

Université Paris Descartes

Document de synthèse
pour l'Habilitation à Diriger des Recherches

Spécialité : Mathématiques

Présentée par Jean-Stéphane DHERSIN

**Quelques propriétés des superprocessus
et
quelques applications à la biologie**

Soutenue publiquement le 8 décembre 2008 devant le jury composé de :

| | |
|--------------------------|------------|
| Jean Bertoin | Rapporteur |
| Mireille Chaleyat-Maurel | |
| Jean-François Le Gall | |
| Sylvie Roelly | Rapporteur |
| Alain Rouault | |
| Anton Wakolbinger | Rapporteur |

Remerciements

C'est avec lui que tout a commencé, et c'est donc lui que je me dois de remercier en premier. Jean-François Le Gall a guidé mes premiers pas, et c'est sans nul doute grâce à lui que j'en suis là aujourd'hui. Toujours disponible, il fait partie de ces gens qui savent transformer l'inabordable en évidence et communiquer leur enthousiasme. Pour tout ce qu'il m'a apporté je le remercie profondément.

Ils ont lu ce mémoire et l'ont évalué. C'est un honneur pour moi que Jean Bertoin, Sylvie Roelly et Anton Wakolbinger aient accepté cette tâche.

Depuis mon arrivée à l'université Paris Descartes, j'ai eu le bonheur de côtoyer Mireille Challeyat-Maurel. Aujourd'hui, elle me fait l'immense joie de faire partie du jury. Passionné dans ses échanges, Alain Rouault est quelqu'un que l'on a toujours plaisir à rencontrer. Je le remercie d'avoir accepté de participer au jury.

Parce que ce fut toujours agréable de travailler avec eux, je remercie chaleureusement mes coauteurs, Romain Abraham, Laure Coutin, Laurent Decreusefond, Jean-François Delmas, Jean-François Le Gall, Laurent Serlet, Arno Siri-Jégousse et Bernard Ycart.

Je ne peux oublier ceux qui font que le laboratoire MAP 5 est ce qu'il est. Nous le devons avant tout à Christine Graffigne, qui l'a créé et dirigé, et à Bernard Ycart pour le rôle important qu'il a tenu lors de son passage à l'Université Paris Descartes. Je remercie enfin l'ensemble des membres du laboratoire et de l'UFR Mathématiques et Informatique pour le plaisir que j'ai à travailler avec eux.

Parce qu'ils partagent mon quotidien, que chaque jour je les chéris encore plus, je terminerai par remercier ceux qui me sont le plus proche. Celle et celui qui jour après jour grandissent un peu plus et dont je suis fier. Celle qui m'aide dans cette mission des plus agréables et me rend la vie si douce.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Présentation | 3 |
| 1 Historique des superprocessus | 5 |
| 2 Serpent brownien, super-mouvement brownien et lien avec certaines EDP | 9 |
| 2.1 Éléments introductifs | 9 |
| 2.2 Solutions positives de l'équation $\Delta u = u^2$ avec explosion au bord du domaine [A1] | 11 |
| 2.3 Test de Kolmogorov pour le super-mouvement brownien [A2, A3] | 15 |
| 2.4 Caractérisation de la G -régularité du super-mouvement brownien [A4] | 17 |
| 2.5 Test de Kolmogorov pour le serpent brownien [A6] | 19 |
| 3 Approche problème de martingales et interactions | 21 |
| 3.1 Calcul stochastique pour le serpent brownien [A5] | 22 |
| 3.2 Super-mouvement brownien avec interactions [A7] | 26 |
| 4 Des probabilités qui s'appliquent à la biologie et à l'épidémiologie | 29 |
| 4.1 Un problème d'urne [A8] | 29 |
| 4.2 Coalescents et évolutions de populations [A9] | 32 |
| 4.3 Modélisation de la diffusion de l'hépatite C dans une population d'usagers de drogue [A10] | 37 |
| Bibliographie | 43 |

Présentation

La présentation des travaux de recherche développés dans ce mémoire se décompose en deux parties. Dans une première partie (chapitres 1,2 et 3), nous étudions les superprocessus de Dawson-Watanabe, objets d'une recherche très active depuis les années 80, en particulier du fait de leur lien avec certaines équations aux dérivées partielles (EDP) semi-linéaires. Le chapitre 1 est consacré à un bref rappel de l'historique de ces superprocessus. Dans le chapitre 2, nous rappelons la construction du super-mouvement brownien à l'aide du serpent brownien de Le Gall. Le serpent brownien se révèle être un puissant outil pour l'étude des EDP liées au super-mouvement brownien. Nous établissons des résultats d'existence des solutions explosives de ces EDP, c'est-à-dire des solutions positives explosant au bord du domaine sur lequel elles sont définies. Ces résultats reposent sur des propriétés trajectorielles du serpent brownien et du super-mouvement brownien, que nous établissons également. Dans le chapitre 3, le super-mouvement brownien, et, plus généralement, les superprocessus, sont vus comme solution d'un problème de martingales. Nous montrons que le serpent brownien peut également se définir à partir d'un problème de martingales, et nous développons un calcul stochastique. En particulier, nous donnons une formule d'Itô pour le serpent brownien. Les résultats sont utilisés pour fournir une preuve directe de la construction du super-mouvement brownien, et de superprocessus plus généraux, à partir du serpent brownien. Les derniers résultats du chapitre 3 sont consacrés à l'étude du super-mouvement brownien avec interactions.

Dans une seconde partie (chapitre 4), nous proposons des applications des probabilités à la biologie et à l'épidémiologie, à travers trois thèmes distincts. Nous présentons dans un premier temps un modèle d'urnes. Dans un deuxième temps, nous étudions le comportement de certains Λ -coalescents, et appliquons les résultats à l'étude de certaines populations d'espèces marines. En particulier nous donnons une première approche pour construire des estimateurs des taux de mutation. Enfin, nous nous intéressons à des problèmes de modélisation de la transmission de l'hépatite C chez les utilisateurs de drogues.

Chapitre 1

Historique des superprocessus

Les superprocessus sont à la base d'une grande partie de mon travail et font l'objet des deux prochains chapitres. Le présent chapitre est consacré à un rapide historique de ces superprocessus.

En 1875, Galton et Watson [134] décrivent l'évolution d'une population à l'aide d'un processus de branchement permettant de déterminer l'extinction ou non des noms dans la noblesse britannique. Ils proposent un modèle simple, où à chaque génération les individus se reproduisent selon une loi commune et de façon indépendante.

En 1951, Feller [53] montre que, convenablement renormalisés en espace-temps, certains processus de Galton-Watson convergent vers une diffusion. Cette diffusion, aujourd'hui appelée diffusion de Feller, constitue le premier exemple d'une classe de processus introduits par Jiřina [71] en 1959 : les processus de branchement à espace d'état continu (CSBP, pour Continuous Space Branching Processes). Ils servent en biologie à modéliser l'évolution de populations. C'est leur propriété de branchement qui fait tout l'intérêt de ces processus : la loi de la somme de 2 CSBP indépendants est celle d'un CSBP partant avec une population initiale composée de la somme des deux populations initiales des 2 CSBP. Utilisant cette propriété, Jiřina montre en particulier que les CSBP sont parfaitement déterminés par leurs transformées de Laplace. Ces CSBP ont été largement étudiés dès la fin des années 50, entre autres par Jiřina [72], Lamperti [82, 81], Silverstein [122] ou Watanabe [131].

En 1968, Watanabe [130] a l'idée d'étudier le comportement d'un processus de Galton Watson dont les particules se déplacent. Il établit que, correctement renormalisé, ce processus converge vers un processus aléatoire continu $(X_t, t \geq 0)$, à valeurs dans l'espace $M_F(\mathbb{R}^d)$ des mesures finies sur \mathbb{R}^d , qui sera appelé super-mouvement brownien. Il explicite la transformée de Laplace de $(X_t, t \geq 0)$ qui en caractérise la loi. Pour toute mesure finie μ sur \mathbb{R}^d , et pour toute fonction f de classe C^∞ positive, le super-mouvement

brownien issu de la mesure μ vérifie :

$$\mathbb{E}_\mu[\exp - \int f(x) X_t(dx)] = \exp - \int v(t, x) \mu(dx), t \geq 0,$$

où v est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta v - 2v^2. \quad (1.1)$$

En 1975, Dawson [31] montre que le super-mouvement brownien fait partie d'une classe plus générale de processus, les superprocessus, qu'il définit comme solutions de problèmes de martingales bien posés. Les superprocessus prennent alors le nom de processus de Dawson-Watanabe.

Dès le milieu des années 1980, une activité de recherche très importante s'organise autour de ces superprocessus. À cela plusieurs raisons.

La première est que les superprocessus sont liés à une version plus générale de l'équation parabolique (1.1) et à sa version elliptique, déjà très étudiées par les analystes. Dynkin, Le Gall et Kuznetsov ont apporté un regard probabiliste qui a permis de grandes avancées. Nous reviendrons un peu plus loin sur cette problématique.

Une deuxième raison tient à l'intérêt que les superprocessus présentent pour la modélisation en biologie. Comme nous l'avons vu, ils apparaissent de façon naturelle dans la modélisation de l'évolution d'une population avec déplacement spatial. Afin de mieux refléter la réalité, des modèles plus complexes ont été développés, tenant compte en particulier de l'interaction entre les différents individus. En effet, les déplacements spatiaux de chaque individu, de même que leur loi de reproduction, sont influencés par la présence d'autres individus. On obtient alors des superprocessus avec interactions (voir Perkins [113] par exemple). Un autre type d'interactions est donné par les superprocessus avec catalyse. Ce domaine a été, et est encore, extrêmement actif. Nos travaux n'étant pas en rapport avec ce type de processus, nous n'entrons pas davantage dans les détails, et renvoyons par exemple à [79] pour un article de revue sur la question.

Une troisième raison tient au fait que les superprocessus apparaissent également comme processus limites d'autres processus (voir l'article de revue de Slade [123]). C'est en particulier le cas pour le modèle du votant (voir [39, 110]), le processus de contact (voir [39]), le modèle de Lotka-Volterra pour la compétition entre espèces (voir [29]), la percolation orientée (voir [125]), certains systèmes de diffusions en interactions (voir [30]) ou les cartes planaires aléatoires (voir [27]). Ils sont également liés à d'autres types de modélisations de populations, comme les processus de Fleming-Viot (voir

[112]), ou encore aux processus de coalescences, que nous évoquerons plus loin (voir [112, 14]).

Les superprocessus sont présentés au début de chacun des deux prochains chapitres de manières différentes selon le type d'approche nécessaire. Ainsi la première présentation est faite de manière trajectorielle au travers du serpent brownien de Le Gall, parfaitement adapté à l'étude des équations différentielles associées. La seconde présentation est celle introduite par Dawson, où les superprocessus sont décrits à partir de problèmes de martingales.

Ce n'est pas l'objet ici que de faire le point sur l'ensemble des connaissances concernant les superprocessus. Nous nous limitons à ce qui est nécessaire compte tenu des travaux présentés, ainsi qu'aux extensions qu'ils ont permises. Pour plus de détails, on se référera à l'abondante littérature sur le sujet. On peut citer entre autres les deux cours de l'école d'été de Saint Flour de Dawson [33] et Perkins [111], ainsi que les ouvrages ou les monographies de Duquesnes et Le Gall [37], Dynkin [43, 44], Etheridge [49], ou Le Gall [86, 87, 88].

Chapitre 2

Serpent brownien, super-mouvement brownien et lien avec certaines EDP

L'ensemble des travaux présentés dans ce chapitre repose sur une relation existant entre les superprocessus et certaines équations aux dérivées partielles semi-linéaires. Ces EDP apparaissent déjà dans la caractérisation du super-mouvement Brownien donnée par Watanabe [130] à l'aide de transformées de Laplace, mais c'est Dynkin [41] qui le premier met pleinement en évidence le rôle des superprocessus dans la résolution d'EDP. Dans ce qui suit, nous nous limitons au cas du super-mouvement brownien, même si les travaux de Dynkin reposent sur une classe plus large de superprocessus, liés à une classe un peu plus générale d'EDP semi-linéaires. Dans un premier temps, nous construisons le super-mouvement brownien à partir du serpent brownien de Le Gall. La raison principale de ce choix est que l'expression des solutions des EDP que nous allons étudier est particulièrement simple. Une autre raison est que cette approche trajectorielle permet une bonne visualisation du super-mouvement brownien.

2.1 Éléments introductifs

Le serpent brownien a été introduit par Le Gall [83] en 1991. La présentation que nous faisons ici est rapide, et l'on pourra se référer à [86] pour plus de détails. Nous notons \mathcal{W} l'espace des trajectoires arrêtées à valeurs dans \mathbb{R}^d , c'est-à-dire l'ensemble des couples (w, ζ) où $\zeta \geq 0$ est appelé temps de vie de la trajectoire et $w : [0, \zeta] \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une application continue. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous notons w pour le couple (w, ζ) . Nous notons

$\hat{w} = w(\zeta)$ la valeur terminale de la trajectoire w . Si $x \in \mathbb{R}^d$, nous notons \tilde{x} la trajectoire de temps de vie nul telle que $\tilde{x}(0) = x$.

Le serpent brownien est un processus de Markov à valeurs dans \mathcal{W} . Si nous notons (W_s, ζ_s) le serpent brownien à l'instant $s > 0$, sa loi est caractérisée de la façon suivante : le processus des temps de vie $(\zeta_s, s \geq 0)$ est un mouvement brownien réel réfléchi en 0. Conditionnellement au processus $(\zeta_s, s \geq 0)$, le processus $(W_s, s \geq 0)$ est encore markovien (inhomogène), et ses noyaux de transition sont donnés par : si $0 \leq s \leq s'$,

- les deux trajectoires W_s et $W_{s'}$ coïncident jusqu'au temps $m(s, s') = \inf \{\zeta_r, s < r < s'\}$;
- la trajectoire $(W_{s'}(m(s, s') + t) - W_{s'}(m(s, s')), 0 \leq t \leq \zeta_{s'} - m(s, s'))$ est un mouvement brownien de \mathbb{R}^d (arrêté) indépendant de la trajectoire W_s .

Si $w \in \mathcal{W}$, \mathbb{P}_w désigne la loi du serpent brownien issu de la trajectoire w . Si $w = \tilde{x}$, on note $\mathbb{P}_x = \mathbb{P}_{\tilde{x}}$. Nous notons L_s^t le temps local du processus des temps de vie $(\zeta_s, s \geq 0)$ au niveau t et à l'instant s , et $\tau_1 = \inf \{s \geq 0; L_s^0 = 1\}$.

Si μ désigne une mesure de probabilité sur un espace mesuré E et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive ou bornée, on note :

$$\langle \mu, f \rangle = \int_E f(x) \mu(dx)$$

l'intégrale de f par rapport à la mesure μ .

Pour tout $t \geq 0$, on définit la mesure aléatoire X_t par : si $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable bornée, alors :

$$\langle X_t, \varphi \rangle = \int_0^{\tau_1} \varphi(\hat{W}_s) d_s L_s^t. \quad (2.1)$$

Le processus $(X_t, t \geq 0)$, à valeurs dans l'espace $M_F(\mathbb{R}^d)$ des mesures finies sur \mathbb{R}^d , est alors sous $\mathbb{P}_x, x \in \mathbb{R}^d$, le super-mouvement brownien issu de la masse de Dirac δ_x . En fait, cette construction du super-mouvement brownien permet de retrouver le processus, mais également son passé. C'est le processus historique (voir [35]) $(H_t, t \geq 0)$, défini par :

$$\langle H_t, \Phi \rangle = \int_0^{\tau_1} \Phi(W_s) d_s L_s^t,$$

pour les fonctions Φ mesurables bornées. Pour être tout à fait rigoureux, il convient de souligner que, pour des raisons de normalisation, ce processus diffère d'un facteur d'échelle du processus historique de [35].

La trajectoire \tilde{x} est récurrente pour le serpent brownien, ce qui permet de définir la mesure d'excursion \mathbb{N}_x du serpent brownien en dehors de x .

La loi des trajectoires sous \mathbb{N}_x peut également être vue comme celle d'un serpent brownien dont le processus des temps de vie aurait pour loi celle des excursions d'un mouvement brownien réel en dehors de 0. Nous notons σ la longueur de l'excursion.

En 1991, Dynkin [41] introduit la mesure de sortie d'un ouvert $D \subset \mathbb{R}^d$ pour le super-mouvement brownien. Elle peut être vue de la façon suivante. Si $\tau_s = \inf \{t \geq 0; W_s(t) \notin D\}$ désigne le temps de sortie de D par la trajectoire W_s (avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$), on définit le temps local de sortie de D pour le serpent brownien par :

$$L_s^D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \mathbf{1}_{\{\tau_r < \zeta_r < \tau_{r+\varepsilon}\}} dr.$$

La mesure de sortie X^D est alors définie en substituant L_s^D à L_s^t dans (2.1) :

$$\langle X^D, \varphi \rangle = \int_0^{\tau_1} \varphi(\hat{W}_s) dL_s^D. \quad (2.2)$$

Si D est un domaine régulier et si $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction positive continue sur le bord du domaine D , alors l'unique solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 4u^2 & \text{dans } D \\ u_{\partial D} = f \end{cases}$$

est donnée par :

$$u(x) = -\log \mathbb{P}_x(\exp - \langle X^D, f \rangle) = \mathbb{N}_x \left(1 - \exp - \langle X^D, f \rangle \right),$$

où la définition de X^D sous \mathbb{N}_x est analogue à celle donnée par 2.2 en remplaçant τ_1 par la durée σ de l'excursion.

La caractérisation des solutions de l'équation semi-linéaire $\Delta u = u^2$, et plus généralement des équations $\Delta u = u^p$, fait l'objet d'une littérature abondante et constitue encore un domaine de recherche très actif. Parmi les auteurs, on trouve les approches probabilistes de Dynkin, Kuznetsov, Le Gall et Mselati, et celles analytiques de Marcus et Véron. Pour de plus amples détails sur les résultats, on pourra consulter Marcus et Véron [94, 95, 97, 100], Mselati[105], Dynkin [44, 45] et Le Gall [89].

2.2 Solutions positives de l'équation $\Delta u = u^2$ avec explosion au bord du domaine [A1]

Cette section reprend les résultats obtenus avec Le Gall dans [A1]. La motivation initiale de ce travail était la caractérisation des domaines D de

\mathbb{R}^d contenant des solutions explosives de

$$\Delta u = u^2, \quad (2.3)$$

c'est à dire des solutions positives u sur D explosant au bord du domaine : pour tout $x \in \partial D$,

$$\lim_{D \ni y \rightarrow x} u(y) = +\infty.$$

Les premières études de solutions explosant au bord du domaine remontent à Keller [74] et Osserman [107] pour des équations du type $\Delta u = f(u)$, sous certaines conditions sur la fonction f et sur la régularité de D . En particulier, ils obtiennent que si D est régulier, alors (2.3) admet au moins une solution explosive. Loewner et Nirenberg [92] étudient pour leur part ces solutions pour l'équation :

$$\Delta u = u^{(d+2)/(d-2)}.$$

Leur motivation vient des liens existant entre cette équation et la géométrie différentielle conforme.

Les problèmes d'existence et d'unicité des solutions explosives ont été largement étudiés par les analystes, pour l'équation (2.3), et plus généralement pour l'équation

$$\Delta u = u^p, \quad (2.4)$$

sans que la réponse à la caractérisation des ensembles admettant des solutions explosives ne puisse être donnée. On peut se référer à la monographie de Véron de 1996 [128] et aux références qu'elle contient pour avoir un aperçu des connaissances des analystes sur le sujet à ce moment là.

Un autre problème important pour les analystes est la caractérisation de singularités éliminables, c'est-à-dire des ensembles K tels que toute solution de l'équation (2.3) (ou (2.4)) sur $\mathbb{R}^d \setminus K$ se prolonge en une solution sur \mathbb{R}^d (voir [9]). Le cas des points (encore appelés singularités éliminables isolées) a été résolu dans les années 1980. Il a été montré que les points sont des singularités éliminables pour l'équation (2.4) si et seulement si $d \geq 2p/(p-1)$ (voir [24, 91, 127] ou encore [128, Chap. 2.2]). En particulier, les points sont des singularités éliminables pour (2.3) si et seulement si $d \geq 4$, ce qui implique l'absence de singularité éliminable si $d \leq 3$.

En passant à la limite dans (2.2), Dynkin [41] montre que la solution positive maximale de (2.3), ou plus exactement de :

$$\Delta u = 4u^2,$$

sur un domaine D est donnée par

$$u_M(x) = -\log \mathbb{P}_x(\mathcal{R}^X \subset D) = \mathbb{N}_x(\mathcal{R}^* \cap D^c \neq \emptyset),$$

où $\mathcal{R}^X = \{\hat{W}_s; 0 \leq s \leq \tau_1, \zeta_s > 0\}$ et $\mathcal{R}^* = \{\hat{W}_s; 0 \leq s \leq \sigma, \zeta_s > 0\}$.

Ainsi, les ensembles polaires pour le super-mouvement brownien, c'est-à-dire ceux qu'il ne visitera jamais, correspondent aux singularités éliminables pour l'équation (2.3).

Perkins [108] et Dynkin [41] caractérisent les ensembles polaires pour le super-mouvement brownien. Comme nous l'avons dit, en dimension plus petite que 3, les points, et par là même tous les ensembles non vides, sont non polaires. En dimension $d \geq 4$, Perkins et Dynkin montrent que les ensembles polaires sont ceux de capacité nulle, pour une certaine capacité. La capacité en question peut être définie de la façon suivante : pour $a \geq 0$, et F un borélien de \mathbb{R}^d , on pose :

$$\text{cap}_a(F) = \left(\inf \left(\iint \nu(dy)\nu(dy')\psi_a(y, y') \right) \right)^{-1},$$

où l'infimum est pris sur toutes les mesures de probabilité portées par F et

$$\psi_a(y, y') := \begin{cases} 1 + \log_+ \frac{1}{|y - y'|} & \text{si } a = 0 \\ |y - y'|^{-a} & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

Les ensembles polaires pour le super-mouvement brownien en dimension d sont alors les ensembles $A \subset \mathbb{R}^d$ tels que $\text{cap}_{d-4}(A) = 0$.

Dans [A1], nous raffinons ce résultat, en montrant que la probabilité d'atteinte d'un ensemble est de l'ordre de cette capacité. Plus précisément, nous montrons que si $d \geq 4$, il existe deux constantes α et β telles que, si F est un borélien de \mathbb{R}^d contenu dans la boule $B(0, 1/2)$ et si $|x| \geq 1$, alors :

$$\alpha \frac{|x|^{-2} \text{cap}_0(F)}{1 + \log |x| \text{cap}_0(F)} \leq \mathbb{N}_x(\mathcal{R}^* \cap F \neq \emptyset) \leq \beta \frac{|x|^{-2} \text{cap}_0(F)}{1 + \log |x| \text{cap}_0(F)} \text{ si } d = 4 \quad (2.5)$$

$$\alpha |x|^{2-d} \text{cap}_{d-4}(F) \leq \mathbb{N}_x(\mathcal{R}^* \cap F \neq \emptyset) \leq \beta |x|^{2-d} \text{cap}_{d-4}(F) \text{ si } d \geq 5. \quad (2.6)$$

Dans les inégalités précédentes, la quantité $\mathbb{N}_x(\mathcal{R}^* \cap F \neq \emptyset)$ peut aussi être remplacée par $\mathbb{P}_x(\mathcal{R}^X \cap F \neq \emptyset)$.

La partie majoration de ce résultat est démontrée par des arguments purement analytiques, inspirés de ceux de Baras et Pierre [6] (arguments qui avaient également été utilisés par Dynkin [41] pour obtenir la condition nécessaire de non polarité), en utilisant les liens entre le serpent brownien et l'équation (2.3). À cela s'ajoutent des arguments de calcul stochastique.

Pour la partie minoration, nous construisons des fonctionnelles additives pour le serpent brownien. Ces fonctionnelles additives sont à relier à la théorie

des fonctionnelles additives pour des processus de Markov généraux (voir [22, 40, 55]).

Nous fixons $x \in \mathbb{R}^d$. La loi du serpent Brownien issu de $w \in \mathcal{W}_x$ tué quand il atteint la trajectoire triviale \tilde{x} est notée \mathbb{P}_w^* . Nous considérons alors le processus de Markov $(W_s, s \geq 0)$ sous \mathbb{P}_w^* tué quand il atteint \tilde{x} , dont nous notons U le noyau potentiel. Si on note \mathcal{W}_x^* l'ensemble des trajectoires non triviales de \mathcal{W}_x , et $w \in \mathcal{W}_x^*$, une expression explicite de $U(w, dw')$ est donnée par Le Gall [85]. Nous définissons l'énergie d'une mesure finie μ sur \mathcal{W}_x^* par :

$$\mathcal{E}(\mu) = \int U(w, \mu) \mu(dw).$$

Alors pour toute mesure μ sur \mathcal{W}_x^* d'énergie finie, il existe une fonctionnelle additive $(A_s, s \geq 0)$ du serpent brownien tué telle que :

- (i) $\mathbb{E}_w^*[A_\infty] = U(w, \mu)$ p.p. ;
- (ii) pour toute fonction borélienne positive f sur \mathcal{W}_x^* ,

$$\mathbb{N}_x \left(\int_0^\infty f(W_s) dA_s \right) = \langle \mu, f \rangle ;$$

- (iii) $\mathbb{N}_x(A_\infty^2) = 2\mathcal{E}(\mu)$.

Si K est un borélien de \mathbb{R}^d , pour une mesure μ dépendant de K convenablement choisie, nous minorons $\mathbb{N}_x(\mathcal{R}^* \cap K)$ en fonction de $\mathbb{N}_x(A_\infty)$ et $\mathbb{N}_x(A_\infty^2)$, puis nous majorons cette dernière quantité en fonction de $\text{cap}_{d-4}(K)$. Cela nous permet d'obtenir la partie minoration de (2.5) et (2.6).

Ces fonctionnelles additives ont également été utilisées par la suite par Mselati [106] pour la caractérisation des solutions de (2.3) à l'aide de la trace fine.

Une première conséquence de ce résultat est la caractérisation des points super-réguliers. De même que l'on peut définir la régularité classique, associée à l'équation $\Delta u = 0$, à l'aide du mouvement brownien (voir par exemple [65]), nous disons que le point $x \in \mathbb{R}^d$ est super-régulier pour un borélien F de \mathbb{R}^d si $\mathbb{P}_x(\tau_F = 0) = 1$, où $\tau_F = \inf \{t \geq 0, \text{Supp}(X_t) \cap F \neq \emptyset\}$ est le premier instant où le support de X_t touche F . Nous montrons que x est super-régulier pour F si et seulement si $\mathbb{N}_x(\mathcal{R}^* \cap F \neq \emptyset) = +\infty$. En combinant ce résultat au précédent, nous pouvons en déduire un test de super-régularité du type test de Wiener (nommé ainsi en référence aux travaux initiaux de Wiener [138, 137] pour l'équation $\Delta u = 0$) :

- si $d \leq 3$, \bar{F} est l'ensemble des points super-réguliers de F ;
- si $d \geq 4$, x est super-régulier pour F si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(d-2)} \text{cap}_{d-4}(F_n(x)) = +\infty, \quad (2.7)$$

où $F_n(x) = \{y \in F; 2^{-n} \leq |y - x| < 2^{-n+1}\}$.

Une seconde conséquence qui découle directement des liens entre le super-mouvement brownien et les solutions de (2.3) est la caractérisation des solutions explosives de (2.3). Si D est un ouvert de \mathbb{R}^d , et $x \in \partial D$, on a l'équivalence entre :

(i) il existe au moins une solution positive de $\Delta u = u^2$ sur D telle que

$$\lim_{D \ni y \rightarrow x} u(y) = +\infty;$$

(ii) $d \leq 3$ ou $d \geq 4$ et (2.7) est vérifié pour $F = D^c$.

La caractérisation des domaines pour lesquels il y a existence de solutions explosives a été étendue pour l'équation (2.4) en 2003 par Labutin [80] pour tous les paramètres $p > 1$, sous la forme d'un test de Wiener du même type. En 2007, Marcus et Véron [99] ont caractérisé les points du bord du domaine en lesquels les solutions explosent en termes de potentiel capacitaire.

Le problème de l'unicité de la solution explosive n'est pas à l'heure actuelle complètement résolu. Des réponses partielles sont données en termes de capacité. Dans le cas de (2.3), une réponse est donnée par Le Gall [86]. Dans le cas de (2.4), des réponses sont données par Marcus et Véron [93, 99].

2.3 Test de Kolmogorov pour le super-mouvement brownien [A2, A3]

Nous avons vu dans la section précédente que l'étude de l'explosion de solutions positives de l'équation elliptique (2.3) était étroitement liée à celle du serpent brownien ou du super-mouvement brownien. Il en est de même pour l'équation parabolique associée :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta v = 2v^2. \quad (2.8)$$

C'est Dynkin [43] qui le premier en a fait la remarque. Il définit le graphe du super-mouvement brownien issu de la masse de Dirac δ_x au temps t par

$$\mathcal{G} = \cup_{s>t} \{ \{s\} \times \text{Supp}(X_s) \}$$

et montre [43, Theorem II.4.2] que la solution positive maximale de (2.8) dans un ouvert Q est donnée par :

$$v_M(t, x) = -\log \mathbb{P}_{t, \delta_x}(\mathcal{G} \subset Q),$$

où \mathbb{P}_{t, δ_x} désigne la loi du super-mouvement brownien issu de la masse de Dirac δ_x à l'instant t . Dynkin introduit alors la notion de G -régularité, analogue

parabolique de la notion de super-régularité vue dans la section précédente : un point (t, x) est G -régulier pour Q si $\mathbb{P}_{t, \delta_x}(\mathcal{G} \subset Q) = 0$; il montre [43, Theorem II.6.1] qu'un point $(t, x) \in Q$ est G -régulier si et seulement si v_M tend vers $+\infty$ en (t, x) .

De façon heuristique, on aura G -régularité de (t, x) si le super-mouvement brownien issu de δ_x au temps t sort immédiatement de Q . Une première question naturelle est donc de se demander comment évolue le processus

$$R_t = \sup \{|y|, y \in \text{Supp}(X_t)\}$$

pour un super-mouvement brownien issu de δ_0 , ce qui correspond au rayon de la plus petite boule centrée en 0 qui contient le support à l'instant t . Tribe [124] avait montré que, presque sûrement,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{R_t}{2t \log(1/t)} = 1. \quad (2.9)$$

Ce résultat a été amélioré par Dawson et al. [34] (voir également [36]). Avec Le Gall [A2], nous cherchons à déterminer les fonctions g telles que pour t suffisamment petit, $R_t < g(t)$. Plus précisément, si h est une fonction positive décroissante définie sur $(0, +\infty)$, nous montrons qu'il y a équivalence entre :

- (i) $\int_{0^+} \frac{dt}{t^2} h(t)^{d+2} \exp -\frac{h(t)^2}{2} < \infty$;
- (ii) presque sûrement, il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \in (0, t_0]$, $R_t < \sqrt{t} h(t)$.

Les liens établis avec la solution maximale de (2.8) permettent également de dire que les conditions précédentes sont équivalentes à :

- (iii) il existe une solution positive de $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta u = 2u^2$ dans D_h , telle que

$$\lim_{D_h \ni (t,x) \rightarrow (0,0)} u(t, x) = \infty,$$

où $D_h = \{(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d; |x| < \sqrt{t} h(t)\}$.

Ce type de condition est à rapprocher du test de Kolmogorov pour le mouvement brownien (voir [28] ou [65]).

L'idée de la preuve est d'obtenir de bonnes estimations de $\mathbb{N}_0(\sup_{1 \leq t \leq 2} \frac{R_t}{\sqrt{t}})$. On parvient alors à conclure en appliquant la formule de changement d'échelle pour le serpent brownien. Pour établir ces bonnes estimations, la partie majoration utilise le fait que si u est une solution de (2.3), et $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien, alors le processus

$$u(B_t) \exp \left(-2 \int_0^t u(s, B_s) ds \right)$$

est une martingale. La partie minoraton se ramène à l'estimation de moments de la masse totale de la mesure de sortie sous la mesure \mathbb{N}_0 .

Les résultats de [A2] permettent de mesurer la distance minimale à laquelle le super-mouvement brownien s'échappe de son point de départ. Une question naturelle est alors : quelle est la distance maximale qu'il a parcourue au temps t (petit) ? On note

$$R_t^* = \sup \{R_{t'}; 0 \leq t' \leq t\}$$

cette distance maximale. Il est facile, à partir du résultat de la limite (2.9) obtenue par Tribe, d'obtenir une borne inférieure de R_t^* :

$$R_t^* \geq \sqrt{ct \log(1/t)}, \quad \mathbb{P}_{\delta_0}\text{-p.s. pour } t \text{ petit}$$

si $c < 2$.

De plus, Dawson et Vinogradov [36] montrent que si $\kappa < d/2 - 1$, alors :

$$R_t^* \geq cd\sqrt{2t(\log(1/t) + \kappa \log \log(1/t))}, \quad \mathbb{P}_{\delta_0}\text{-p.s. pour } t \text{ petit}$$

Nous montrons la réciproque de ce résultat dans [A3], et corrigeons le résultat erroné de Dawson et Vinogradov, en montrant que l'on a équivalence entre

- (i) $\kappa < d/2$;
- (ii) $\mathbb{P}_{\delta_0}\text{-p.s.}$, il existe $t_0 > 0$ tel que pour $t \in (0, t_0]$,

$$R_t^* \geq \sqrt{2t(\log(1/t) + \kappa \log \log(1/t))}.$$

On obtient alors l'encadrement suivant : pour $\varepsilon > 0$, alors $\mathbb{P}_{\delta_0}\text{-p.s.}$, il existe $t_0 > 0$ tel que pour $t \in (0, t_0]$,

$$1 + \left(\frac{d}{4} - \varepsilon\right) \frac{\log \log(1/t)}{\log(1/t)} \leq \frac{R_t^*}{\sqrt{2t \log(1/t)}} \leq 1 + \left(1 + \frac{d}{4} + \varepsilon\right) \frac{\log \log(1/t)}{\log(1/t)}.$$

2.4 Caractérisation de la G -régularité du super-mouvement brownien [A4]

Les résultats obtenus dans [A2] et présentés plus haut permettent de mesurer la distance maximale à laquelle un super-mouvement brownien s'éloigne de son point de départ en termes de test de Kolmogorov. Le problème est alors équivalent à celui de la G -régularité de $(0, \delta_0)$ pour des domaines D_h . On peut se demander s'il existe une caractérisation de la G -régularité d'un

ensemble quelconque du même type que celle de la super-régularité obtenue dans [A1]. La première étape de la caractérisation des ensembles G -polaires, c'est-à-dire les ensembles de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ qui ne sont jamais visités par le super-mouvement brownien, a été résolue par Dynkin dans [42]. Il montre qu'un borélien A de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ est G -polaire si et seulement si $\text{cap}'(A) = 0$ pour une certaine capacité cap' homogène en espace-temps. L'expression de la plus grande solution de (2.8) à l'aide du super-mouvement brownien permet en outre de voir que les ensembles G -polaires correspondent aux singularités éliminables pour l'équation parabolique (2.8). Notons que Sheu [120, 121] a également obtenu des caractérisations de G -polarité en termes de mesure de Hausdorff.

Avec Delmas, nous introduisons dans [A4] une capacité définie sur les boréliens de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ par :

$$\text{cap}(A) = [\inf I(\nu)]^{-1}, \quad \text{où}$$

$$I(\nu) = \iint_E ds dy p(s, y) \left(\iint_E \nu(dt, dx) \frac{p(t-s, x-y)}{p(t, x)} \right)^2,$$

et p désigne le noyau de la chaleur :

$$p(t, x) = \begin{cases} (2\pi t)^{-d/2} \exp -|x|^2/2t & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'infimum est pris sur toutes les mesures de probabilités ν telles que $\nu(A) = 1$. On montre que $\text{cap}(A) = 0$ si et seulement si $\text{cap}'(A) = 0$; les ensembles polaires pour cap sont donc les G -polaires. Remarquons toutefois que contrairement à cap' , la capacité cap n'est pas homogène en espace temps. Nous obtenons alors qu'il existe une constante C_0 telle que pour tout borélien A de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$:

$$\frac{1}{4} \text{cap}(A_{r,x}^c) \leq \mathbb{N}_{r,x}(\mathcal{G}^* \cap A) \leq C_0 \text{cap}(A_{r,x}^c),$$

où $D_{r,x} = \{(s, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}; (s+r, y+x) \in D\}$.

En particulier, nous retrouvons le résultat de Dynkin pour la caractérisation des ensembles G -polaires, et nous obtenons que (r, x) est G -régulier pour A si et seulement si $\text{cap}(A_{r,x}^c) = +\infty$.

Comme pour le cas elliptique, la partie majoration repose sur des méthodes purement analytiques du type de celles employées par Baras et Pierre [5] et sur la formule d'Itô appliquée à $v_M(t, B_t)$, où $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien de \mathbb{R}^d . La partie minoration quant à elle repose sur des estimations de probabilité d'atteinte par le serpent brownien dues à Le Gall [85] ainsi que sur les fonctionnelles du serpent brownien de [A1] présentées plus haut.

Bien entendu, le résultat précédent permet de caractériser les domaines dans lesquels l'équation (2.8) admet des solutions explosives. Ce type d'étude a été mené de manière analytique dans une série d'articles de Marcus et Véron. En particulier, ils obtiennent en 2006 ([98]) des estimations, également en termes de capacités, de solutions maximales d'équations paraboliques du type $\partial_t u - \Delta u + u|u|^q = 0$.

La caractérisation de toutes les solutions de (2.8), ou celle d'équations paraboliques plus générales, a fait l'objet d'un grand intérêt. Du côté des analystes, on citera bien entendu les travaux de Marcus et Véron [96, 98]. L'approche probabiliste est essentiellement due à Dynkin et Kuznetsov [46].

2.5 Test de Kolmogorov pour le serpent brownien [A6]

Nous venons de voir un test de Kolmogorov pour le super-mouvement brownien qui permet de mesurer la vitesse à laquelle il s'échappe de son point de départ. Avec Delmas dans [A6] nous démontrons un test similaire pour le serpent brownien. La représentation poissonnienne du super-mouvement brownien à l'aide d'une collection (dénombrable) d'excursions du serpent brownien invite à penser que le graphe de ce dernier sera « plus petit ». Nous notons $\rho_t = \sup \{ |\hat{W}_s| ; \zeta_s = t \}$ ce rayon. Comme précédemment, nous notons h une fonction positive décroissante définie sur $(0, +\infty)$, et

$$D_h = \{(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d; |x| < \sqrt{t} h(t)\}.$$

Nous introduisons T le premier instant où le serpent brownien sort de D_h :

$$T = \inf\{t > 0; \rho_t > \sqrt{t} h(t)\},$$

Nous prouvons une loi du 0-1 pour le serpent brownien : $\mathbb{N}_0(T = 0) = 0$ ou $\mathbb{N}_0(T > 0) = 0$ selon que l'intégrale $\int_{0+} \frac{dt}{t} h(t)^{d+2} \exp -\frac{h(t)^2}{2}$ est convergente ou divergente. Notons que la différence avec le test de Kolmogorov pour le super-mouvement brownien se situe au niveau de la puissance de t intervenant au dénominateur.

En utilisant de nouveau les liens avec l'équation parabolique (2.8), nous montrons également que si $(B_t, t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien issu de 0 et v_M désigne la solution positive maximale de (2.8), alors l'intégrale

$$\int_0^\infty v_M(t, B_t) dt$$

est convergente (resp. divergente) si et seulement si $\int_{0+} \frac{dt}{t} h(t)^{d+2} \exp -\frac{h(t)^2}{2}$ est convergente (resp. divergente).

Des conditions du même type ont également été étudiées par Jeulin [69, 70] et Pitman et Yor [116] pour caractériser la convergence d'intégrales de certaines fonctions du mouvement brownien.

Chapitre 3

Approche problème de martingales et interactions

L'ensemble des travaux présentés précédemment reposait sur des approches trajectorielles ; le super-mouvement brownien, ou son processus historique, était obtenu à partir du serpent brownien de Le Gall. Comme nous l'avons précisé plus haut, il est également possible d'obtenir les superprocessus comme solutions de problèmes de martingales. À la différence du chapitre précédent où nous nous sommes limités au super-mouvement brownien, nous abordons ici des superprocessus plus généraux. Pour plus de précisions sur ce type d'approche, on pourra se référer à [111] ou [32].

Revenons dans un premier temps à l'approximation discrète des superprocessus. Nous supposons que le déplacement spatial des particules est une diffusion sur \mathbb{R}^d de générateur A (ce déplacement peut être un processus beaucoup plus général, voir par exemple [111]). Nous fixons $N \in \mathbb{N}^*$ qui correspond à l'échelle de temps. À chaque instant k/N , $k \in \mathbb{N}$, les particules meurent et donnent naissance à un certain nombre de particules qui partent de l'endroit $x \in \mathbb{R}^d$ où leur mère est morte. On note $\nu^N(x, \cdot)$ la loi sur \mathbb{N} de ce nombre d'enfants (remarquons que nous nous autorisons des lois de reproduction dépendant de l'endroit où la particule se trouve). Nous allons supposer que les lois $\nu^N(x, \cdot)$ vérifient certaines conditions :

- elles sont d'espérance finie, et il existe une fonction $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, si b_N est définie par :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k \nu^N(x, k) = 1 + \frac{b_N(x)}{N},$$

alors la suite de fonctions b_N converge vers b ;

- elles sont de variance finie, et il existe une fonction $c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$

continue bornée telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, si c_N est définie par :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 \nu^N(x, k) - \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} k \nu^N(x, k) \right)^2 = c_N(x),$$

alors la suite de fonctions c_N converge vers c .

Pour $t \geq 0$, notons M_t^N le nombre de particules en vie à l'instant t , $Y_t^\alpha \in \mathbb{R}^d$, $1 \leq \alpha \leq M_t^N$, leur position respective et $W_t^\alpha \in \mathcal{W}$ la trajectoire de \mathbb{R}^d de temps de vie t qui décrit l'évolution de la position de la particule α entre les instants 0 et t . On définit la mesure empirique (renormalisée) associée à l'instant t de la façon suivante . Pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ borélienne bornée :

$$\langle X_t^N, \varphi \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{M_t^N} \varphi(Y_t^\alpha).$$

Si la suite X_0^N converge vers une mesure finie μ , alors, moyennant quelques conditions techniques sur les mesures ν^N , le processus X^N converge vers l'unique solution X du problème de martingales bien posé sur $M_F(\mathbb{R}^d)$ suivant : pour toute fonction bornée φ dans le domaine du générateur A du déplacement spatial, le processus

$$M_t(\varphi) = \langle X_t, \varphi \rangle - \int_0^t \langle X_s, A\varphi \rangle ds - \int_0^t \langle X_s, b\varphi \rangle ds$$

est une martingale dont la variation quadratique est donnée par

$$\langle M(\varphi) \rangle_t = \int_0^t \langle X_s, c\varphi^2 \rangle ds.$$

Nous obtenons ainsi le (A, cz^2, b) -superprocessus. Il est aussi possible d'obtenir par approximations le processus historique associé, en posant

$$\langle X_t^N, \Phi \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{M_t^N} \Phi(W_t^\alpha),$$

pour des fonctions Φ mesurables bornées. Le processus limite, processus historique du (A, cz^2, b) -superprocessus, est alors également l'unique solution d'un problème de martingales bien posé.

3.1 Calcul stochastique pour le serpent brownien [A5]

Le serpent brownien étant un processus de Markov, une première question consiste à se demander quel est son générateur et le problème de martingales

associé. Avec Serlet dans [A5], nous déterminons le générateur et établissons ce problème de martingales pour le serpent brownien dont le déplacement est régi par un processus de Markov de générateur A . Nous obtenons également une formule d'Itô. Nous utilisons alors ces outils pour obtenir une construction directe du super-mouvement brownien, et plus généralement des (A, cz^2, b) -superprocessus, à partir du serpent brownien.

Le serpent brownien est un processus à valeurs trajectoire. Rappelons que \mathcal{W} désigne l'ensemble des trajectoires à valeurs dans \mathbb{R}^d . L'un des processus de Markov les plus simples à valeurs dans \mathcal{W} est le A -chemin largement étudié par Wentzell [126] (voir aussi [33, p.202]). Le A -chemin issu de (w, ζ) est défini de la façon suivante : pour $s \geq 0$,

- $\zeta_s = \zeta + s$;
- pour $u \in [0, \zeta]$, $W_s(u) = w(u)$;
- pour $u \in [0, s]$, $W_s(\zeta + u) = \xi_u$, où $(\xi_u, u \geq 0)$ est un processus de Markov de générateur A issu de \hat{w} .

L'évolution du A -chemin est donc tout simplement la trajectoire w que l'on prolonge de façon aléatoire par un processus de Markov de générateur A . Nous notons L le générateur du A -chemin. Son expression est particulièrement simple dans certains cas. Si $g(w) = h(\zeta, \hat{w})$ où $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée telle que $(\frac{\partial}{\partial t} + A)h$ existe et est également bornée, alors :

$$Lg(w) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A \right) h(\zeta, \hat{w}).$$

Si g est définie par $g(w) = \int_0^\zeta f(w_{\leq r}) dr$ où $f : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et $w_{\leq r}$ désigne la restriction de la trajectoire w arrêtée à l'instant r , alors $Lg(w) = f(w)$.

Pour donner une expression du générateur G du serpent brownien, nous introduisons l'ensemble \mathcal{D} des fonctions $F : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$F(w) = \int_0^{\zeta(w)} g(w_{\leq r}) dr,$$

où $g : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ est dans le domaine de L avec g et Lg continues bornées. On obtient alors [A5] : si $F \in \mathcal{D}$ et $w \in \mathcal{W}$ est tel que $\zeta(w) > 0$, alors

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{s} (\mathbb{E}_w[F(W_s)] - F(w)) = \frac{1}{2} Lg(w). \quad (3.1)$$

Le résultat reste vrai si $\zeta(w) = 0$ et $g(w_{\leq 0}) = 0$.

Cette détermination du générateur du serpent brownien est un premier pas vers la caractérisation du serpent brownien par un problème de martingales. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^d$, nous notons \mathcal{D}_{x_0} l'ensemble des fonctions $F : w \rightarrow$

$\int_0^\zeta g(w_{\leq r}) dr$ de \mathcal{D} telles que $g(\tilde{x}_0) = 0$. Si $w_0 \in \mathcal{W}$ et $x_0 = w_0(0)$, alors le serpent brownien issu de w_0 est l'unique processus $(W_s, s \geq 0)$ à valeurs dans \mathcal{W}_{x_0} solution du problème de martingales suivant : $W_0 = w_0$ et pour toute fonction $F \in \mathcal{D}_{x_0}$,

$$M(F)_s = F(W_s) - \frac{1}{2} \int_0^s Lg(W_r) dr$$

est une martingale de variation quadratique

$$\langle M(F) \rangle_s = \int_0^s g^2(W_r) dr.$$

Nous obtenons également une formule d'Itô pour le serpent brownien. Si $F \in \mathcal{D}$ et $w \in \mathcal{W}$, alors le serpent brownien $(W_s, s \geq 0)$ issu de w vérifie pour tout $s \geq 0$,

$$F(W_s) = F(W_0) + \int_0^s g(W_r) d\zeta_r + \frac{1}{2} \int_0^s Lg(W_r) dr. \quad (3.2)$$

Nous utilisons cette formule d'Itô pour le serpent brownien pour donner une nouvelle preuve de la représentation du super-mouvement brownien. Plus précisément, nous construisons le processus historique du super-mouvement brownien à partir du serpent brownien. Rappelons que ce lien entre serpent brownien et processus historique est dû à Le Gall [84] qui l'obtenait par comparaison des approximations discrètes du serpent brownien et de celles du processus historique.

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, nous définissons le processus $(H_t, t \geq 0)$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{M}_F(\mathcal{W}_x)$ des mesures finies sur l'espace des trajectoires \mathcal{W}_x par : pour tout $t \geq 0$, et toute application positive mesurable $\varphi : \mathcal{W}_x \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\langle H_t, \varphi \rangle = \int_0^{\tau_1} \varphi(W_s) d_s L_s^t$$

où $(W_s, s \geq 0)$ est un serpent brownien issu de x , L_s^t le temps local du processus du temps de vie de $(W_s, s \geq 0)$ au niveau t et au temps s , et τ_1 désigne le premier instant où le temps local du temps de vie en 0 atteint le niveau 1. Le processus $(H_t, t \geq 0)$ est alors solution du problème de martingales suivant. Pour toute application positive mesurable $\varphi : \mathcal{W}_x \rightarrow \mathbb{R}_+$, dans le domaine de L avec φ et $L\varphi$ bornées, le processus

$$M_t(\varphi) = \langle H_t, \varphi \rangle - \langle H_0, \varphi \rangle - \int_0^t \langle H_s, L\varphi \rangle ds$$

est une martingale de variation quadratique

$$\langle M_t(\varphi) \rangle_t = 4 \int_0^t \langle H_s, \varphi^2 \rangle ds.$$

Il s'agit (au facteur 4 près) du problème de martingales qui caractérise le processus historique du super-mouvement brownien (voir [111, p. 190]). Le processus $(H_t, t \geq 0)$ est donc le processus historique du super-mouvement brownien. L'idée de la preuve est la suivante : il s'agit d'appliquer la formule d'Itô (3.2) à certaines fonctions pour prouver que

$$\langle H_t, \varphi \rangle - \int_0^t \langle H_s, \varphi \rangle ds = 2 \int_0^{\tau_1} \mathbf{1}_{(0,t]}(\zeta_r) \varphi(W_r) d\zeta_r,$$

puis de montrer que ce processus est bien une martingale de bonne variation quadratique.

L'approche par le calcul stochastique permet d'obtenir une classe de superprocessus plus importante que le super-mouvement brownien à partir du serpent brownien. Rappelons que dans la définition donnée par Dawson, le super-mouvement brownien correspond au $(A, z^2, 0)$ -superprocessus. Nous étendons la construction au (A, cz^2, b) -superprocessus. Pour cela, nous commençons par suivre l'idée de Watanabe [132, 133] d'effectuer des changements de temps sur chacune des trajectoires du serpent brownien.

Nous fixons $c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée et minorée par des constantes strictement positives, et nous posons pour tout $s > 0$ et $w \in \mathcal{W}$:

$$\phi(w, s) = \int_0^s \frac{dr}{c(w(r))}.$$

Soit (ζ_s^*, W_s^*) un serpent brownien de générateur $\frac{1}{c} A$. Nous posons

$$\zeta_s = \phi(W_s^*, \zeta_s^*), \quad W_s = W_s^* \circ \phi^{-1}(W_s^*, \cdot).$$

Nous montrons que le processus (ζ_s, W_s) , que nous appelons serpent brownien modifié, est solution d'un problème de martingales du même type que celui vérifié par le serpent brownien classique. Nous définissons le processus $(Z_t, t \geq 0)$ à valeurs dans les $M_F(\mathcal{W})$ sur des fonctions continues positives φ par

$$\langle Z_t, \varphi \rangle = \int_0^{\tau_1} c(\hat{W}_s) \varphi(W_s) dL_s^t(\zeta),$$

où $(L_s^t(\zeta), s \geq 0)$ désigne le temps local du processus $(\zeta_s, s \geq 0)$ au niveau t , et $\tau_1 = \inf \{s \geq 0; L_s^0(\zeta) = 1\}$. Le processus $(Z_t, t \geq 0)$ est alors le processus historique d'un $(A, cz^2, 0)$ -superprocessus.

En utilisant toujours les mêmes méthodes, si $b : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable bornée telle que $b(w) = 0$ si le temps de vie de ζ_w de w est nul, nous obtenons alors le processus historique du (A, cz^2, b) -superprocessus à partir du serpent brownien modifié précédent à l'aide d'un changement de probabilités. Remarquons que ces (A, cz^2, b) -superprocessus sont un peu plus

généraux que ceux présentés plus haut : la fonction b dépend de toute la trajectoire et non seulement de son point terminal. Le temps de vie $(\beta_s, s \geq 0)$ de ce nouveau serpent brownien s'obtient à partir de $(\zeta_s, s \geq 0)$ en lui ajoutant une dérive :

$$d\beta_s = d\zeta_s - b(W_s) ds.$$

Ce calcul stochastique a par la suite été utilisé par Abraham et Serlet [1] pour l'étude du serpent brownien avec dérive dans le cas $c = 1$ (c'est à dire lorsqu'il n'y a pas de changement de temps sur les trajectoires). Ils montrent que ce b -serpent peut être vu comme un serpent sur les trajectoires duquel on a mis un taux de meurtre. Ils montrent également qu'il peut être vu comme un serpent brownien conditionné. Ils l'utilisent enfin pour donner une expression, comme dans le cas neutre, des solutions explosives de l'équation $\Delta u = u^2 + bu$ dans le cas de domaines réguliers.

3.2 Super-mouvement brownien avec interactions [A7]

Souvenons-nous que les superprocessus peuvent servir à modéliser l'évolution d'une population au cours du temps et dans l'espace. Il est alors naturel de penser que la loi de reproduction des individus (qui correspond au branchement du superprocessus) et leur mécanisme de migration (qui correspond au déplacement spatial) doivent tenir compte de la composition totale de la population, voire de son historique. En 1992, Perkins [109] (voir aussi [113, 115] ou le cours de Dawson [32]) s'intéresse aux interactions influant sur le déplacement spatial des particules, laissant le mécanisme de branchement inchangé. À cet effet, il développe un calcul stochastique pour le processus historique. L'évolution de chaque particule suit alors une équation d'Itô dont la dérive et le coefficient de diffusion dépendent de toute la mesure, ainsi que de la localisation des autres particules.

Dans la section précédente, nous avons construit une généralisation du super-mouvement brownien, le (A, cz^2, b) -superprocessus, à partir du serpent brownien modifié. Dans le cas non modifié, rappelons que le super-mouvement brownien est obtenu à partir du serpent brownien à l'aide de la formule

$$\langle X_t, \varphi \rangle = \int_0^{\tau_1} \varphi(\hat{W}_s) d_s L_s^t.$$

Dans le cas où $b = 0$, on peut voir le $(A, cz^2, 0)$ -superprocessus comme étant obtenu à partir d'un serpent brownien classique à l'aide de la même formule, en remplaçant le temps local du temps de vie au niveau t par son temps local

sur un ensemble $\{s; \zeta_s = \phi_t(s)\}$, où ϕ s'obtient à partir de la fonction c . Le $(A, cz^2, 0)$ -superprocessus à l'instant t peut ainsi s'obtenir comme mesure de sortie d'un serpent brownien classique. La contribution du serpent brownien au superprocessus à l'instant t vient des valeurs terminales \hat{W}_s des trajectoires dont les temps de vie sont $\phi_t(s)$. Ce type de méthodes a été utilisé par Bertoin, Le Gall et Le Jan [18] pour obtenir une classe de superprocessus plus large que le super-mouvement brownien à partir du serpent brownien.

Avec Delmas, nous nous proposons dans [A7] de construire des superprocessus avec interactions plus généraux. L'idée est d'agir à la fois sur le déplacement, comme le fait Perkins, mais également sur le mécanisme de branchement en jouant sur les trajectoires comme dans [A5]. Nous partons d'un serpent brownien ordinaire $(W_s, s \geq 0)$ de temps de vie $(\zeta_s, s \geq 0)$. Comme dans [A5], mais avec des fonctions $\phi_t(\cdot)$ plus générales, nous modifions la structure de branchement en intégrant par rapport au temps local de $(\zeta_s, s \geq 0)$ le long des courbes $\phi_t(\cdot)$ au lieu du temps local au niveau t . De plus, nous modifions le déplacement spatial en remplaçant les trajectoires browniennes $(W_s(t), 0 \leq t \leq \zeta_s)$ issues d'un point x_0 de \mathbb{R}^d par des diffusions $W_s^\phi(\cdot)$. Le nouveau serpent brownien modifié W^ϕ et le superprocessus associé X^ϕ sont alors formellement régis par les équations suivantes :

- transformation de la trajectoire initiale brownienne W_s du serpent par une équation différentielle stochastique, et changement de temps associé à ϕ :

$$d_t W_s^\phi(t) = \sigma(X_t^\phi, W_s^\phi(t)) d_t W_s(\phi_t(s)) + b(X_t^\phi, W_s^\phi(t)) d_t \phi_t(s);$$

- équation différentielle pour le changement de temps :

$$d_t \phi_t(s) = \theta(X_t^\phi, W_s^\phi(t)) dt \quad \text{pour } \phi_t(s) \leq \zeta_s;$$

- définition de la nouvelle mesure aléatoire X_t^ϕ : pour toute fonction φ mesurable bornée,

$$\langle X_t^\phi, \varphi \rangle = \int_0^{\tau_1} \varphi(\hat{W}_s^\phi) d_s L_s^{\phi_t},$$

où L^{ϕ_t} désigne le temps local du temps de vie $(\zeta_s, s \geq 0)$ le long de la courbe ϕ_t .

Plus exactement, nous utilisons dans [A7] un schéma discret pour ce système d'équations. Nous supposons les fonctions θ , b et σ définies sur $M_F(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d$ à valeurs respectivement dans \mathbb{R} , \mathbb{R}^d et $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ continues bornées, avec θ et σ positives. Nous notons $X^{\phi, \varepsilon}$ la solution du schéma discret associé de pas ε . Nous démontrons alors que la suite de processus à valeurs mesures $(X^{\phi, \varepsilon}, \varepsilon \geq 0)$ est tendue. De plus, toute limite $(X_t^\phi, t \geq 0)$ de cette suite est

solution du problème de martingales suivant. Nous notons $A(\mu)$ le générateur de la diffusion de dérive $b(\mu, \cdot)$ et de coefficient de diffusion $\sigma(\mu, \cdot)$. Pour toute fonction φ de classe C^2 bornée et de dérivées bornées, on a $X_0^\phi = \delta_{x_0}$ et

$$\langle X_t^\phi, \varphi \rangle = \langle X_0^\phi, \varphi \rangle + \int_0^t \langle X_s^\phi, \theta(X_s^\phi) A(X_s^\phi) \varphi \rangle ds + M(\varphi)_t,$$

où $M(\varphi)$ est une martingale continue de variation quadratique

$$\langle M(\varphi) \rangle_t = \int_0^t \langle X_s^\phi, \theta(X_s^\phi) \varphi^2 \rangle ds.$$

De plus, le processus $(X_t^\phi, t \geq 0)$ admet une version continue.

Excepté dans des cas particuliers, le problème de l'unicité des solutions reste ouvert.

Les superprocessus avec interactions restent un domaine de recherche actif en raison de l'importance de leurs applications. On pourra se référer à [50] pour des applications à l'étude de compétitions entre populations, et à [47] pour la modélisation de l'agrégation du phytoplancton.

Chapitre 4

Des probabilités qui s'appliquent à la biologie et à l'épidémiologie

4.1 Un problème d'urne [A8]

Les modèles d'urne sont des outils qui sont bien souvent utilisés en génétique des populations [61] ou en épidémiologie [101]. Cette section, consacrée à un travail sur le comportement asymptotique de certains modèles d'urne [A8], a donc toute sa place ici, même si l'article ne fait pas directement allusion à de telles applications.

L'exemple de modèles d'urne le plus classique et le plus simple est sans doute le modèle des urnes de Pólya (voir [54]). Une urne contient au départ une quantité B_0 de boules blanches et N_0 de boules noires. À chaque étape, on tire au hasard une boule dans l'urne. On la remet, ainsi qu'une quantité α de boules du même type. Dès lors la proportion asymptotique de boules blanches converge presque sûrement, et la limite suit une loi beta de paramètre $(B_0/\alpha, N_0/\alpha)$ (voir [2]).

La littérature sur les modèles d'urne s'intéresse à différentes règles de remplacement de boules (voir [73] par exemple). Récemment, de nombreux travaux se sont intéressés à des remplacements aléatoires : à chaque fois qu'une boule est tirée, les types des boules ajoutées ou retirées sont aléatoires, et leur distribution dépend de la boule tirée (voir [3, 4, 9, 60, 58] par exemple). On dispose maintenant de résultats de convergence forte [58, 60] et de théorèmes central limite fonctionnels [4, 57, 66] pour de larges classes de modèles. Toutefois, dans tous ces modèles, une hypothèse d'irréductibilité est faite. Cette hypothèse garantit en particulier l'unicité de la limite du vec-

teur de fréquences. Une question naturelle est donc de se demander ce qu'il advient quand nous nous affranchissons de cette hypothèse d'irréductibilité. C'est l'objet de [A8] en collaboration avec Abraham et Ycart. Les résultats obtenus reposent sur des techniques d'algorithmes stochastiques.

Nous nous posons la question dans le cas le plus simple : nous ajoutons des boules une par une, et le type de la boule rajoutée dépend de celui de la boule tirée. Nous notons $\{1, \dots, d\}$ les types des boules considérées. Si une boule de type i est tirée, nous la remettons dans l'urne, accompagnée d'une boule de type j avec probabilité $p_{i,j}$. La matrice $P = (p_{i,j})$ est une matrice stochastique sur $\{1, \dots, d\}$ que nous autorisons à être réductible. Nous partons à l'origine avec n_0 boules, et nous notons X_n le vecteur fréquence de chacun des types après n tirages. Dès lors si S désigne l'ensemble des probabilités stationnaires pour P , nous obtenons que la suite de vecteurs aléatoires $(X_n, n \in \mathbb{N})$ converge presque sûrement vers un vecteur aléatoire X_∞ de S . Il est en outre possible de caractériser la limite. Pour cela, nous notons, pour $b \geq 1$, Δ_b le simplexe $(b - 1)$ -dimensionnel

$$\Delta_b = \left\{ (x_1, \dots, x_b) \in [0, 1]^b; x_1 + \dots + x_b = 1 \right\}.$$

Si la matrice P admet k classes de récurrence, nous notons, pour $1 \leq c \leq k$, π_c l'élément de S qui ne charge que la classe c . Nous notons σ la bijection entre S et Δ_k définie par :

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \Delta_k, \quad \sigma^{-1}(\alpha) = \sum_{c=1}^k \alpha_c \pi_c.$$

Nous notons $A^{(i)} = \sigma(X_\infty)$ lorsque l'on part d'une unique boule de type i . Alors le vecteur $(A^{(i)}, 1 \leq i \leq d)$ est solution du problème de point fixe suivant.

Pour $i = 1, \dots, d$, notons $A^{(i)'}$, $A^{(i)''}$ des copies indépendantes de $A^{(i)}$; notons $Y^{(i)}$ des variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$; notons U_i des variables aléatoires de loi $(p_{i,j})_{j=1, \dots, d}$. Supposons que toutes ces variables aléatoires sont indépendantes. Alors :

$$A^{(i)} \stackrel{(d)}{=} \sum_{j=1}^d \mathbf{1}_{U_i=j} \left(Y^{(j)} A^{(i)'} + (1 - Y^{(j)}) A^{(j)''} \right).$$

Des arguments dus à Letac [90] et Chamayou et Letac [26] garantissent que cette équation caractérise les $A^{(i)}$.

Supposons que l'on parte maintenant avec n_0 boules dont la répartition des types de boules est donnée par $x_0 \in \Delta_d$. Pour $1 \leq b \leq n_0$, nous notons

$i(b) \in \{1, \dots, d\}$ le type de la boule b initialement dans l'urne. La limite $A^{x_0} = \sigma(X_\infty)$ peut être caractérisée à partir des $A^{(i)}$.

Notons $Y = (Y^{(1)}, \dots, Y^{(n_0)})$ un vecteur aléatoire distribué de manière uniforme sur Δ_{n_0} . Pour $1 \leq b \leq n_0$, A_b désigne une copie de $A^{(i(b))}$. Nous supposons que les A_b , $b = 1, \dots, n_0$ sont mutuellement indépendantes, et indépendantes du vecteur Y . Alors :

$$A^{x_0} \stackrel{(d)}{=} \sum_{b=1}^{n_0} Y^{(b)} A_b .$$

Force est de constater que la caractérisation des $A^{(i)}$ est en générale difficilement explicite. Nous donnons deux exemples, avec un seul état transitoire pour la matrice P : l'un sans possibilité de retour à cet état, l'autre avec. Nous supposons en outre que les autres états sont absorbants.

Dans le premier exemple, nous supposons que lorsque l'on tire la boule de type 1, on remet l'une des boules de type k , $2 \leq k \leq d$, avec probabilité p_k , et que lorsque l'on tire une boule de type k , $2 \leq k \leq d$, on remet une boule du même type. La matrice P est ainsi de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_2 & \cdots & p_d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

avec $p_2 + \dots + p_d = 1$. Nous supposons que nous partons avec une seule boule, de type 1. Alors $A^{(1)}$ suit une loi de Dirichlet de paramètre (p_2, \dots, p_d) . Ce résultat est bien entendu à rapprocher des résultats asymptotiques pour les urnes de Pólya classiques. En particulier, si $d = 3$, la limite suit une loi beta.

Si nous permettons aux boules de type 1 de produire des boules de type 1, le comportement est très différent. On se place dans le cas où le nombre de types est $d = 3$. Supposons que lorsque l'on tire la boule de type 1, on remet l'une des boules de type k , $1 \leq k \leq 3$, avec probabilité p_k , et que lorsque l'on tire une boule de type k , $2 \leq k \leq 3$, on remet une boule du même type. La matrice P est ainsi de la forme

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

avec p_1, p_2, p_3 strictement positifs. La distribution limite $A^{(1)}$ ne chargeant que les états absorbants 2 et 3, elle s'écrit $(A, 1 - A)$. Dès lors la fonction

génératrice des moments de A :

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[A^n] z^n$$

est donnée par

$$\frac{1}{\varphi(z)} = (1-z)^{p_2} {}_2F_1(p_2, -p_1, 1-p_1)(z), \quad (4.1)$$

où ${}_2F_1(p_2, -p_1, 1-p_1)$ désigne une fonction hypergéométrique de paramètres $(p_2, -p_1)$ et $1-p_1$. En calculant les moments de A , il est facile de voir que, hormis dans le cas $p_2 = p_3$, la distribution obtenue n'est plus une loi beta.

Nous venons de traiter uniquement le cas le plus simple de modèles d'urne avec remplacement aléatoire sans irréductibilité. Bien entendu, une extension de ces résultats doit pouvoir se faire au cas de modèles beaucoup plus généraux, comme décrits dans [66] ou [9].

4.2 Coalescents et évolutions de populations [A9]

Dans des travaux précédents, nous avons vu que les superprocessus apparaissent comme limites de processus de Galton-Watson. En génétique des populations, on considère plutôt les modèles mathématiques à taille de population constante, comme le modèle de Wright-Fisher [139] que nous allons privilégier, mais également le modèle de Moran [103] ou celui de Cannings [25] (voir par exemple [38] ou [52] pour une introduction à tous ces modèles). Nous supposons que les individus sont affectés par des mutations à un taux θ , que ces mutations sont neutres, et que l'on est dans le cas du modèle à nombre de sites infini introduit par Kimura [76] (voir également [52]) : chaque nouvelle mutation crée un nouveau type dans la population, qui correspond par exemple à un changement sur sa séquence ADN. Ainsi, si un individu est affecté par une mutation, tous ses descendants le sont, et ce sont les seuls. Correctement renormalisé, le modèle de Wright-Fisher avec un nombre de sites infini converge vers le processus de Fleming-Viot (voir [33, 51]), qui est un type de superprocessus différent de ceux que nous avons rencontrés précédemment.

Le processus de coalescence de Kingman [78, 77] permet de décrire dans le modèle de Fleming-Viot la généalogie de n individus pris au hasard. On part à l'instant 0 de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, et on regarde le processus de Markov à valeurs dans l'espace \mathcal{P}_n des partitions de $\{1, 2, \dots, n\}$ qui évolue

de la façon suivante : s'il reste b blocs, chaque couple de blocs coalesce à taux 1 (et donc l'attente du prochain temps de coalescence suit une loi exponentielle de paramètre $\binom{b}{2}$). La présence d'un bloc $\{i_1, \dots, i_k\}$ à un instant t signifie que les individus i_1, \dots, i_k ont à cet instant un ancêtre commun, et cet ancêtre est représenté par ce bloc. Nous venons de décrire le n -coalescent, que Kingman [78] étend au coalescent à valeurs dans l'ensemble des partitions sur \mathbb{N}^* . Remarquons que pour ce coalescent, il ne peut se produire que des coalescences binaires.

Si nous notons $S^{(n)}$ le nombre de sites affectés par des mutations différentes chez les n individus, Waterson [135] détermine un estimateur du taux de mutations θ en fonction de $S^{(n)}$:

$$\hat{\theta}_W = \frac{S^{(n)}}{\sum_{k=1}^n 1/k}.$$

Cet estimateur de θ est convergent et asymptotiquement normal. Une démonstration reposant sur une estimation de la longueur totale de l'arbre généalogique obtenue à partir du coalescent de Kingman peut être trouvée dans [A9] : une bonne approximation de la longueur de l'arbre est obtenue en remplaçant les temps exponentiels entre les coalescences successives par leur espérance. L'étude de l'estimation par $\hat{\theta}_W$ repose ensuite sur le fait que si $L^{(n)}$ désigne la longueur totale de l'arbre généalogique, alors, conditionnellement à $L^{(n)}$, $S^{(n)}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\theta L^{(n)}$.

En 1999, Pitman [114] et Sagitov [118] introduisent une généralisation du processus de coalescence de Kingman permettant des coalescences multiples : le Λ -coalescent. On commence par considérer le n -coalescent sur \mathcal{P}_n . Si la population est partitionnée en b blocs, nous notons $\lambda_{b,k}$, $2 \leq k \leq b$, le taux auquel chaque choix de k blocs fusionne en un seul (remarquons que ce taux ne dépend que du nombre de blocs, et en aucun cas de leur composition, ni de la taille de la population totale). Si l'on veut que le processus soit consistant, afin de l'étendre à \mathcal{P} , on doit avoir, pour tout $2 \leq k \leq b$,

$$\lambda_{b,k} = \lambda_{b+1,k} + \lambda_{b+1,k+1}. \quad (4.2)$$

En effet, la coalescence de k individus dans une population de b individus arrive lorsque dans une population contenant un individu supplémentaire :

- soit ces individus coalescent, ce qui arrive à taux $\lambda_{b+1,k}$;
- soit ces k individus et le nouvel individu coalescent, ce qui arrive à taux $\lambda_{b+1,k+1}$.

Pitman montre que cela implique qu'il existe une mesure finie Λ sur $[0, 1]$ telle que

$$\lambda_{b,k} = \int_{[0,1]} x^{k-2} (1-x)^{b-k} \Lambda(dx), \quad 2 \leq k \leq b.$$

En remarquant que l'infimum de variables aléatoires exponentielle est une variable aléatoire exponentielle de paramètre la somme des paramètres, on obtient que le temps d'atteinte du prochain temps de coalescence suit une loi exponentielle de paramètre

$$g_b = \sum_{k=2}^b \binom{b}{k} \lambda_{b,k}.$$

Il y a en fait bijection entre ces coalescents à coalescences multiples et les mesures finies Λ sur $[0, 1]$. Si $\Lambda = \delta_0$, nous retrouvons le coalescent de Kingman. Si $\Lambda(dx) = dx$ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, on obtient le coalescent de Bolthausen-Sznitman [23].

Ce Λ -coalescent a été très largement étudié depuis le début des années 2000. Bertoin et Le Gall [15, 16, 17] font le lien entre ces processus et des flots stochastiques. Ils font en outre le lien entre les Λ -coalescents et une généralisation des processus de Fleming-Viot. Schweinsberg [119] montre que certains Λ -coalescents, ceux pour lesquels la mesure Λ est une mesure beta de paramètres $(2 - \alpha, \alpha)$, sont ceux obtenus comme limite de processus de Galton-Watson sur-critiques pour lesquels on ne laisse qu'un nombre n d'enfants à chaque génération. Ces beta-coalescents sont également étudiés dans [21]. De nombreux travaux enfin concernent la structure des arbres généalogiques associés aux Λ -coalescents [8, 11, 12, 56, 62, 63, 102].

En outre, et comme le laisse penser [119], les Λ -coalescents, et en particulier les beta-coalescents, permettent de modéliser des populations dont les individus ont un grand nombre de descendants, mais telles que presque tous les individus voient leur descendance instantanément anéantie, tandis que quelques individus voient un nombre très important de leurs descendants survivre. C'est en particulier le cas pour certaines espèces marines, comme le montrent Eldon et Wakeley [48]. Les processus à coalescences multiples interviennent également pour des problèmes d'identification de gènes impliqués dans des maladies complexes [104]. Il est alors important d'obtenir des informations sur le comportement de tels modèles.

C'est ce que nous faisons avec Delmas et Siri-Jégousse dans [A9]. Si Λ désigne la mesure associée au Λ -coalescent, nous notons $\nu(dx) = x^{-2}\Lambda(dx)$ et $\rho(t) = \nu((t, 1])$. Nous supposons que

$$\rho(t) = C_0 t^{-\alpha} + O(t^{-\alpha+\zeta}) \tag{4.3}$$

pour un certain $\alpha \in (1, 2)$, $C_0 > 0$ et $\zeta > 1 - 1/\alpha$. En particulier, cette hypothèse inclut les lois beta $(2 - \alpha, \alpha)$ pour Λ . Nous montrons que, sous ces hypothèses, le taux auquel arrive la prochaine coalescence quand il y a n blocs vérifie

$$g_n = C_0 \Gamma(2 - \alpha) n^\alpha + O(n^{\alpha - \min(\zeta, 1)}).$$

Un premier résultat concerne le comportement asymptotique du nombre total τ_n de temps de coalescence lorsque l'on part avec n individus. Nous notons $\gamma = \alpha - 1$, et $V = (V_t, t \geq 0)$ un processus de Lévy α -stable sans saut positif (voir [13]) d'exposant de Laplace $\psi(u) = u^\alpha/\gamma$: pour tout $u \geq 0$, $\mathbb{E}[\exp -uV_t] = \exp tu^\alpha/\gamma$. Nous avons la convergence en loi suivante :

$$n^{-1/\alpha} \left(n - \frac{\tau_n}{\gamma} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} V_\gamma.$$

Ce résultat a été également simultanément obtenu dans deux autres articles, de Gnedin et Yakubovich [56] et de Iksanov et Möhle [64], par des méthodes différentes et sous des hypothèses légèrement plus fortes. Les arguments de la preuve sont les suivants. Notons Y_k le nombre de blocs après k coalescences ($0 \leq k \leq \tau_n$) et $X_k = Y_k - Y_{k-1}$ le nombre de blocs perdus lors de la k^e coalescence. Si ϕ_b désigne la transformée de Laplace de X_1 quand la population est b , alors, pour tout $v \geq 0$, le processus $(M_{v,k}, k \geq 0)$ défini par :

$$M_{v,k} = \prod_{i=1}^k \exp \left(-vX_i^{(n)} - \log \phi_{Y_{i-1}^{(n)}}(v) \right)$$

est une martingale positive bornée d'espérance 1. Il faut dès lors appliquer le théorème d'arrêt au temps τ_n et trouver un développement asymptotique de ϕ_b .

Nous obtenons également des résultats sur la longueur de l'arbre généalogique. En décomposant l'arbre entre chaque coalescence, sa longueur peut être vue comme

$$L^{(n)} = \sum_{k=0}^{\tau_n-1} \frac{Y_k^{(n)}}{g_{Y_k^{(n)}}} E_k,$$

où les variables aléatoires E_k sont exponentielles de paramètre 1. Nous fixons $t \in (0, \gamma)$ et nous nous limitons à la longueur de l'arbre avant la $[nt]^e$ coalescence ($[\cdot]$ désignant la partie entière). Cette longueur s'écrit :

$$L_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{[nt] \wedge (\tau_n-1)} \frac{Y_k^{(n)}}{g_{Y_k^{(n)}}} E_k.$$

Nous démontrons que :

$$n^{-2+\alpha} L_t^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} a(t)$$

pour tout $t \in [0, \gamma)$, avec

$$a(t) = \frac{v(t)}{C_0 \Gamma(2-\alpha)}, \quad \text{avec} \quad v(t) = \int_0^t \left(1 - \frac{r}{\gamma} \right)^{-\gamma} dr.$$

Ce résultat est à rapprocher de celui de Beresticky et al. [12], où les auteurs montrent que, pour la longueur totale, la convergence en probabilités a également lieu, vers $a(\gamma)$.

Il est possible de préciser la vitesse de convergence. Posons $\alpha_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

(i) Soit $t_0 \in [0, \gamma)$ et $\delta > 0$. Nous avons la convergence en probabilité suivante :

$$n^{(\frac{\alpha-1}{2}-2+\alpha)_+ - \delta} \sup_{0 \leq t \leq t_0} |L_t^{(n)} - n^{2-\alpha}a(t)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0. \quad (4.4)$$

(ii) Si $\alpha \in (1, \alpha_0)$, nous avons la convergence en loi suivante, pour tout $t \in [0, \gamma)$:

$$n^{-1+\alpha-1/\alpha} (L_t^{(n)} - a(t)n^{2-\alpha}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} V_t^*, \quad (4.5)$$

$$\text{où } V_t^* = \frac{\alpha - 1}{C_0 \Gamma(2 - \alpha)} \int_0^t (1 - \frac{r}{\gamma})^{-\alpha} V_r dr.$$

Ces convergences de la longueur partielle de l'arbre généalogique correctement renormalisé amènent à un résultat sur la convergence de $S_t^{(n)}$, le nombre de mutations rencontrées avant la $[nt]^e$ coalescence. Rappelons que conditionnellement à $L_t^{(n)}$, $S_t^{(n)}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\theta L_t^{(n)}$. En combinant le théorème central limite pour ces variables aléatoires de Poisson et le résultat précédent, nous obtenons que si $t \in (0, \gamma)$ et G est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite indépendante de V :

(i) Si $\alpha \in (1, \sqrt{2})$, alors

$$n^{-1+\alpha-1/\alpha} (S_t^{(n)} - \theta a(t)n^{2-\alpha}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \theta V_t^*.$$

(ii) Si $\alpha \in (\sqrt{2}, 2)$, alors

$$n^{-1+\alpha/2} (S_t^{(n)} - \theta a(t)n^{2-\alpha}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \sqrt{\theta a(t)} G.$$

(iii) Si $\alpha = \sqrt{2}$, alors $-1 + \alpha - \frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ et

$$n^{-1+\alpha-1/\alpha} (S_t^{(n)} - \theta a(t)n^{2-\alpha}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \theta V_t^* + \sqrt{\theta a(t)} G.$$

L'existence de différents cas est lié à la concurrence entre deux vitesses de convergence : celle intervenant dans l'approximation de $L_t^{(n)}$, et celle intervenant dans le théorème central limite pour les variables aléatoires de Poisson. Une extension possible de ce travail, et nécessaire pour les applications, consisterait à obtenir des résultats analogues pour $S^{(n)}$. Dans le cas

$\alpha \in (\sqrt{2}, 2)$, où la vitesse est donnée par le théorème central limite, le résultat est probablement identique.

Ce résultat permet enfin de donner un estimateur du taux de mutation θ (à α connu) en fonction de $S_t^{(n)}$, et d'obtenir un intervalle de confiance. À θ connu, il est également possible d'obtenir un estimateur de α .

Notons que ce problème d'estimation des paramètres α et θ fait l'objet d'études actives. On pourra par exemple se référer aux travaux récents de Birkner et Blath [19, 20]

Remarquons enfin que le problème de l'étude de la longueur totale de l'arbre de coalescence est lié à la façon dont les blocs coalescent. Des travaux récents de Beresticky et al. [10] étudient l'évolution de la taille des blocs.

4.3 Modélisation de la diffusion de l'hépatite C dans une population d'usagers de drogue [A10]

Dans le monde, 170 millions de personnes sont porteuses du virus de l'hépatite C (VHC). Ils sont 9 millions en Europe. 75 % de ces personnes développent alors une infection chronique. Près de 20 % de ces personnes sont atteintes de cirrhose du foie, et 5 % sont touchées par un cancer du foie. La contamination se fait par contact sanguin. Les politiques de réduction du risque, en particulier lors des transfusions sanguines, font que dans les pays développés la contamination ne se fait quasiment plus que dans le milieu des utilisateurs de drogue (UD) et plus particulièrement dans celui des UD par voie intraveineuse (UDIV), lors du partage du matériel d'injection.

Les modèles de propagation des maladies contagieuses existent depuis longtemps. On trouve parmi eux les modèles SIR (susceptible-infected-recovered) correspondant aux différents états du patient. Certains de ces modèles sont déterministes tels le modèle de Kermack-McKendrick [75], tandis que d'autres sont stochastiques comme celui de Bartlett [7]. Les modèles de dynamique de transmission du VHC sont cependant très peu nombreux [129]. En outre, leurs résultats ne sont pas explicites, et leurs conclusions sont obtenues par simulations. Avec Coutin et Decreusefond nous proposons dans [A10] un modèle stochastique pour l'étude de l'évolution de la prévalence du VHC dans une sous-population d'UDIV. Cette sous-population est alimentée de façon poissonnienne par des individus, parfois séropositifs, parfois sains. Le nouvel arrivant connaît une période d'initiation, durant laquelle il a une forte probabilité d'échanger du matériel d'injection avec son initiateur. Une fois cette phase passée, l'individu choisit ou non à chaque injection de partager ou

non le matériel avec les autres individus présents dans la sous-population. Enfin, les individus (séropositifs ou non) quittent la sous-population à certains taux (parce qu'ils arrêtent de se droguer, qu'ils guérissent spontanément, ou parce qu'ils décèdent). Nous étudions le comportement du couple $X_t = (X_1(t), X_2(t))$, où $X_1(t)$ (resp. $X_2(t)$) désigne le nombre d'individus séropositifs (resp. séronégatifs).

Le modèle peut être décrit par le schéma de la figure 4.1.

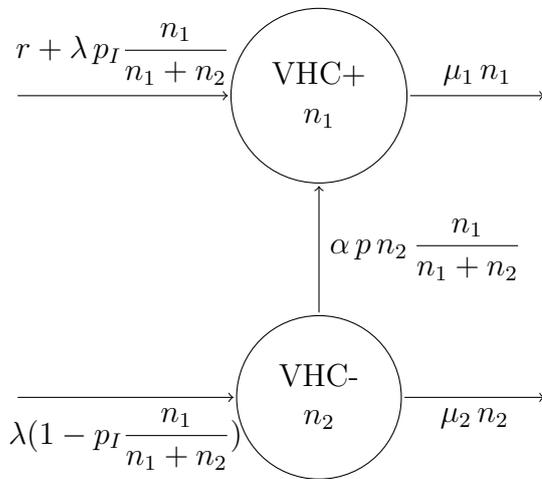


FIG. 4.1 – Transitions du modèle markovien

Dans ce schéma, r désigne le taux auquel arrivent des individus séropositifs, λ le taux auquel arrivent des individus séronégatifs, p_I la probabilité d'être contaminé durant la période d'initiation (quand l'initiateur est séropositif), α la fréquence d'injection, p la probabilité d'être contaminé lors d'un échange avec un individu séropositif, et μ_1 et μ_2 les taux de sortie des individus séropositifs et séronégatifs.

Le processus de Markov X est ergodique. De plus, si $r > 0$, alors il est également irréductible. Malheureusement, en raison de la non-linéarité des transitions, l'obtention d'une expression explicite de la probabilité stationnaire est difficilement envisageable. Comme souvent en théorie des files d'attente (voir par exemple Robert [117]), une solution est d'étudier le comportement du système en « grandes populations », en augmentant les taux d'entrée λ et r .

Le modèle déterministe associé est donné par :

$$(S_r(x^0)) \begin{cases} \psi_1'(t) &= r + \lambda p_I \frac{\psi_1(t)}{\psi_1(t) + \psi_2(t)} - \mu_1 \psi_1(t) + \alpha p \frac{\psi_1(t)\psi_2(t)}{\psi_1(t) + \psi_2(t)}, \\ \psi_1(0) &= x_1^0, \\ \psi_2'(t) &= \lambda(1 - p_I \frac{\psi_1(t)}{\psi_1(t) + \psi_2(t)}) - \mu_2 \psi_2(t) - \alpha p \frac{\psi_1(t)\psi_2(t)}{\psi_1(t) + \psi_2(t)}, \\ \psi_2(0) &= x_2^0. \end{cases}$$

Alors, pour tout $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \setminus \{(0, 0)\}$, il existe une unique solution de $(S_r(x^0))$.

Si $r > 0$, le système différentiel admet un unique point fixe (ξ_1, ξ_2) dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, donné par :

$$r + \lambda - \mu_1 \xi_1 - \mu_2 \xi_2 = 0 \text{ et } \left(\lambda(1 - p_I) - (\alpha p + \mu_2) \xi_2 \right) \xi_1 = \mu_2 \xi_2^2 - \lambda \xi_2. \quad (4.6)$$

De plus, si $x^0 \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0, 0\}$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\psi_1(t), \psi_2(t)) = (\xi_1, \xi_2).$$

Si $r = 0$ et $x_1^0 = 0$, alors :

$$\psi_1(t) = 0 \text{ pour tout } t \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} (\psi_1(t), \psi_2(t)) = (0, \lambda/\mu_2).$$

Si $r = 0$ et $\rho = \alpha p + \mu_2 p_I - \mu_1 > 0$, alors il existe deux points d'équilibre. L'un est $(0, \lambda/\mu_2)$ et l'autre est l'unique solution de (4.6) dont la première coordonnée est strictement positive. Si $x_1^0 > 0$, alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\psi_1(t), \psi_2(t)) = (\xi_1, \xi_2).$$

Si $r = 0$ et $\rho \leq 0$, alors pour tout x^0 tel que $x_1^0 > 0$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\psi_1(t), \psi_2(t)) = (0, \lambda/\mu_2).$$

La solution de $(S_r(x^0))$ apparaît dans l'approximation champs moyen du système stochastique. On suppose que r_N et λ_N dépendent d'un paramètre N et on note $X^N(t)$ le processus de Markov donné par le schéma de la figure 4.1. On suppose que

$$\frac{1}{N} X^N(0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} x^0, \quad \frac{1}{N} r_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} r, \quad \frac{1}{N} \lambda_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \lambda.$$

Si $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ désigne la solution du système déterministe $(S_r(x^0))$, et $Y^N = X^N/N$, alors, pour tout $T > 0$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq T} \|Y^N(t) - \psi(t)\|^2 \right] \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

La démonstration de ce résultat repose sur les techniques classiques d'étude du problème de martingales vérifié par X^N .

La vitesse de convergence est en outre donnée par le théorème central limite suivant. Pour tout $T > 0$, le processus

$$W^N = \sqrt{N}(Y^N - \psi)$$

converge en loi dans l'espace $D([0, T], \mathbb{R}^2)$ vers un processus gaussien centré de matrice de covariance $\Gamma(t)$ donnée par :

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \Gamma_1(t) & \alpha p \int_0^t \frac{\psi_1(s)\psi_2(s)}{\psi_1(s) + \psi_2(s)} ds \\ \alpha p \int_0^t \frac{\psi_1(s)\psi_2(s)}{\psi_1(s) + \psi_2(s)} ds & \Gamma_2(t) \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_1(t) &= rt + \int_0^t \lambda p_I \frac{\psi_1(s)}{\psi_1(s) + \psi_2(s)} + \mu_1 \psi_1(s) + \alpha p \frac{\psi_1(s)\psi_2(s)}{\psi_1(s) + \psi_2(s)} ds \\ \Gamma_2(t) &= \int_0^t \lambda \left(1 - p_I \frac{\psi_1(s)}{\psi_1(s) + \psi_2(s)} \right) + \mu_2 \psi_2(s) + \alpha p \frac{\psi_1(s)\psi_2(s)}{\psi_1(s) + \psi_2(s)} ds. \end{aligned}$$

Le processus X^N converge donc quand N tend vers l'infini vers une fonction déterministe à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Quand t tend vers $+\infty$, cette fonction converge vers un point fixe ψ^∞ . D'autre part, pour tout N , le processus X^N est ergodique et converge donc en loi quand t tend vers $+\infty$. Se pose alors naturellement la question de savoir si la distribution limite converge vers la mesure de Dirac en ψ^∞ quand N tend vers $+\infty$. Notons $\mathbb{P}_{Y^N, \nu}$ la loi du processus $Y^N = N^{-1}X^N$ quand la condition initiale est ν , $\mathbb{P}_{\psi, \nu}$ la loi de la solution de $(S_r(x^0))$ quand on part d'une distribution initiale ν et $Y^N(\infty)$ une variable aléatoire dont la distribution est la loi stationnaire de Y^N . Nous savons que :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_{Y^N(t), \delta_{x^0}} & \xrightarrow{N \rightarrow \infty} & \mathbb{P}_{\psi(t), \delta_{x^0}} \\ t \rightarrow \infty \downarrow & & \downarrow t \rightarrow \infty \\ \mathbb{P}_{Y^N(\infty)} & \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{?} & \delta_{\psi^\infty} \end{array}$$

En utilisant des arguments semblables à ceux de [136] et [59], nous montrons que le diagramme est commutatif dès que $x^0 \neq (0, 0)$.

En conclusion, nous indiquons que la politique la plus efficace pour la réduction de la prévalence du VHC est la diminution du taux avec lequel arrivent de nouveaux séropositifs.

Un travail en cours a pour objet de déterminer les paramètres qui interviennent dans le modèle, en utilisant des données que l'InVS a recueillies dans le cadre du programme Coquelicot [67, 68].

Bibliographie

- [1] R. Abraham and L. Serlet. Representations of the Brownian snake with drift. *Stoch. Stoch. Rep.*, 73(3-4) :287–308, 2002.
- [2] K. B. Athreya and P. E. Ney. *Branching processes*. Springer-Verlag, New York, 1972. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 196.
- [3] Z.-D. Bai and F. Hu. Asymptotics in randomized urn models. *Ann. Appl. Probab.*, 15(1B) :914–940, 2005.
- [4] Z. D. Bai, F. Hu, and L.-X. Zhang. Gaussian approximation theorems for urn models and their applications. *Ann. Appl. Probab.*, 12(4) :1149–1173, 2002.
- [5] P. Baras and M. Pierre. Problèmes paraboliques semi-linéaires avec données mesures. *Applicable Anal.*, 18(1-2) :111–149, 1984.
- [6] P. Baras and M. Pierre. Singularités éliminables pour des équations semi-linéaires. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 34(1) :185–206, 1984.
- [7] M. S. Bartlett. Some evolutionary stochastic processes. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B.*, 11 :211–229, 1949.
- [8] A.-L. Basdevant and C. Goldschmidt. Asymptotics of the allele frequency spectrum associated with the Bolthausen-Sznitman coalescent. *Electron. J. Probab.*, 13 :486–512, 2008.
- [9] M. Benaïm, S. J. Schreiber, and P. Tarrès. Generalized urn models of evolutionary processes. *Ann. Appl. Probab.*, 14(3) :1455–1478, 2004.
- [10] J. Berestycki, N. Berestycki, and V. Limic. The lambda-coalescent speed of coming down from infinity, 2008.
- [11] J. Berestycki, N. Berestycki, and J. Schweinsberg. Beta-coalescents and continuous stable random trees. *Ann. Probab.*, 35(5) :1835–1887, 2007.
- [12] J. Berestycki, N. Berestycki, and J. Schweinsberg. Small-time behavior of beta coalescents. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 44 :214, 2008.

- [13] J. Bertoin. *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [14] J. Bertoin and J.-F. Le Gall. The Bolthausen-Sznitman coalescent and the genealogy of continuous-state branching processes. *Probab. Theory Related Fields*, 117(2) :249–266, 2000.
- [15] J. Bertoin and J.-F. Le Gall. Stochastic flows associated to coalescent processes. *Probab. Theory Related Fields*, 126(2) :261–288, 2003.
- [16] J. Bertoin and J.-F. Le Gall. Stochastic flows associated to coalescent processes. II. Stochastic differential equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(3) :307–333, 2005.
- [17] J. Bertoin and J.-F. Le Gall. Stochastic flows associated to coalescent processes. III. Limit theorems. *Illinois J. Math.*, 50(1-4) :147–181 (electronic), 2006.
- [18] J. Bertoin, J.-F. Le Gall, and Y. Le Jan. Spatial branching processes and subordination. *Canad. J. Math.*, 49(1) :24–54, 1997.
- [19] M. Birkner and J. Blath. Inference for lambda-coalescents. *WIAS preprint 1252*, 2007.
- [20] M. Birkner and J. Blath. Computing likelihoods for coalescents with multiple collisions in the infinitely-many-sites model. *Journal of Mathematical Biology*, 2008.
- [21] M. Birkner, J. Blath, M. Capaldo, A. Etheridge, M. Möhle, J. Schweinsberg, and A. Wakolbinger. Alpha-stable branching and beta-coalescents. *Electron. J. Probab.*, 10 :no. 9, 303–325 (electronic), 2005.
- [22] R. M. Blumenthal and R. K. Gettoor. *Markov processes and potential theory*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 29. Academic Press, New York, 1968.
- [23] E. Bolthausen and A.-S. Sznitman. On Ruelle’s probability cascades and an abstract cavity method. *Comm. Math. Phys.*, 197(2) :247–276, 1998.
- [24] H. Brézis and L. Véron. Removable singularities for some nonlinear elliptic equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 75(1) :1–6, 1980/81.
- [25] C. Cannings. The latent roots of certain Markov chains arising in genetics : a new approach. I. Haploid models. *Advances in Appl. Probability*, 6 :260–290, 1974.
- [26] J.-F. Chamayou and G. Letac. Explicit stationary distributions for compositions of random functions and products of random matrices. *J. Theoret. Probab.*, 4(1) :3–36, 1991.

- [27] P. Chassaing and G. Schaeffer. Random planar lattices and integrated superBrownian excursion. *Probability Theory and Related Fields*, 128(2) :161–212, 2004.
- [28] K. L. Chung, P. Erdős, and T. Sirao. On the Lipschitz’s condition for Brownian motion. *J. Math. Soc. Japan*, 11 :263–274, 1959.
- [29] J. Cox and E. Perkins. Rescaled Lotka–Volterra models converge to super-Brownian motion. *Ann. Probab.*, 33(3) :904–947, 2005.
- [30] J. T. Cox and A. Klenke. Rescaled interacting diffusions converge to super-Brownian motion. *Ann. Appl. Probab.*, 13(2) :501–514, 2003.
- [31] D. A. Dawson. Stochastic evolution equations and related measure processes. *J. Multivariate Anal.*, 5 :1–52, 1975.
- [32] D. A. Dawson. *École d’Été de Probabilités de Saint-Flour XXI—1991*, volume 1541 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1993. Papers from the school held in Saint-Flour, August 18–September 4, 1991, Edited by P. L. Hennequin.
- [33] D. A. Dawson. Measure-valued Markov processes. In *École d’Été de Probabilités de Saint-Flour XXI—1991*, volume 1541 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–260. Springer, Berlin, 1993.
- [34] D. A. Dawson, K. J. Hochberg, and V. Vinogradov. High-density limits of hierarchically structured branching-diffusing populations. *Stochastic Process. Appl.*, 62(2) :191–222, 1996.
- [35] D. A. Dawson and E. A. Perkins. Historical processes. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 93(454) :iv+179, 1991.
- [36] D. A. Dawson and V. Vinogradov. Almost-sure path properties of $(2, d, \beta)$ -superprocesses. *Stochastic Process. Appl.*, 51(2) :221–258, 1994.
- [37] T. Duquesne and J.-F. Le Gall. Random trees, Lévy processes and spatial branching processes. *Astérisque*, (281), 2002.
- [38] R. Durrett. *Probability models for DNA sequence evolution*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 2002.
- [39] R. Durrett and E. A. Perkins. Rescaled contact processes converge to super-Brownian motion in two or more dimensions. *Probab. Theory Related Fields*, 114(3) :309–399, 1999.
- [40] E. B. Dynkin. Green’s and Dirichlet spaces associated with fine Markov processes. *J. Funct. Anal.*, 47(3) :381–418, 1982.
- [41] E. B. Dynkin. A probabilistic approach to one class of nonlinear differential equations. *Probab. Theory Related Fields*, 89(1) :89–115, 1991.

- [42] E. B. Dynkin. Superdiffusions and parabolic nonlinear differential equations. *Ann. Probab.*, 20(2) :942–962, 1992.
- [43] E. B. Dynkin. Superprocesses and partial differential equations. *Ann. Probab.*, 21(3) :1185–1262, 1993.
- [44] E. B. Dynkin. *Diffusions, superdiffusions and partial differential equations*, volume 50 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [45] E. B. Dynkin. *Superdiffusions and positive solutions of nonlinear partial differential equations*, volume 34 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. Appendix A by J.-F. Le Gall and Appendix B by I. E. Verbitsky.
- [46] E. B. Dynkin and S. E. Kuznetsov. Nonlinear parabolic P.D.E. and additive functionals of superdiffusions. *Ann. Probab.*, 25(2) :662–701, 1997.
- [47] N. El Saadi and O. Arino. A stochastic modelling of phytoplankton aggregation. *Revue ARIMA*, 5 :80–94, 2006.
- [48] B. Eldon and J. Wakeley. Coalescent processes when the distribution of offspring number among individuals is highly skewed. *Genetics*, 172 :2621–2633, 2006.
- [49] A. M. Etheridge. *An introduction to superprocesses*, volume 20 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [50] A. M. Etheridge. Survival and extinction in a locally regulated population. *Ann. Appl. Probab.*, 14(1) :188–214, 2004.
- [51] S. N. Ethier and T. G. Kurtz. Fleming-Viot processes in population genetics. *SIAM J. Control Optim.*, 31(2) :345–386, 1993.
- [52] W. J. Ewens. *Mathematical population genetics. I*, volume 27 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2004. Theoretical introduction.
- [53] W. Feller. Diffusion processes in genetics. In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950*, pages 227–246, Berkeley and Los Angeles, 1951. University of California Press.
- [54] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I*. Third edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.
- [55] M. Fukushima. *Dirichlet forms and Markov processes*, volume 23 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

- [56] A. Gnedin and Y. Yakubovich. On the number of collisions in Λ -coalescents. *Electron. J. Probab.*, 12 :no. 56, 1547–1567 (electronic), 2007.
- [57] R. Guoet. Martingale functional central limit theorems for a generalized Pólya urn. *Ann. Probab.*, 21(3) :1624–1639, 1993.
- [58] R. Guoet. Strong convergence of proportions in a multicolor Pólya urn. *J. Appl. Probab.*, 34(2) :426–435, 1997.
- [59] C. Graham. Kinetic limits for large communication networks. In *Modeling in applied sciences*, Model. Simul. Sci. Eng. Technol., pages 317–370. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000.
- [60] I. Higuera, J. Moler, F. Plo, and M. San Miguel. Urn models and differential algebraic equations. *J. Appl. Probab.*, 40(2) :401–412, 2003.
- [61] F. M. Hoppe. The sampling theory of neutral alleles and an urn model in population genetics. *J. Math. Biol.*, 25(2) :123–159, 1987.
- [62] A. Iksanov, A. Marynych, and M. Moehle. On the number of collisions in beta(2,b)coalescents. *submitted*, 2007.
- [63] A. Iksanov and M. Moehle. A probabilistic proof of a weak limit law for the number of cuts needed to isolate the root of a random recursive tree. *Electron. Comm. Probab.*, 12 :28–35, 2007.
- [64] A. Iksanov and M. Mohle. On a random recursion related to absorption times of death markov chains, 2007.
- [65] K. Itô and H. P. McKean, Jr. *Diffusion processes and their sample paths*. Springer-Verlag, Berlin, 1974. Second printing, corrected, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 125.
- [66] S. Janson. Functional limit theorems for multitype branching processes and generalized Pólya urns. *Stochastic Process. Appl.*, 110(2) :177–245, 2004.
- [67] M. Jauffret-Roustide, E. Couturier, Y. Le Strat, and A. Barin Fet. Estimation de la séroprévalence du VIH et du VHC et profils des usagers de drogues en France, étude InVS-ANRS Coquelicot, 2004. *Bull. Epidémiol. Hebd.*, 33 :244–47, 2006.
- [68] M. Jauffret-Roustide, J. Emmanuelli, M. Quaglia, F. Barin, P. Arduin, A. Laporte, and J. Desenclos. Impact of a Harm-Reduction Policy on HIV and Hepatitis C Virus Transmission Among Drug Users : Recent French Data The ANRS-Coquelicot Study. *Substance Use & Misuse*, 41(10-12) :1603–1621, 2006.
- [69] T. Jeulin. *Semi-martingales et grossissement d’une filtration*, volume 833 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.

- [70] T. Jeulin. Sur la convergence absolue de certaines intégrales. In *Seminar on Probability, XVI*, volume 920 of *Lecture Notes in Math.*, pages 248–256. Springer, Berlin, 1982.
- [71] M. Jiřina. On regular conditional probabilities. *Czechoslovak Math. J.*, 9 (84) :445–451, 1959.
- [72] M. Jiřina. Branching processes with measure-valued states. In *Trans. Third Prague Conf. Information Theory, Statist. Decision Functions, Random Processes (Liblice, 1962)*, pages 333–357. Publ. House Czech. Acad. Sci., Prague, 1964.
- [73] N. L. Johnson and S. Kotz. *Urn models and their application*. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1977. An approach to modern discrete probability theory, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- [74] J. B. Keller. On solutions of $\Delta u = f(u)$. *Comm. Pure Appl. Math.*, 10 :503–510, 1957.
- [75] W. O. Kermack and A. G. M’Kendrick. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. Roy. Soc. London*, 115 :700–721, 1927.
- [76] M. Kimura. The number of heterozygous nucleotide sites maintained in a finite population due to steady flux of mutations. *Genetics*, 61(4) :893–903, 1969.
- [77] J. Kingman. Origins of the Coalescent 1974-1982. *Genetics*, 156(4) :1461–1463, 2000.
- [78] J. F. C. Kingman. The coalescent. *Stochastic Process. Appl.*, 13(3) :235–248, 1982.
- [79] A. Klenke. A review on spatial catalytic branching. In *Stochastic models (Ottawa, ON, 1998)*, volume 26 of *CMS Conf. Proc.*, pages 245–263. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [80] D. A. Labutin. Wiener regularity for large solutions of nonlinear equations. *Ark. Mat.*, 41(2) :307–339, 2003.
- [81] J. Lamperti. Continuous state branching processes. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 :382–386, 1967.
- [82] J. Lamperti. The limit of a sequence of branching processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 7 :271–288, 1967.
- [83] J.-F. Le Gall. Brownian excursions, trees and measure-valued branching processes. *Ann. Probab.*, 19(4) :1399–1439, 1991.

- [84] J.-F. Le Gall. A class of path-valued Markov processes and its applications to superprocesses. *Probab. Theory Related Fields*, 95(1) :25–46, 1993.
- [85] J.-F. Le Gall. Hitting probabilities and potential theory for the Brownian path-valued process. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 44(1) :277–306, 1994.
- [86] J.-F. Le Gall. *Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.
- [87] J.-F. Le Gall. Processus de branchement, arbres et superprocessus. In *Development of mathematics 1950–2000*, pages 763–793. Birkhäuser, Basel, 2000.
- [88] J.-F. Le Gall. Random trees and applications. *Probab. Surv.*, 2 :245–311 (electronic), 2005.
- [89] J.-F. Le Gall. Probabilistic approach to a class of semilinear partial differential equations. In *Perspectives in nonlinear partial differential equations*, volume 446 of *Contemp. Math.*, pages 255–272. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [90] G. Letac. A contraction principle for certain Markov chains and its applications. In *Random matrices and their applications (Brunswick, Maine, 1984)*, volume 50 of *Contemp. Math.*, pages 263–273. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [91] P.-L. Lions. Isolated singularities in semilinear problems. *J. Differential Equations*, 38(3) :441–450, 1980.
- [92] C. Loewner and L. Nirenberg. Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations. In *Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers)*, pages 245–272. Academic Press, New York, 1974.
- [93] M. Marcus and L. Véron. Uniqueness and asymptotic behavior of solutions with boundary blow-up for a class of nonlinear elliptic equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 14(2) :237–274, 1997.
- [94] M. Marcus and L. Véron. The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations : the subcritical case. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 144(3) :201–231, 1998.
- [95] M. Marcus and L. Veron. The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations : the supercritical case. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 77(5) :481–524, 1998.

- [96] M. Marcus and L. Véron. Semilinear parabolic equations with measure boundary data and isolated singularities. *J. Anal. Math.*, 85 :245–290, 2001.
- [97] M. Marcus and L. Véron. Capacitary estimates of solutions of a class of nonlinear elliptic equations. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(11) :913–918, 2003.
- [98] M. Marcus and L. Véron. Capacitary representation of positive solutions of semilinear parabolic equations. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 342(9) :655–660, 2006.
- [99] M. Marcus and L. Véron. Maximal solutions of the equation $\Delta u = u^q$ in arbitrary domains. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344(5) :299–304, 2007.
- [100] M. Marcus and L. Veron. The precise boundary trace of positive solutions of the equation $\Delta u = u^q$ in the supercritical case. In *Perspectives in nonlinear partial differential equations*, volume 446 of *Contemp. Math.*, pages 345–383. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [101] C. Martin, L. Allen, and M. Stamp. Urn model simulations of a sexually transmitted disease epidemic. *Applied Mathematics and Computation*, 71(2-3) :179–199, 1995.
- [102] M. Möhle. On the number of segregating sites for populations with large family sizes. *Adv. in Appl. Probab.*, 38(3) :750–767, 2006.
- [103] P. A. P. Moran. Random processes in genetics. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 54 :60–71, 1958.
- [104] A. Morris, J. Whittaker, and D. Balding. Fine-Scale Mapping of Disease Loci via Shattered Coalescent Modeling of Genealogies. *The American Journal of Human Genetics*, 70(3) :686–707, 2002.
- [105] B. Mselati. Classification et représentation probabiliste des solutions positives d’une équation elliptique semi-linéaire. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(9) :733–738, 2002.
- [106] B. Mselati. Classification and probabilistic representation of the positive solutions of a semilinear elliptic equation. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 168(798), 2004.
- [107] R. Osserman. On the inequality $\Delta u \geq f(u)$. *Pacific J. Math.*, 7 :1641–1647, 1957.
- [108] E. Perkins. Polar sets and multiple points for super-Brownian motion. *Ann. Probab.*, 18(2) :453–491, 1990.
- [109] E. Perkins. Measure-valued branching-diffusions with spatial interactions. *Probab. Theory Related Fields*, 94(2) :189–245, 1992.

- [110] E. Perkins. On the martingale problem for interactive measure-valued branching diffusions. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 115(549) :vi+89, 1995.
- [111] E. Perkins. Dawson-Watanabe superprocesses and measure-valued diffusions. In *Lectures on probability theory and statistics*, volume 1781 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 125–329. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Lectures from the 29th Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 8–24, 1999, Edited by Pierre Bernard.
- [112] E. A. Perkins. Conditional Dawson-Watanabe processes and Fleming-Viot processes. In *Seminar on Stochastic Processes, 1991 (Los Angeles, CA, 1991)*, volume 29 of *Progr. Probab.*, pages 143–156. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1992.
- [113] E. A. Perkins. Measure-valued branching diffusions and interactions. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 1036–1046, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [114] J. Pitman. Coalescents with multiple collisions. *Ann. Probab.*, 27(4) :1870–1902, 1999.
- [115] J. Pitman. *Combinatorial stochastic processes*, volume 1875 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Lectures from the 32nd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 7–24, 2002, With a foreword by Jean Picard.
- [116] J. W. Pitman and M. Yor. Some divergent integrals of Brownian motion. *Adv. in Appl. Probab.*, (suppl.) :109–116, 1986.
- [117] P. Robert. *Stochastic networks and queues*, volume 52 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, french edition, 2003. Stochastic Modelling and Applied Probability.
- [118] S. Sagitov. The general coalescent with asynchronous mergers of ancestral lines. *J. Appl. Probab.*, 36(4) :1116–1125, 1999.
- [119] J. Schweinsberg. Coalescent processes obtained from supercritical Galton-Watson processes. *Stochastic Process. Appl.*, 106(1) :107–139, 2003.
- [120] Y. C. Sheu. A Hausdorff measure classification of G -polar sets for the superdiffusions. *Probab. Theory Related Fields*, 95(4) :521–533, 1993.
- [121] Y.-C. Sheu. On a problem of Dynkin. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(12) :3721–3728, 1999.
- [122] M. L. Silverstein. A new approach to local times. *J. Math. Mech.*, 17 :1023–1054, 1967/1968.
- [123] G. Slade. Scaling limits and super-Brownian motion. *Notices AMS*, 49(9) :1056–1067, 2002.

- [124] R. Tribe. *Path properties of superprocesses*. PhD thesis, Univ. British Columbia., 1989.
- [125] R. van der Hofstad and G. Slade. Convergence of critical oriented percolation to super-Brownian motion above $4+1$ dimensions. *Annales de l'Institut Henri Poincaré/Probabilités et statistiques*, 39(3) :413–485, 2003.
- [126] A. D. Venttsel. Infinitesimal characteristics of Markov processes in a function space, which describe the past. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 30(4) :625–639, 1985.
- [127] L. Véron. Singular solutions of some nonlinear elliptic equations. *Nonlinear Anal.*, 5(3) :225–242, 1981.
- [128] L. Véron. *Singularities of solutions of second order quasilinear equations*, volume 353 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, Harlow, 1996.
- [129] P. Vickerman, M. Hickman, and A. Judd. Modelling the impact on hepatitis c transmission of reducing syringe sharing : London case study. *Int J Epidemiol.*, 36 :396–405, 2007.
- [130] S. Watanabe. A limit theorem of branching processes and continuous state branching processes. *J. Math. Kyoto Univ.*, 8 :141–167, 1968.
- [131] S. Watanabe. On two dimensional Markov processes with branching property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 136 :447–466, 1969.
- [132] S. Watanabe. Branching diffusions (superdiffusions) and random snakes. In *Trends in probability and related analysis (Taipei, 1996)*, pages 289–304. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.
- [133] S. Watanabe. Killing operations in super-diffusions by Brownian snakes. In *Trends in probability and related analysis (Taipei, 1998)*, pages 177–190. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1999.
- [134] H. Watson and F. Galton. On the probability of extinction of families. *Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland*, 4 :138–144, 1875.
- [135] G. A. Watterson. On the number of segregating sites in genetical models without recombination. *Theoret. Population Biology*, 7 :256–276, 1975.
- [136] W. Whitt. Blocking when service is required from several facilities simultaneously. *AT&T Tech. J.*, 64(8) :1807–1856, 1985.
- [137] N. Wiener. Certain notion in potential theory. *J. Math. Phys.*, 3 :24–51, 1924.

- [138] N. Wiener. The Dirichlet problem. *J. Math. Phys.*, 3 :127–146, 1924.
- [139] S. Wright. Evolution in Mendelian populations. *Genetics*, 16 :97–159, 1931.

Bibliographie

- [A1] J.-S. Dhersin and J.-F. Le Gall. Wiener's test for super-Brownian motion and the Brownian snake. *Probab. Theory Related Fields*, 108(1) :103–129, 1997.
- [A2] J.-S. Dhersin and J.-F. Le Gall. Kolmogorov's test for super-Brownian motion. *Ann. Probab.*, 26(3) :1041–1056, 1998.
- [A3] J.-S. Dhersin. Lower functions for the support of super-Brownian motion. *Stochastic Process. Appl.*, 78(2) :145–154, 1998.
- [A4] J.-F. Delmas and J.-S. Dhersin. Characterization of G -regularity for super-Brownian motion and consequences for parabolic partial differential equations. *Ann. Probab.*, 27(2) :731–750, 1999.
- [A5] J.-S. Dhersin and L. Serlet. A stochastic calculus approach for the Brownian snake. *Canad. J. Math.*, 52(1) :92–118, 2000.
- [A6] J.-F. Delmas and J.-S. Dhersin. Kolmogorov's test for the Brownian snake. *Ann. Probab.*, 29(1) :305–316, 2001.
- [A7] J.-F. Delmas and J.-S. Dhersin. Super-Brownian motion with interactions. *Stochastic Process. Appl.*, 107(2) :301–325, 2003.
- [A8] R. Abraham, J. S. Dhersin, and B. Ycart. Strong convergence for urn models with reducible replacement policy. *J. Appl. Probab.*, 44(3) :652–660, 2007.
- [A9] J.-F. Delmas, J.-S. Dhersin, and A. Siri-Jégousse. Asymptotic results on the length of coalescent trees. *Ann. Appl. Probab.*, 18(2) :997–1025, 2008.
- [A10] L. Coutin, L. Decreasefond, et J.-S. Dhersin. A Markov model for the spread of hepatitis C. *arXiv :0809.1824*, 2008.