Chapitre 1 : Systèmes linéaires

1 Systèmes d'équations linéaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel supérieur à 1. Une *équation linéaire* à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et b sont des nombres réels donnés.

Définition 1.1

Un système de m équations linéaires à n inconnues, ou *système linéaire*, est une liste de m équations linéaires.

Exemple. Système de 2 équations à 3 inconnues. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{3}{2}x_3 & = 8, \\ x_1 \qquad\quad - 4x_3 & = -7. \end{cases}$

Forme générale d'un système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & a_{i3}x_3 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \qquad (\mathcal{S})$$

- Les nombres réels $a_{ij}, i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n$ sont les *coefficients* du système. Ce sont des données.
- Les nombres réels $b_i, i = 1, \cdots, m$ constituent le *second membre* du système et sont également des données.
- La ligne i du système linéaire est notée L_i, $i = 1, \ldots, m$.
- La colonne j du système linéaire est notée C_j, $i = j, \ldots, n$.

Définition 1.2

Une *solution* du système linéaire est une liste de n nombres réels $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ (un n-uplet) tels que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, etc ... dans le système linéaire, on obtient une égalité.
L'ensemble des solutions du système linéaire est l'ensemble de toutes ces listes.

Question 1.1 *Représenter graphiquement les systèmes linéaires suivants :*

$$\begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \end{cases}$$

Pour un système linéaire général de m équations et n inconnues.

a) Soit il n'y a aucune solution. Dans ce cas on dit que le système est **incompatible**.

b) Soit il y a une solution unique. Dans ce cas on dit que le système est **compatible**.

c) Soit il y a une infinité de solutions. Dans ce cas aussi on dit que le système est **compatible**.

Définition 1.3

– Un système est dit **homogène** si son second membre est nul, c'est-à-dire si $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.
– Deux systèmes sont dits **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarque. Un système homogène est toujours compatible. En effet, un tel système admet toujours la solution **triviale** $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$.

1.1 Notation matricielle

Le système linéaire $(\mathcal{S})$ peut sécrire de façon plus compacte en rangeant les coefficients dans des tableaux rectangulaires. Ainsi, on a

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

L'objet A s'appelle la **matrice** du système linéaire. Elle a m lignes et n colonnes.
On peut aussi ranger dans une matrice le second membre du système linéaire en "augmentant" la matrice A ci-dessus d'une colonne :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

La matrice $\tilde{A}$ s'appelle **matrice augmentée** du système. C'est une matrice a m lignes et $n+1$ colonnes. Elle contient toute l'information nécessaire pour déterminer le système, les coefficients et le second membre.

1.2 Matrices échelonnées et pivots

Considérons une matrice A comme ci-dessus. On note $j_1 \in \{0, 1, \ldots, n\}$ le nombre de coefficients $a_{1,j}$ qui sont nuls au début de la ligne 1. Autrement dit, cette ligne 1 est de la forme

$$\underbrace{0\,x_1 + \ldots + 0\,x_{j_1}}_{j_1 \text{ termes nuls}} + \underbrace{a_{1,j_1+1}}_{\neq 0}\, x_{j_1+1} + \ldots + a_{1,n}x_n.$$

On note de même $j_2 \in \{0, 1, \ldots, n\}$ le nombre de coefficients $a_{2,j}$ qui sont nuls au début de la ligne 2, et ainsi de suite jusqu'à j_m.

Définition 1.4

– La matrice A est dite **échelonnée** si la suite $j_1, j_2, \ldots$ est **strictement** croissante jusqu'à ce que, éventuellement, elle devienne constante égale à n.
– Les systèmes linéaires dont la matrice augmentée est échelonnée sont appelés **systèmes échelonnés**.

Question 1.2 *Les matrices suivantes sont-elles échelonnées :* $\begin{pmatrix} 1 & \pi & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *?*

Définition 1.5

Le premier coefficient non nul d'une ligne d'une matrice échelonnée en comptant à partir de la gauche est appelé **pivot**.

Question 1.3 *Reprendre les matrices de la question précédente, et indiquer, lorsque cela est possible, les pivots.*

2 Résolution de systèmes linéaires à l'aide de l'algorithme de Gauss

Question 2.1 *Calculer la solution du système linéaire* $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$

À partir de maintenant, la stratégie pour résoudre un système linéaire sera de se ramener à un système échelonné qui lui soit équivalent.

Définition 2.6

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice les trois opérations suivantes :

i) **Échange** de deux lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$).

ii) **Multiplication** d'une ligne par une constante non nulle ($L_i \leftarrow \lambda L_i$).

iii) **Substitution** : remplacer une ligne par elle-même plus un multiple d'une autre ligne ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).

Théorème 2.1

On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire en appliquant une ou plusieurs opérations élémentaires à sa matrice augmentée.

Question 2.2 *Indiquer quel(les) opération(s) élémentaire(s) ont permis de passer du système* $(\mathcal{S}_1)$ *au système* $(\mathcal{S}_2)$ *et du système* $(\mathcal{S}_2)$ *au système* $(\mathcal{S}_3)$ *définis ci-dessous. Puis, vérifier que* $(1,1,1)$ *est solution de* $(\mathcal{S}_1)$, $(\mathcal{S}_2)$ *et* $(\mathcal{S}_3)$.

$$(\mathcal{S}_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & & & = & 1 \end{array}\right. \quad (\mathcal{S}_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & & & = & 1 \end{array}\right. \quad (\mathcal{S}_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ & & -x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

2.1 L'algorithme de Gauss

Le principe de l'algorithme de Gauss consiste à utiliser les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée pour placer des zéros là où il faut de façon à créer une matrice échelonnée.

Soit A une matrice à m lignes et n colonnes et de coefficients $(a_{ij})_{i,j}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Étape 1 : **Choix du pivot de Gauss.**

On commence par inspecter la première colonne.

- Soit elle ne contient que des zéros, alors on passe directement à l'étape 3.
- Soit elle contient au moins un terme non nul. On choisit un tel terme qui sera alors le pivot.
  - Si c'est le terme a_{11} on passe directement à l'étape 2,
  - si c'est le terme a_{i1} avec $i \neq 1$ on échange les lignes 1 et i. Puis on passe à l'étape 2.

    Dans ce cas, à l'issue de l'étape 1 la matrice A devient

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{a'_{11}} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mj} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

avec $a'_{11} \neq 0$.

Étape 2. **Élimination.** On NE touche PLUS à la ligne 1 et on se sert du pivot pour mettre tous les termes a'_{i1} pour $i \geq 2$ égaux à 0.

Pour cela on remplace la ligne L_i de la façon suivante.

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a'_{i1}}{a'_{11}} \times L_1 \qquad \text{pour } i = 2, \cdots, m.$$

Au terme de l'étape 2 on obtient une matrice de la forme

$$A'' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a''_{i2} & \cdots & a''_{ij} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a''_{m2} & \cdots & a''_{mj} & \cdots & a''_{mn} \end{pmatrix}$$

où $a''_{ij} = a'_{ij} - \frac{a'_{i1}}{a'_{11}} \times a'_{ij}$.

Étape 3. **Boucle.** La première colonne de la matrice A'' est bien celle d'une matrice échelonnée. On va donc conserver cette première colonne ET la première ligne, et l'on va boucler sur l'étape 1 appliquée à la sous–matrice de taille $(m-1) \times (n-1)$ qui reste.

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a''_{i2} & \cdots & a''_{ij} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a''_{m2} & \cdots & a''_{mj} & \cdots & a''_{mn} \end{pmatrix}$$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle on aura une matrice de la forme

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{i3} & \cdots & a^{(3)}_{ij} & \cdots & a^{(3)}_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{m3} & \cdots & a^{(3)}_{mj} & \cdots & a^{(3)}_{mn} \end{pmatrix}$$

où $a^{(3)}_{ij} = a''_{ij} - \frac{a''_{ij}}{a''_{22}} \times a''_{2j}$ pour $i = 3, \cdots, m$ et $j = 2, \cdots, n$.

Et ainsi de suite, jusqu'à obtenir une matrice échelonnée.

2.2 Existence et unicité

Définition 2.7

Les inconnues correspondant à une colonne contenant un pivot sont appelées **variables liées (ou essentielles)**. Les autres sont appelées **variables libres**.

Question 2.3 *Soit un système linéaire de matrice augmentée $\widetilde{A}$ et d'inconnues x, y et z. Déterminer dans les cas suivants les variables libres et les variables liées du système linéaire.*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lorsque $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, *peut-on déterminer les variables libres et les variables liées ?*

Théorème 2.2 (Existence et unicité)

Soit $\mathcal{A}$ une matrice échelonnée et soit $(\mathcal{S})$ le système linéaire associé.

a) Si la matrice $\mathcal{A}$ contient une ligne de la forme

$$(0\ 0\ \cdots\ 0\ b) \text{ avec } b \neq 0, \tag{2.1}$$

alors le système $(\mathcal{S})$ n'admet aucune solution.

b) Si la matrice $\mathcal{A}$ n'a pas de ligne de la forme de (2.1) alors le système $(\mathcal{S})$ est compatible et
   - s'il n'y a pas de variables libres, alors $(\mathcal{S})$ admet une unique solution,
   - s'il existe une ou plusieures variables libres, $(\mathcal{S})$ admet une infinité de solutions.

Question 2.4 *Déterminer si les systèmes linéaires associés aux matrices augmentées définies à la question précédente admettent aucune solution, une unique solution, ou une infinité de solutions.*

2.3 Représentation paramétrique de l'ensemble des solutions d'un système linéaire

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

- Lorsqu'un système est incompatible, $\mathcal{S} = \emptyset$.
- Lorsqu'un système linéaire compatible admet une unique solution $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ on peut écrire :
  - L'unique solution du système est : $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$,
  - L'ensemble des solutions du système est le singleton : $\mathcal{S} = \{(s_1, s_2, \cdots, s_n)\}$.
- Lorsqu'un système linéaire compatible admet une infinité de solutions, on donne une description paramétrique de l'ensemble des solutions en exprimant les variables liées en fonction des variables libres.

Exemple : Le système linéraire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & & & & 3x_3 & = & 3 \\ & & & & -5x_3 & = & -5 \end{array}\right.$$

admet une infinité de solutions puisque x_2 est une variable libre. Les solutions s'écrivent $\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_2 \text{ libre} \\ x_3 = 1 \end{array}\right.$

On peut aussi écrire l'ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \{(x_2, x_2, 1) \text{ avec } x_2 \in \mathbb{R}\}$.