Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? Si oui, (a) calculer la matrice associée dans les bases canoniques, (b) déterminer leur noyau et (c) en déduire si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

$$f_1 : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow 2x^2 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow 2x-3 \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow (-x, 3y+x) \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow 3x+4y \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longrightarrow (2x+y-z, x) \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longrightarrow (xy+x-z, x) \end{array}$$

Exercice 2. Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad c) \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

(On précisera dans chaque cas n et m.)

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x,y) = (5x-6y, 3x-4y).$$

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \big(e_1, e_2\big)$ avec $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.
3. a. On pose $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (2,1)$. Montrer que $\mathcal{B}' = \big(u_1, u_2\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Que peut-on observer ?
4. Determiner $\operatorname{Ker} f$.
5. En déduire $\dim \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{rg} f$.
6. À l'aide de la question précédente, déterminer si l'application f est injective et/ou surjective.
7. Donner une base de l'image.

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Quelle est la matrice de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
2) Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur l'axe des abscisses dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
3) Quelle est la matrice de la rotation d'angle θ et de centre O dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
4) Quelle est la matrice de l'homothétie de centre O et de rapport k dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
5) Quelle est la matrice de la symétrie centrale de centre O dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
6) Est-ce qu'une translation est une application linéaire ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x,y,z) = (x-y+2z, 2z, 2z)\,.$$

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.
3. a. Montrer que $\mathcal{B}' = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Que peut-on observer ?
4. Determiner $\operatorname{Ker} f$.
5. En déduire $\dim \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{rg} f$.
6. À l'aide de la question précédente, déterminer si l'application f est injective et/ou surjective.
7. Donner une base de l'image.

Exercice 6. Même exercice que précédement mais ou $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est définie par

$$f(x, y, z) = (-x + 2y - z, y - z, 0)\,.$$

Exercice 7. Soient E_1, E_2 et E_3 trois s.e.v. de $\mathbb{R}^{m_1}, \mathbb{R}^{m_2}$ et $\mathbb{R}^{m_3}$ respectivement. Soient $f : E_1 \longrightarrow E_2$ et $g : E_2 \longrightarrow E_3$ deux applications linéaires. Montrer que l'application $g \circ f$ est aussi une application linéaire.

Exercice 8.

1) Soit f une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la dimension du noyau de f ?
2) Soit g une application injective de $\mathbb{R}^{26}$ dans $\mathbb{R}^{100}$. Quelle est la dimension de l'image de g ?
3) Existe-t-il une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}^{50}$ et $\mathbb{R}^{72}$?