Chapitre 4 : Algèbre matricielle

Notations. On note $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Lorsque $m = n$, on parle de **matrices carrées** et note simplement $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

– Dans une matrice carrée $A = (a_{ij})$ de taille $m \times m$ les coefficients a_{ii} pour $i = 1, \cdots, m$ forment ce que l'on appelle la **diagonale** de la matrice.
– Une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ c'est–à–dire hors de la diagonale, est appelée **matrice diagonale**.
– Une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$, c'est–à–dire en–dessous de la diagonale, est appelée **matrice triangulaire supérieure**.
  Les matrices échelonnées sont triangulaires supérieures.
– Une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ dès que $i < j$, c'est–à–dire au–dessus de la diagonale, est appelée **matrice triangulaire inférieure**.

1 Opérations linéaires sur les matrices

Définition 1.1

On définit sur $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$
– une loi de composition interne appelée **addition** :
  Pour tous $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, la matrice $A+B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, pour $i = 1, \cdots, m$ et $j = 1, \cdots, n$.
– une loi de composition externe appelée **multiplication par un scalaire** :
  Pour tout $A = (a_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, et λ dans $\mathbb{R}$ la matrice λA est la matrice de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$, pour $i = 1, \cdots, m$ et $j = 1, \cdots, n$.

Théorème 1.1

L'ensemble $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2 Produit matriciel

Définition 2.2

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Notons $b_1, b_2, \cdots, b_p \in \mathbb{R}^n$ les p colonnes de B. On définit le produit AB comme étant la matrice $m \times p$ dont les colonnes sont données par

$$AB = (Ab_1 \ Ab_2 \ \cdots \ Ab_p).$$

Théorème 2.2

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on a $(AB)x = A(Bx)$.

Théorème 2.3

On a (en supposant les produits matriciels définis)

i) $(A + A')B = AB + A'B$ et $A(B + B') = AB + AB'$.
ii) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
iii) $(AB)C = A(BC)$.

Les matrices identités sont des éléments neutres à gauche et à droite pour le produit matriciel.

Théorème 2.4

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, on a $I_m A = A I_n = A$.

Théorème 2.5

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Alors on a

$$(AB)_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},$$

pour $i = 1, \cdots, m$ et $k = 1, \cdots, p$.

Remarque. Le produit matriciel **N**'est **PAS** commutatif :
- le produit AB peut être défini mais pas le produit BA,
- les produits AB et BA peuvent être définis et de même taille, en général $AB \neq BA$.

Remarque. La multiplication des matrices n'étant pas commutative $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ mais $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

3 Cas où $m = n$, matrices inversibles

Définition 3.3

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit les puissances successives de A par
- $A^0 = I_n$,
- $A^{p+1} = A^p A = A A^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Définition 3.4

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **inversible** si et seulement si il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AA' = A'A = I_n.$$

Naturellement, on note $A' = A^{-1}$.

Théorème 3.6

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Théorème 3.7 (Lien avec les systèmes linéaires)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $b \in \mathbb{R}^n$. Le système linéaire $n \times n$, $Ax = b$ admet une solution et une seule si et seulement si A est inversible. Dans ce cas on a

$$x = A^{-1}b.$$

4 Lien avec les applications linéaires

Dans tout ce qui suit E_i est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}'_i$ deux bases de cet espace.

Théorème 4.8

Soient f et g deux applications linéaires de E_1 dans E_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $A_{(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)}$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et soit $B_{(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)}$ la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
Alors
– la matrice de $f+g$ dans ces mêmes bases est $A_{(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)} + B_{(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)}$,
– la matrice de λf est $\lambda A_{(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)}$.
Soit f une application linéaire de E_1 dans E_2 de matrice $A_{(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)}$.
Soit g une application linéaire de E_2 dans E_3 de matrice $B_{(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)}$.
Alors la matrice de $g \circ f$ dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$ est

$$B_{(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)} A_{(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)}.$$

Remarque. La multiplication des matrices n'est que la traduction dans des bases de la composition des applications linéaires.

Théorème 4.9

f est une application linéaire inversible de E_1 dans E_1 si et seulement si sa matrice $A = A_{(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1)})$ dans la base $\mathcal{B}_1$ est inversible. Dans ce cas, la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}_1$ est A^{-1}.

5 Inversion d'une matrice par l'algorithme de Gauss-Jordan

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche à déterminer $A^{-1} = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ telle que $AA^{-1} = I_n$. Ceci revient à résoudre n systèmes linéaires de la forme $Ab_j = e_j, j = 1, \cdots, n$. Ce qui revient à considérer n matrices augmentées de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{pmatrix}$$

Les n premières colonnes de ces matrices augmentées étant les mêmes on peut considérer uniquement la matrice augmentée suivante

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

Principe de la méthode : effectuer des opérations élémentaires sur cette matrice augmentée jusqu'à faire apparaître la matrice identité dans le bloc de gauche, c'est–à–dire

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & b_{j1} & \cdots & b_{jj} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

Ainsi, le bloc de gauche est la matrice inverse A^{-1}.

S'il est impossible d'obtenir la matrice identité dans le bloc de droite cela signifie que A n'est pas inversible et on dira alors que la matrice A est singulière.