Chapitre 3 : Applications linéaires

Dans tout ce qui suit E_i désigne un sev de $\mathbb{R}^{m_i}$ de dimension n_i.

1 Quelques définitions

Définition 1.1

On dit qu'une application $f : E_1 \longrightarrow E_2$ est une application linéaire si et seulement si

i) Pour tous x, y dans E_1, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

ii) Pour tout x dans E_1 et tout λ dans $\mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Remarque. Toute application linéaire satisfait $f(0) = 0$.

Image, noyau, rang

Soit f une application linéaire de E_1 dans E_2.

Définition 1.2

On appelle noyau de f l'ensemble

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E_1; f(x) = 0\}.$$

On appelle image de f l'ensemble

$$\operatorname{Im} f = \{y \in E_2; \exists x \in E_1, y = f(x)\} = f(E_1).$$

Proposition 1.1

– Le noyau de f est un sev de E_1.
– L'image de f est un sev de E_2.

Rappels sur l'injectivite et la surjectivite d'une application

Théorème 1.1

– L'application f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
– L'application f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = E_2$.

Remarque. Pour démontrer qu'une application linéaire est injective, on utilisera TOUJOURS la caractérisation par le noyau et non pas la définition générale de l'injectivité.

Définition 1.3

On définit le rang de l'application f par

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f.$$

Proposition 1.2

– $\operatorname{rg} f \leq \min(\dim E_1, \dim E_2)$.
– L'application f est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim E_2$.
– L'application f est injective si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim E_1$.

2 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Théorème 2.2 (Lien entre matrice et applications linéaires.)

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de E_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de E_2. Pour toute application linéaire de E_1 dans E_2, il existe une unique matrice $A_{(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)}$ de taille $m \times n$ telle que

$$(f(x))_{\mathcal{B}_1} = A(x)_{\mathcal{B}_1}.$$

La matrice A est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Théorème 2.3

Soient B_1 une base de E_1 et B_2 une base de E_2, f une application linéaire de E_1 dans E_2 et A sa matrice dans ces bases. Alors

i) L'application f est injective si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes si et seulement si A a une position de pivot par colonne.
ii) L'application f est surjective si et seulement si les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$ si et seulement si A a une position de pivot par ligne.

Théorème 2.4 (du rang)

Soit f une application linéaire de E_1 dans E_2, alors

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim E_1.$$