3. Réduction de matrices

Dans tout ce qui suit nous ne considérerons que des matrices carrées.

1. Vecteurs propres et valeurs propres

Rappel : On appelle noyau de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble $\operatorname{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, Ax = 0\}$.

Définition 1.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que $x \in \mathbb{R}^n$ est un **vecteur propre** de A si

  i) $x \neq 0$,

  ii) il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Ax = \lambda x$.
  On dit alors que le scalaire λ est la **valeur propre** de A associée à x.

- L'ensemble de toutes les valeurs propres de A est appelé **spectre** de A et est noté $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Théorème 1.1

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A si et seulement si $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$.

Définition 1.2

On dit que deux matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que

$$B = PAP^{-1}.$$

Proposition 1.2

Deux matrices semblables ont même spectre.

Définition 1.3

Le polynôme $P_A(X) = \det(A - XI_n)$ est appelé polynôme caractéristique de A.

Théorème 1.3

- $\lambda \in \sigma(A)$ si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- $\lambda \in \sigma(A)$ si et seulement si λ est une racine de P_A.
- Toute matrice d'ordre n admet **au plus** n valeurs propres.

Remarques :

1. Il existe des matrices à coefficients réels sans valeur propre réelle.
2. Toute matrice à coefficients complexes admet au moins une valeur propre.
3. $\sigma(A^T) = \sigma(A)$.

Théorème 1.4

Si A est une matrice triangulaire, alors elle a n valeurs propres qui sont ses éléments diagonaux.

2. Diagonalisation

Définition 2.4

i) On dit qu'une matrice A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

ii) (HP) On dit qu'une matrice A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Théorème 2.5

Une matrice A d'ordre n est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A.
Une telle base est appelée une **base de vecteurs propres**.

Théorème 2.6

Si une matrice d'ordre n a **exactement** n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.

Étapes pour trouver une base de l'espace propre associé à une valeur propre λ d'une matrice A.

1. Calculer $A - \lambda I_n$.
2. Échelonner la matrice augmentée du système $(A - \lambda I_n)x = 0$.
3. Donner la solution générale de ce système.
4. En déduire une base de l'espace propre.

Étapes pour diagonaliser une matrice A d'ordre n :

1. Trouver les valeurs propres de A.
2. Trouver n vecteurs propres $v_1, v_2, \cdots, v_n$ linéairement indépendants de A.
3. Construire la matrice P ayant pour colonnes les vecteurs $v_i, i = 1, \cdots, n$.
4. Construire la matrice diagonale D à partir des valeurs propres.

3. Exemple en dynamique des populations

Supposons que l'on observe une population animale divisée en deux classes d'individus, les individus immatures et les individus adultes. On recense la population à intervalles réguliers, disons tous les ans. Son état à l'année n est donc représenté par un vecteur de $\mathbb{R}^2$

$$x(n) = \begin{pmatrix} \text{nb d'individus immatures} \\ \text{nb d'individus adultes} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}.$$

On observe que, d'une année sur l'autre,

- une proportion $0 \leq p_1 \leq 1$ d'individus immatures meurt, le reste devient adulte.
- Pour les individus adultes, une proportion $0 \leq p_2 \leq 1$ meurt tandis qu'une proportion $0 \leq q \leq 1$ des adultes donne naissance à un individu immature.

Par conséquent,à l'année $n+1$ on recensera

$$(1 - p_1)x_1(n) + (1 - p_2)x_2(n),$$

individus adultes et $qx_2(n)$ individus immatures.

On obtient donc une évolution (on dit une dynamique) de la forme

$$x(n+1) = \begin{pmatrix} qx_2(n) \\ (1-p_1)x1_(n) + (1-p_2)x_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q \\ (1-p_1) & (1-p_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} = Ax(n).$$

Par récurrence on en déduit

$$x(n) = A^n x(0),$$

où le vecteur $x(0)$ représente la population initiale.

La survie ou l'extinction de la population est donc gouvernée par

- le comportement des puissances successives de la matrice A et
- par la population initiale.

On est donc amené à étudier les valeurs propres de A en fonction des paramètres p_1, p_2 et q. En effet, si celle-ci se diagonalise en D, on aura

$$x(n) = PD^n P^{-1} x(0).$$