

C'est un isomorphisme si X est de plus projectif.

Enfin, on déduit formellement un accouplement

$$H_c^p(X, \mathcal{E}(n)) \otimes H_c^{2d-p}(X, \mathcal{E}(d-n)) \rightarrow K$$

qui est parfait dès que $\mathcal{E}(X)$ admet un dual fort dans $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathcal{E})$.

On peut démontrer que si k est un corps parfait, $D_{\mathbb{A}^1}^{\vee}(k, \mathcal{E}) = D_{\mathbb{A}^1}(k, \mathcal{E})$ ce qui explique le théorème 4.

3.8. Réalisation des motifs. — Comme nous l'avons déjà mentionné, l'isomorphisme τ de permutation des facteurs sur $K(1)[1] \otimes K(1)[1]$ vérifie l'équation $\tau^2 = 1$ dans $D_{\mathbb{A}^1}^{eff}(S, K)$. On note ϵ l'endomorphisme de $\mathbb{1}$ qu'il induit dans $D_{\mathbb{A}^1}(S, K)$. D'après la relation $\epsilon^2 = 1$, on obtient deux projecteurs :

$$e_+ = \frac{1}{2}(1 - \epsilon), \quad e_- = \frac{1}{2}(1 + \epsilon).$$

qui permettent de scinder l'unité de la catégorie monoïdale $D_{\mathbb{A}^1}(S, K) : \mathbb{1} = \mathbb{1}_+ \oplus \mathbb{1}_-$. On en déduit donc un scindage au niveau catégorique :

$$D_{\mathbb{A}^1}(S, K) = D_{\mathbb{A}^1}(S, K_+) \times D_{\mathbb{A}^1}(S, K_-)$$

où $D_{\mathbb{A}^1}(S, K_+)$ (resp. $D_{\mathbb{A}^1}(S, K_-)$) est une sous-catégorie triangulée de $D_{\mathbb{A}^1}(S, K)$ avec pour unité $\mathbb{1}_+$ (resp. $\mathbb{1}_-$) — on fera attention que l'inclusion $D_{\mathbb{A}^1}(S, K_+) \rightarrow D_{\mathbb{A}^1}(S, K)$ est seulement faiblement monoïdale ; par contre, la projection $D_{\mathbb{A}^1}(S, K) \rightarrow D_{\mathbb{A}^1}(S, K_+)$ est monoïdale.

Notons que d'après la propriété (d) que l'on a vu ci-dessus, $\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}$. On en déduit que le foncteur \mathcal{E} -module libre se factorise canoniquement en un foncteur monoïdal :

$$D_{\mathbb{A}^1}(S, K_+) \rightarrow D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathcal{E}).$$

Notons $D_{\mathbb{A}^1}^{\vee}(S, K_+)$ l'image par e_+ de $D_{\mathbb{A}^1}^{\vee}(S, K)$.

On en déduit donc un foncteur canonique monoïdal symétrique

$$R : D_{\mathbb{A}^1}^{\vee}(S, K_+) \rightarrow D_{\mathbb{A}^1}^{\vee}(S, \mathcal{E}) \rightarrow D(K)$$

qui envoie $K_+(X)$ sur $R\Gamma(X, \mathcal{E})^*$ si $K_+(X)$ admet un dual fort.

Pour terminer, on revient à la situation $S = \text{Spec}(k)$, k corps parfait. On utilise les deux résultats suivants :

Théorème 7 (Riou). — *Tout objet compact de $D_{\mathbb{A}^1}(k, K_+)$ admet un dual fort.*⁽³⁾

On en déduit $D_{\mathbb{A}^1}(k, K_+) \simeq D_{\mathbb{A}^1}^{\vee}(k, K_+)$ — car $D_{\mathbb{A}^1}(k, K_+)$ est compactement engendrée.

Théorème 8 (Morel). — *Il existe une équivalence de catégories symétriques monoïdales canonique*

$$D_{\mathbb{A}^1}(k, K_+) \simeq DM(k, K).$$

On en déduit que $DM_{gm}(k, K)$ est une sous-catégorie triangulée monoïdale pleine $D_{\mathbb{A}^1}^{\vee}(k, K_+)$ — c'est même la sous-catégorie des objets fortement dualisables. D'où le foncteur de réalisation attendu.

⁽³⁾Cela démontre le résultat analogue pour $D_{\mathbb{A}^1}(k, \mathcal{E})$.

Références

- [Hovey] M. Hovey, *Spectra and symmetric spectra in general model categories*, J. Pure Appl. Alg., 2001, vol. 165, pp. 63–127.
- [CD07] D.-C. Cisinski and F. Déglise. Mixed weil cohomologies. *arXiv :0712.3291*, 2007.

Février 2009

FRÉDÉRIC DÉGLISE,