Exercice 1.

1. Le scalaire 5 est-il une valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$?

2. Si v est un vecteur propre d'une matrice A associé à la valeur propre λ, que vaut $A^3 v$?

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

1. Montrer que 2 est une valeur propre de A.

2. Déterminer une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2.

Exercice 3.

1. Soit A une matrice inversible et λ une valeur propre de A. Montrer que λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}.

2. Montrer que si A^2 est une matrice nulle, alors 0 est la seule valeur propre de A.

3. Montrer que le déterminant d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres.

Exercice 4. Les matrices $A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, sont-elles diagonalisables ?

Exercice 5. Soit $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ une diagonalisation de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Donner les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre.

Exercice 6. Diagonaliser les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.[Vrai-Faux]

1. Une matrice est inversible si et seulement si toutes ses valeurs propres sont non nulles.

2. Deux vecteurs propres linéairement indépendants sont associés à des valeurs propres disctinctes.

3. Les valeurs propres d'une matrice sont ses éléments diagonaux.

4. Une matrice d'ordre n est diagonalisable si elle possède n vecteurs propres.

5. Si une matrice est inversible alors elle est diagonalisable.

6. Si une matrice d'ordre n est diagonalisable, alors elle a n valeurs propres disctinctes.

Exercice 8. Soit A une matrice carrée d'ordre n. On définit l'exponentielle d'une matrice par

$$\begin{aligned}\exp(A) &= I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k\end{aligned}$$

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a. Calculer $\exp(A)$ et $\exp(B)$. (*une matrice, A, pour laquelle il existe un entier k tel que $A^k = 0$ est appelée matrice nilpotente.*)

   b. A-t-on $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$?

   c. Montrer que $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Diagonaliser A.

   b. En déduire $\exp(A)$.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}$. Examinez le comportement à long terme du sytème dynamique défini par $x_{k+1} = Ax_k$, avec $x_0 = (0.6, 0.4)$.

Exercice 10. On considère un système proie-prédateur dont la matrice est $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -p & 1.2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si $p = 0.325$ les deux espèces croissent.
2. Montrer que si $p = 0.5$ les deux espèces peuvent périr.
3. Trouver une valeur de p pour laquelle les deux espèces tendent vers un nombre constant d'individus.

Exercice 11. Soit A une matrice d'ordre 3 ayant $3, 4/5$ et $3/5$ pour valeurs propres et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ des vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

1. Calculer la solution du système $x_{k+1} = Ax_k$ lorsque $x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. Que se passe-t-il lorsque $k \to \infty$?
3. Quelle est la nature de l'origine (attracteur, répulsif, point selle) ?

Exercice 12. Déterminer la nature de l'origine (attracteur, répulsif, point selle) du du système dynamique $x_{k+1} = Ax_k$ lorsque

1. $A = \begin{pmatrix} 17 & -3 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$,
3. $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$.