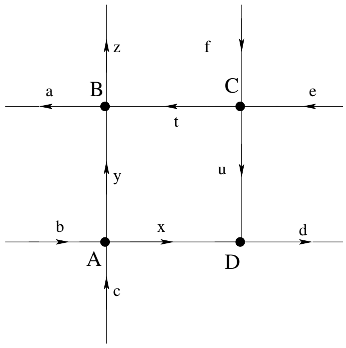
Exercice 1. Annie et Arthur sont frère et soeur. Annie a autant de frères que de soeurs mais Arthur a deux fois plus de soeurs que de frères. Combien y-a-t-il d'enfants dans cette famille ?

Exercice 2. Un *réseau* est ensemble de points points appelés *nœuds*, reliés entre eux par des arcs appelés *branches.* Les sens du flux dans chaque branche est indiqué et l'intensité du flux est désigné par une variable.
L'hypothèse de base qui régit la circulation dans un circuit est que le flux entrant est égal au flux sortant et que le flux total qui arrive en un nœud est égal au flux total qui le quitte. Un flux négatif dans une branche du réseau signifie que la circulation s'y effectue dans le sens opposé à celui indiqué sur le modèle.
La schéma ci-dessous montre comment le trafic s'écoule (en nombre de véhicules par heure) dans plusieurs rues à sens unique dans une ville. Écrire le système d'équations linéaires décrivant ce schéma et donner son ensemble de solutions. Commenter.



Exercice 3. Au début du semestre, 55 étudiants sont inscrits au cours de maths. Les étudiants sont répartis en 2 groupes A et B ayant lieu à deux horaires différents. Deux semaines plus tard, en raison de conflits d'emploi du temps, 20% des étudiants du groupe A sont passés dans le groupe B, tandis que 30% des étudiants du groupe B sont passés dans le groupe A. Il résulte de ces changements que le groupe A a perdu 4 étudiants.

Combien y-avait-il d'étudiants dans chaque groupe au début du semestre ? (aucun étudiant n'a abandonné le cours ni ne s'est inscrit en retard.)

Exercice 4. Parmi les équations suivantes lesquelles sont linéaires ?

1) $x_1^2 + x_2^2 = 0$, 2) $\sqrt{3}x_1 + (1-\sqrt{2})x_2 + 3 = \pi x_3$, 3) $\sqrt{3}x_1 + 1 - \sqrt{2x_2} = \pi x_2$, 4) $x_1 x_2 + x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$.

Exercice 5. Déterminer, à l'aide d'une représentation graphique, si les systèmes suivants admettent une unique solution, une infinité de solutions ou aucune solution.

$$\begin{cases} x+y & = & 1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y & = & \frac{4}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-3y & = & 9 \\ x+y & = & 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y & = & 3 \\ 3x-3y & = & 9 \end{cases}$$

Exercice 6. Soient α et β des réels et soit l'équation linéaire suivante :

(E) $$\alpha x + \beta y = 1.$$

1) Pour quelles valeurs des paramètres α et β la droite d'équation (E) est-elle parallèle à la droite d'équation $-x+y=-1$?

2) Sans résoudre le système, déterminer les valeurs de α et β telles que le système

$$\begin{cases} -x & + & y & = & -1 \\ \alpha x & + & \beta y & = & 1 \\ (\alpha-1)x & + & (\beta+1)y & = & 0 \end{cases}$$

a) admette une infinité de solutions,

b) n'admette aucune solution,

c) admette une solution unique.

Exercice 7. On considère les matrices ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Identifier les matrices échelonnées et échelonnées réduites.

2) On suppose que ces matrices sont les matrices augmentées de systèmes linéaires.

   a) Déterminer les variables libres et liées des systèmes linéaires ainsi définis.

   b) En déduire si les systèmes linéaires possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

Exercice 8. Sans faire de calculs, déterminer lesquels des systèmes homogènes suivants ont d'autres solutions que la solution triviale.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ & & y & - & 8z & = & 0 \\ & & & & 4z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 0 \\ 6x & - & 4y & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & + & 4t & = & 0 \\ & & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 9. Résoudre les systèmes suivants à l'aide de l'algorithme de Gauss et préciser dans chaque cas les variables libres et liées.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 7 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & 17 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 14 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & 4 \\ 3x & + & 8y & - & 13z & = & 7 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 2z & = & 6 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 \\ x & - & y & + & 3z & + & 2t & = & 2 \\ -x & + & y & - & z & & & = & -6 \\ -3x & + & 3y & - & 4z & - & 10t & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & + & 4t & = & 2 \\ 2x & + & 5y & - & 2z & + & t & = & 1 \\ 5x & + & 12y & - & 7z & + & 6t & = & 7 \end{array}\right.$$

Exercice 10. Déterminer les valeurs de k de sorte que les systèmes suivants admettent, (i) une unique solution, (ii) aucune solution, (iii) une infinité de solutions.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & 1 \\ x & - & y & + & kz & = & -2 \\ & & ky & + & 4z & = & 6 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} kx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ky & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & kz & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 11. Quelles conditions doivent vérifier $a\,, b$ et c pour que le système suivant d'inconnues $x\,, y$ et z admette une solution.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b \\ x & - & 2y & + & 7z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 12. Trouvez un polynôme de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1,p), (2,q), (3,r)$ où p, q et r sont des nombres arbitraires. Existe-t-il toujours un tel polynôme pour n'importe quelles valeurs de p, q, r ?

Exercice 13. Calculer le nombre d'opérations élémentaires nécessaires à la résolution d'un système linéaire à 3 équations et 3 inconnues. Généraliser à un système quelconque.