Déterminants

Dans tout ce qui suit nous ne considérerons que des matrices carrées.

1 Cas d'une matrice d'ordre 2

Proposition 1.1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $ad - bc \neq 0$ alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Par contre, si $ad - bc = 0$, A n'est pas inversible.

Définition 1.1

Le réel $ad - bc$ est appelé **déterminant** de la matrice A et on note

$$\det A = ad - bc.$$

2 Cas d'une matrice d'ordre 3

Échelonnons la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{pmatrix}, \ A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{pmatrix}.$$

Comme A est inversible l'élément en position $(2,2)$ ou $(3,2)$ de $A^{(2)}$ est non nul. Supposons que l'élément en position $(2,2)$ est non nul. Alors,

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix},$$

avec $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

Définition 2.1

Le réel Δ est appelé **déterminant** de la matrice A et on note

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Théorème 2.1

Une matrice d'ordre 3 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

En notant, A_{ij} la matrice d'ordre 2 obtenue en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne de A, on a

$$\Delta = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

Trilinéarité du déterminant d'une matrice d'ordre 3

Si A est une matrice 3×3, on peut considérer $\det A$ comme une fonction des 3 vecteurs colonnes de A notés a_1, a_2 et a_3. On définit l'application T_1 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par

$$T_1(x) = \det(x\ a_2\ a_3).$$

Autrement dit, on fait varier la 1ère colonne de A. L'application T est linéaire, i.e.

i) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

ii) $T(u+v) = T(u) + T(v)$, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^3$.

De même les applications $T_2(x) = \det(a_1\ x\ a_3)$ et $T_3(x) = \det(a_1\ a_2\ x)$ sont linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2.2

Le déterminant est l'unique application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ linéaire par rapport à chaque vecteur-colonne, les autres étant fixées.

3 Cas d'une matrice d'ordre n quelconque

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice d'ordre n, avec $n \geq 2$.
On peut définir le déterminant d'une matrice d'ordre n à partir des sous-matrices d'ordre $(n-1)$.
Soit A_{ij} la matrice d'ordre $(n-1)$ obtenue en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne de A.

Définition 3.1

Soit $n \geq 2$. Le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ d'ordre n est défini par

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}.$$

Théorème 3.1

Le déterminant est une forme multilinéaire alternée au sens suivant :

i) Le déterminant est l'unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ linéaire par rapport à chaque vecteur-colonne, les autres étant fixés.

ii) Le déterminant d'une matrice change de signe lorsque l'on permute deux colonnes adjacentes de la matrice.

4 Développement en cofacteurs

Définition 4.1

Soit A une matrice do'ordre n.
– On appelle **mineur de** A relatif à a_{ij} le déterminant $\Delta_{ij} = \det A_{ij}$.
– On appelle **cofacteur de** A relatif à a_{ij} le nombre $\operatorname{cof}(a_{ij}) = (1)^{i+j} \Delta_{ij}$.

Proposition 4.1

Le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ d'ordre $n \geq 1$ alors, on obtient $\det A$ suivant un développement en cofacteurs par rapport à

i) la ième ligne : $\det A = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{cof}\,(a_{ij})$, $i = 1, \cdots, n$,

ii) la jème colonne : $\det A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathrm{cof}\,(a_{ij})$, $j = 1, \cdots, n$.

Remarque : Le caclul du déterminant d'une matrice d'ordre n se ramène au calcul de $n!$ déterminants d'ordre 1. Ainsi, pour une matrice d'ordre 25 on a $25! \approx 1,5 * 10^{25}$. Un ordinateur téraflops, (10^{12} opérations en virgule flottante par seconde) aurait besoin d'au moins 500000 ans de fonctionnement ...

Définition 4.2

On appelle **matrice des cofacteurs** de $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice, notée $\mathrm{cof}\,A$, de coefficients $\mathrm{cof}\,(a_{ij})$.

Théorème 4.1

Pour toute matrice A on a

$$A(\mathrm{cof}\,(A))^T = (\mathrm{cof}\,(A))^T A = (\det A)I_n.$$

En particulier, si A est inversible,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{cof}\,A)^T.$$

5 Propriétés des déterminants

Proposition 5.1

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Proposition 5.2 (Opérations sur les lignes)

Soit A une matrice carrée.
- Si B est une matrice obtenue en ajoutant à une ligne de A un multiple d'une autre de ses lignes, alors $\det B = \det A$.
- Si B est une matrice obtenue en intervertissant deux lignes de A, alors $\det B = -\det A$.
- Si B est une matrice obtenue en multipliant une ligne de A par réel k, alors $\det B = k \det A$.

De manière analogue, on peut effectuer des opérations sur les colonnes de la matrice.

Théorème 5.1

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Alors, $\det A = \det A^T$.

Théorème 5.2

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Proposition 5.3

Soit A une matrice carrée.
- $\det A = \det A^T$.
- Soit B une matrice de même taille que A, alors $\det AB = (\det A)(\det B)$.
- Si A est inversible, alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Attention :
- $\det(\lambda A) \neq \lambda \det A$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
- $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$!

6 Application

Théorème 6.1 (Règle de Cramer)

Soit A une matrice inversible. L'unique solution du système linéaire $Ax = b$ est donnée par

$$x_i = \frac{\det M_i}{\det A},$$

où M_i est la matrice d'ordre n obtenue en remplaçant la ième colonne de A par le vecteur b.

Proposition 6.1

Soit A une matrice d'ordre n. Le déterminant de A est nul si l'une des conditions suivantes est vérifiée.
- A possède une ligne (ou une colonne) nulle,
- A possède deux lignes (ou deux colonnes) identiques,
- A possède deux lignes (ou deux colonnes) proportionnelles ;
- A possède une ligne (ou une colonne) qui est combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes).

7 Interprétation géométrique du déterminant

Proposition 7.1

- Si A esr une matrice d'ordre 2, l'aire du du parallélogramme défini par les colonnes de A est égal à $|\det(A)|$.
- Si A esr une matrice d'ordre 3, le volume du du parallépipède défini par les colonnes de A est égal à $|\det(A)|$.

7.1 Transformations linéaires

Proposition 7.2

- Soit $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une transformation linéaire déterminée par une matrice A d'ordre 2. Si S est un parallélogramme de $\mathbb{R}^2$, alors en notant $\mathcal{A}(S)$ et $\mathcal{A}(T(S))$ les aires de S et de $T(S)$ on a

$$\mathcal{A}(T(S)) = |\det A|\,\mathcal{A}(S).$$

- Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une transformation linéaire déterminée par une matrice A d'ordre 3. Si S est un parallépipède de $\mathbb{R}^3$, alors en notant $\mathcal{V}(S)$ et $\mathcal{V}(T(S))$ les volumes de S et de $T(S)$ on a

$$\mathcal{V}(T(S)) = |\det A|\,\mathcal{V}(S).$$