Exercice 1.[Vrai-Faux]

1. Un déterminant d'ordre n est défini par des déterminants de sous-matrices d'ordre $n-1$.
2. Le cofacteur de l'élément a_{ij} d'une matrice A, est la matrice A_{ij} obtenue en supprimant dans la matrice A sa ième ligne et sa jème colonne.
3. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est la somme des coefficients diagonaux.
4. Soient A et B deux matrices d'ordre $n \geq 1$. Alors $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.
5. Le déterminant d'une matrice carrée A est le produit des pivots d'une forme échelonnée U de A multipliée par $(-1)^r$, où r est le nombre d'échanges de lignes effectués pour échelonner A.
6. Soit une matrice ayant deux colonnes égales. Alors son déterminant est nul.
7. Soit A une matrice carrée. Alors $\det(5A) = 5\det(A)$.
8. Si $A^3 = 0$, alors $\det A = 0$.

Exercice 2. Soit A une matrice carrée.

1. Montrer que si A est inversible, alors $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.
2. Soit P une matrice carrée inversible. Montrer que $\det(PAP^{-1}) = \det A$.
3. Montrer que si $A^T A = I$, alors $\det A = \pm 1$.
4. Montrer que $\det(A^T A) \geq 0$.

Exercice 3. Dans cette exercice A est une matrice carrée réelle et A' est obtenue à partir de A à l'aide d'une opération élémentaire. Dans chaque cas, identifiez l'opération élémentaire, puis indiquer la conséquence de cette opération sur le déterminant.

i) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$

ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5+3k & 6+4k \end{pmatrix}, \ k \in \mathbb{R}.$

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 8 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} k & k & k \\ -3 & 8 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \ k \in \mathbb{R}.$

Exercice 4. Calculer le déterminant des matrices suivantes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & -7 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Montrer que les systèmes ci-dessous ont une unique solution.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ y + 4z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + y - z - t = 0 \\ x - y - z + t = 2 \\ x - y + z - t = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ x + y - 3z = 1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

Exercice 6. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre α les matrices suivantes sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \alpha & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Lorsque A est inversible, calculer A^{-1}.

Exercice 7. Résoudre par la règle de Cramer les systèmes ci-dessous.

$$\begin{cases} 5x + 7y = 3 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 7 \\ -3x + z = -8 \\ y + 2z = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ -x + 2z = 2 \\ 3x + y + 3z = -2 \end{cases}$$

Exercice 8.

1. Déterminer l'aire du parallélogramme dont les sommets sont $(0,0),(5,2),(6,4),(11,6)$.
2. Déterminer l'aire du parallélépipède dont les sommets sont $(0,0,0),(1,2,4),(1,0,-2),(7,1,0)$.
3. Soit S le parallélogramme défini par les vecteurs $b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer l'aire de l'image de S par l'application $x \mapsto Ax$.
4. Établir une formule donnant l'aire d'un triangle.

Exercice 9. Soit V la matrice de Vandermonde définie par

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\det V_3 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.
2. Montrer que $\det V_n = \Pi_{1 \le i,j \le n}(x_j - x_i)$.

Exercice 10. Un berger possède un troupeau de 101 moutons et remarque par hasard la propriété suivante : pour chaque mouton, il peut trouver une façon de scinder le troupeau des 100 autres moutons en deux troupeaux de 50 moutons et de même poids total. Il en déduit que tous les moutons ont le mˆeme poids. Comment a-t-il fait ?

1 Questions préliminaires.

a. Montrer par récurrence que le déterminant de toute marice carrée, dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est un nombre impair.

b. En déduire qu'une matrice de cette forme est inversible.

2 Résolution de l'énigme du berger. On note B la matrice carrée de taille 101 construite de la manière suivante :
On numérote les moutons de 1 à 101. Quand le berger retire le $i$ème mouton du troupeau, il sépare alors le reste du troupeau en deux troupeaux de même taille (troupeau A, troupeau B) et de même poids. On note alors $B_{i,j}$ les coefficients de la $i$ème ligne de la matrice B de la façon suivante :

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si le } j - i\text{ème mouton se trouve dans le troupeau } A \\ 2 & \text{si le } j - i\text{ème mouton se trouve dans le troupeau } B. \end{cases}$$

On note X le vecteur constitué des poids $p_i, i = 1, \cdots 101$, des moutons $X = (p_1, p_2, \cdots, p_{101})$.

a. On note $v(1,1,\cdots,1)$. À quoi correspondent les lignes du vecteur Bv ? En déduire le résultat du produit Bv.

b. À quoi correspondent les lignes du vecteur $w = BX$?

c. Montrer que B est inversible.

d. Montrer que $BX = \lambda Bv$, avec λ un scalaire à déterminer. En déduire X et résoudre l'énigme du berger.