Rappels

1 Systèmes linéaires

Le système linéaire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & a_{i3}x_3 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

peut s'écrire de façon plus compacte en rangeant les coefficients dans des tableaux rectangulaires. Ainsi, on a

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

L'objet A s'appelle la **matrice** du système linéaire. Elle a m lignes et n colonnes.
On peut aussi ranger dans une matrice le second membre du système linéaire en "augmentant" la matrice A ci-dessus d'une colonne :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

La matrice $\tilde{A}$ s'appelle **matrice augmentée** du système. C'est une matrice a m lignes et $n+1$ colonnes. Elle contient toute l'information nécessaire pour déterminer le système, les coefficients et le second membre.

1.1 Matrices échelonnées et pivots

Considérons une matrice A comme ci-dessus. On note $j_1 \in \{0, 1, \ldots, n\}$ le nombre de coefficients a_{1j} qui sont nuls au début de la ligne 1. Autrement dit, cette ligne 1 est de la forme

$$(\underbrace{0 \cdots 0}_{j_1 \text{ termes nuls}} \underbrace{a_{1\,j_1+1}}_{\neq 0} \cdots a_{1n}).$$

On note de même $j_2 \in \{0, 1, \ldots, n\}$ le nombre de coefficients $a_{2,j}$ qui sont nuls au début de la ligne 2, et ainsi de suite jusqu'à j_m.

Définition 1.1

- La matrice A est dite **échelonnée** si la suite $j_1, j_2, \ldots$ est **strictement** croissante jusqu'à ce que, éventuellement, elle devienne constante égale à n.
- Les systèmes linéaires dont la matrice augmentée est échelonnée sont appelés **systèmes échelonnés**.

Question 1.1 *Les matrices suivantes sont-elles échelonnées :* $\begin{pmatrix} 1 & \pi & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *?*

Définition 1.2

Le premier coefficient non nul d'une ligne d'une matrice échelonnée en comptant à partir de la gauche est appelé **pivot**.

Question 1.2 *Reprendre les matrices de la question précédente, et indiquer, lorsque cela est possible, les pivots.*

1.2 Existence et unicité

Définition 1.3

Les inconnues correspondant à une colonne contenant un pivot sont appelées **variables liées (ou essentielles)**. Les autres sont appelées **variables libres**.

Question 1.3 *Soit un système linéaire de matrice augmentée* $\widetilde{A}$ *et d'inconnues* x, y *et* z*. Déterminer dans les cas suivants les variables libres et les variables liées du système linéaire.*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.1 (Existence et unicité)

Soit $\mathcal{A}$ une matrice échelonnée et soit $(\mathcal{S})$ le système linéaire associé.

a) Si la matrice $\mathcal{A}$ contient une ligne de la forme

$$(0\ 0\ \cdots\ 0\ b) \text{ avec } b \neq 0, \tag{1.1}$$

alors le système $(\mathcal{S})$ n'admet aucune solution.

b) Si la matrice $\mathcal{A}$ n'a pas de ligne de la forme de (1.1) alors le système $(\mathcal{S})$ est compatible et
— s'il n'y a pas de variables libres, alors $(\mathcal{S})$ admet une unique solution,
— s'il existe une ou plusieurs variables libres, $(\mathcal{S})$ admet une infinité de solutions.

Question 1.4 *Déterminer si les systèmes linéaires associés aux matrices augmentées définies à la question précédente admettent aucune solution, une unique solution, ou une infinité de solutions.*

2 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

2.1 Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Définition 2.1

— Soit $n \geq 1$ un entier. Un **vecteur** de $\mathbb{R}^n$ est une matrice à n lignes et 1 colonne.
— Un **scalaire** est un nombre réel.

Notations : Un vecteur u de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $u_1, \cdots, u_n$ des réels. Par souci de gain de place on utilise aussi la notation d'un n-uplet $u = (u_1, u_2, \cdots, u_m)$. Cette notation ne doit pas être confondue avec la notation $(u_1\, u_2 \cdots u_n)$ qui désigne une matrice à 1 ligne et n colonnes.
Deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont égaux si et seulement si leurs composantes correspondantes sont égales.

Définition 2.2

On définit sur $\mathbb{R}^n$,

— une *opération interne* appelée **addition** par

$$\forall u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \forall v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}, \quad u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_m + v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

— une *opération externe* appelée **multiplication par un scalaire** par

$$\forall u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Attention à ne jamais additionner des scalaires et des vecteurs et à multiplier deux vecteurs entre eux.

2.1.1 Produit scalaire

Soient $u = (u_1, \cdots, u_n)$ et $v = (v_1, \cdots, v_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Définition 2.3

Le **produit scalaire de u et v**, noté $u \cdot v$, est le scalaire défini comme suit :

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots u_n v_n.$$

Deux vecteurs sont **orthogonaux** lorsque leur produit scalaire est nul.

Question 2.1 *Soient $u = (1, -2, 3, 4), v = (6, 7, 1, -2)$ et $w = (5, -4, 5, 7)$. Calculer les produits scalaires $u \cdot v, u \cdot w$ et $v \cdot w$. Les vecteurs u et w sont-ils orthogonaux ?*

Théorème 2.1

Soient les vecteurs u, v, et $w \in \mathbb{R}^n$ et soit k un scalaire.

1. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
2. $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$
3. $u \cdot v = v \cdot u$
4. $u \cdot u \geq 0$
5. $u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Question 2.2 *Montrer les assertions 4. et 5. de la proposition 2.1*

2.1.2 Norme et distance dans $\mathbb{R}^n$

Définition 2.4

Soient $u = (u_1, \cdots, u_n)$ et $v = (v_1, \cdots, v_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

— La **distance** entre les deux points u et v, notée $d(u, v)$, est définie par :

$$d(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}.$$

— La **norme** du vecteur u, notée $\|u\|$, est définie par :

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}.$$

Notons que $\|u\|$ est toujours bien définie puisque $u \cdot u \geq 0$ d'après la proposition 2.1. De plus notons que

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Question 2.3 *Soient* $u = (1, -2, 4, 1)$ *et* $v = (3, 1, -5, O)$. *Calculer* $d(u, v)$ *et* $\|v\|$.

2.2 Structure algébrique de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

Grâce aux opérations d'addition et de multiplication l'ensemble $\mathbb{R}^n$ acquiert une **structure algébrique**, c'est-à-dire des règles de calcul sur les vecteurs.

Propriétés : Pour tous u, v, w dans $\mathbb{R}^n$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$,

i) $u + v = v + u$, (commutativité de l'addition).
ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$, (associativité de l'addition).
iii) $u + 0 = 0 + u = u$, (0 est un élément neutre pour l'addition).
iv) $u + (-1)u = (-1)u + u = 0$, (tout élément admet un opposé pour l'addition).
v) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, (distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition vectorielle).
vi) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$, (distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition scalaire).
vii) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$ ("associativité" de la multiplication externe).
viii) $1u = u$, (1 est un "élément neutre" pour la multiplication externe).

Définition 2.5

Au vu des propriétés (i) à (viii) ci-dessus, on dit que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$.
Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont appelés les **vecteurs** de cet espace vectoriel.

Exemples :

— Soit V l'ensemble des polynômes à coefficients réels. V muni des deux lois addition des polynômes et multiplication par un scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
— Soit V l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. V muni des lois d'addition des fonctions et de multiplication par un scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.6

Soient $u_1, u_2, \cdots, u_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, n scalaires. Alors, on dit que le vecteur

$$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n,$$

est une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_n$ dont les coefficients sont $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

Question 2.4 *Écrire le vecteur* $u = (1, -2, 5)$ *comme combinaison linéaire des vecteurs* $u_1 = (1, 1, 1)$ $u_2 = (1, 2, 3)$ *et* $u_3 = (2, -1, 1)$.

2.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 2.7

Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que F est un **sous-espace vectoriel (s.e.v.)** de $\mathbb{R}^n$ si

i) $0_{\mathbb{R}^n} \in F$.

ii) pour tous u et v dans F, $u+v \in F$, (F est stable par addition).

iii) pour tout u dans F et tout λ dans $\mathbb{R}$, $\lambda u \in F$, (F est stable pour la multiplication par un scalaire).

Remarques 1) Un s.e.v. n'est jamais vide puisqu'il contient toujours au moins le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^n}$.
2) Un s.e.v. est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Exemples : : L'ensemble $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ constitué du seul vecteur nul, ainsi que l'espace entier $\mathbb{R}^n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Question 2.5 *L'ensemble V est-il un sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$ lorsque :*

1. $V = \{(a,b,1), a,b \in \mathbb{R}\}$,
2. $V = \{(a,b,0);\ a,b \in \mathbb{R}\}$,
3. $V = \{(a,b,c), a,b,c \in \mathbb{R}\,; a^2+b^2+c^2 \leq 1\}$?

Définition 2.8

Soit Vun sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

— On dit que les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$ **engendrent** V si tout vecteur w de V peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \cdots, u_n$, i.e.
Pour tout w dans V, il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tels que

$$w = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

— Les vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$ sont dits **linéairement indépendants** (ou **libres**) si

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Dans le cas contraire on dit que les vecteurs sont **linéairement dépendants** (ou **liés**).

Question 2.6 *1. Les vecteurs $u=(1,2,3), v=(0,1,2)$ et $w=(0,0,1)$ engendrent-ils $\mathbb{R}^3$?*
2. Les vecteurs $u=(1,-1,0), v=(1,3,-1)$ et $w=(5,3,-2)$ sont-ils linéairement indépendants ?

Théorème 2.2

Soit F un s.e.v. Les vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ de F forment une base de F si et seulement si :
Pour tout vecteur w de F il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ **uniques** tels que

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Exemples : Les vecteurs $e_1 = (1,0,\cdots,0), e_2 = (0,1,0,\cdots,0), \cdots, e_i = (0,0,\cdots,1,0,\cdots,0)$ et $e_n = (0,\cdots,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$. Cette base est appelée **base canonique de $\mathbb{R}^n$**.

Question 2.7 *1. Les vecteurs ci-dessous forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?*

a. $(1,2), (0,1)$ *et* $(1,0)$,

b. $(1,1,0)$ *et* $(0,1,0)$,

c. $(1,1,1), (1,2,3)$ *et* $(2,-1,1)$.

2. *Soit le système linéaire* $\begin{cases} x+2y-4z+3r &= 0 \\ x+2y-2z+2r &= 0 \\ 2x+4y-2z+3r &= 0 \end{cases}$

   a. *Montrer que l'ensemble des solutions de ce système linéaire est* $S = \{(-2a-b, a, \frac{1}{2}b, b)\,;\, a, b \in \mathbb{R}\}$.

   b. *Montrer que* S *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.

   c. *Donner une base de* S.

Définition 2.9

Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ sont appelés **coordonnées** (ou **composantes**) de <u>w dans $\mathcal{B}$</u>. Et l'on note $(x)_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$.

Question 2.8 *Quelles sont les coordonnées du vecteur* $v = (3, 1, -4)$

1. *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *?*
2. *dans la base formée des vecteurs* $u_1 = (1,1,1), u_2 = (0,1,1)$ *et* $u_3 = (0,0,1)$ *?*

Théorème 2.3 (de la dimension)

Toutes les bases d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ ont le même nombre d'éléments.

Ce qui conduit à la définition suivante.

Définition 2.10

La **dimension** d'un s.e.v. F de $\mathbb{R}^n$ est le nombre d'éléments de chacune de ses bases.

$$\dim F = \mathrm{card}\mathcal{B}, \text{ pour toute base } \mathcal{B} \text{ de } F.$$

3 Applications linéaires

Dans tout ce qui suit E_i désigne un sev de $\mathbb{R}^{m_i}$ de dimension n_i.

Définition 3.1

On dit qu'une application $f : E_1 \longrightarrow E_2$ est une **application linéaire** lorsque

i) Pour tous x, y dans E_1, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

ii) Pour tout x dans E_1 et tout λ dans $\mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Remarque. Toute application linéaire satisfait $f(0) = 0$.

Question 3.1 *Les applications ci-dessous sont-elles linéaires ?*

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (x^3+y+z, x) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (x+y-1, x) \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longrightarrow & (x+y, y, 2x) \end{array}$$

Théorème 3.1 (Lien entre matrice et applications linéaires.)

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de E_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de E_2. Pour toute application linéaire de E_1 dans E_2, il existe une unique matrice A de taille $n_2 \times n_1$ telle que

$$(f(x))_{\mathcal{B}_2} = A(x)_{\mathcal{B}_1}.$$

La matrice A est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Question 3.2 *Pour l'application linéaire f_3 définie à la question 3.1 donner sa matrice*

1. *dans les bases canoniques $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ (respectivement de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$),*
2. *dans les bases $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{B}_3$,*
3. *dans les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{C}_3$,*
4. *dans les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$,*

avec $\mathcal{B}_3$ la base de $\mathbb{R}^3$ constituée des vecteurs $u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,1,1)$ et $\mathcal{B}_2$ la base de $\mathbb{R}^2$ constituée des vecteurs $v_1 = (-1,0), v_2 = (1,1)$.

4 Algèbre matricielle

Notations. On note $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Lorsque $n = m$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cet ensemble. Une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite d'ordre n.

— Les coefficients a_{ii} d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ d'ordre n forment la **diagonale** de la matrice et sont appelés **coefficients diagonaux**.
— Une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ c'est-à-dire hors de la diagonale, est appelée **matrice diagonale**.
— Une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$, c'est-à-dire en-dessous de la diagonale, est appelée **matrice triangulaire supérieure**.
— Une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ dès que $i < j$, c'est-à-dire au–dessus de la diagonale, est appelée **matrice triangulaire inférieure**.
— On appelle matrice **transposée** de $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ la matrice notée $A^T \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ définie par $A^T = (a_{ji})_{1 \le j \le n, 1 \le i \le m}$.
— On dit qu'une matrice est **symétrique** si $A = A^T$.
— La matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est appelée **matrice identité** de taille $n \times n$.

4.1 Opérations sur les matrices

Définition 4.1

On définit sur $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$

— une loi de composition interne appelée **addition** :
Pour tous $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, la matrice $A + B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, pour $i = 1, \cdots, m$ et $j = 1, \cdots, n$.
— une loi de composition externe appelée **multiplication par un scalaire** :
Pour tout $A = (a_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, et λ dans $\mathbb{R}$ la matrice λA est la matrice de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$, pour $i = 1, \cdots, m$ et $j = 1, \cdots, n$.

Muni de ces deux lois de composition, l'ensemble $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur ? ? ? ? ? ? ? ?

Définition 4.2 (Produit matrice-vecteur)

Soient A une matrice $m \times n$ de colonnes les vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de $\mathbb{R}^m$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Le produit de A par x est le vecteur de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$Ax = (a_1\, a_2\, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n.$$

Remarques.

— Le produit Ax est la combinaison linéaire des vecteurs-colonne de A dont les coefficients sont les lignes de x. C'est par définition un vecteur de $\mathbb{R}^m$.
— Le produit matrice-vecteur n'est défini que si b a le même nombre de lignes que le nombre de colonnes de A.

Définition 4.3 (Produit matriciel)

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Notons $b_1, b_2, \cdots, b_p \in \mathbb{R}^n$ les p colonnes de B. On définit le produit AB comme étant la matrice $m \times p$ dont les colonnes sont données par

$$AB = (Ab_1\ Ab_2\ \cdots\ Ab_p).$$

Théorème 4.1

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on a $(AB)x = A(Bx)$.

Les matrices identités sont des éléments neutres pour le produit matriciel.

Théorème 4.2

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, on a $I_m A = A I_n = A$.

Remarques. Le produit matriciel **N**'est **PAS** commutatif :

— le produit AB peut être défini mais pas le produit BA,
— les produits AB et BA peuvent être définis et de même taille, et généralement $AB \neq BA$.
— La multiplication des matrices n'étant pas commutative $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ mais $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Question 4.1 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer, lorsqu'ils sont bien définis, les produits suivants : $AA^T, A^T A, AB, A$ *et* AC^T.

b. Calculer $3A + 4B - 2C$.

Définition 4.4

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit les puissances successives de A par

— $A^0 = I_n$,
— $A^{p+1} = A^p A = A A^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Soient A et B deux matrices de tailles compatibles avec les sommes et produits suivants. Alors on a :

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

4.2 Cas où $m = n$, matrices inversibles

Définition 4.5

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **inversible** si il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AA' = A'A = I_n.$$

Naturellement, on note $A' = A^{-1}$.

Question 4.2 *1. La matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *est-elle l'inverse de la matrice* $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ *?*

2. Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 4.3

Soit A une matrice d'ordre n. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est une matrice inversible.

ii) A a n positions de pivot.

iii) Les vecteurs colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$.

iv) A^T est une matrice inversible.

Théorème 4.4

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles. Alors

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Théorème 4.5 (Lien avec les systèmes linéaires)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $b \in \mathbb{R}^n$. Le système linéaire $n \times n$, $Ax = b$ admet une solution et une seule si et seulement si A est inversible. Dans ce cas on a $x = A^{-1}b$.

Question 4.3 *Soi* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. *Résoudre, sans utiliser l'algorithme de Gauss, le système* $Ax = b$ *avec* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.