Chapitre 2 : Espaces vectoriels

1 Vecteurs

Définition 1.1

– Soit $m \geq 1$ un entier. Un **vecteur** de $\mathbb{R}^m$ est une matrice à m lignes et 1 colonne.
– Un **scalaire** est un nombre réel.

Notations : Un vecteur $\vec{\mathbf{u}}$ de $\mathbb{R}^m$ s'écrit $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$, $u_1, \cdots, u_m$ des réels. Par souci de gain de place on utilise aussi la notation d'un m-uplet $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)$. Cette notation ne doit pas être confondue avec la notation $(u_1\, u_2 \cdots u_m)$ qui désigne une matrice à 1 ligne et m colonnes.

Définition 1.2

On définit sur $\mathbb{R}^m$,
– une *opération interne* appelée **addition** par

$$\forall \vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \forall \vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_m + v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

– une *opération externe* appelée **multiplication par un scalaire** par

$$\forall \vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Notons que ces deux opérations sont définies ligne par ligne.

1.1 Interprétation géométrique dans le plan et dans l'espace

– L'addition de deux vecteurs se traduit par la règle du parallélogramme : la somme de deux vecteurs est représentée par la diagonale du parallélogramme ayant ces deux vecteurs comme côtés.
– Par le théorème de Thalès, l'ensemble des multiples scalaires d'un vecteur est la droite qui supporte le segment représentant le vecteur.

1.2 Structure algébrique de $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$

Grâce aux opérations d'addition et de multiplication l'ensemble $\mathbb{R}^m$ acquiert une **structure algébrique**, c'est à dire des règles de calcul sur les vecteurs.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{0}} = (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^m$ est appelé le **vecteur nul** de $\mathbb{R}^m$.

Propriétés 1.1 *Pour tous* $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}$ *dans* $\mathbb{R}^m$ *et* λ, μ *dans* $\mathbb{R}$*,*

(i) $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\mathbf{u}}$, *(commutativité de l'addition).*

(ii) $(\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}) + \overrightarrow{\mathbf{w}} = \overrightarrow{\mathbf{u}} + (\overrightarrow{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\mathbf{w}})$, *(associativité de l'addition).*

(iii) $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} + \overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{u}}$, *($\overrightarrow{\mathbf{0}}$ est un élément neutre pour l'addition).*

(iv) $\overrightarrow{\mathbf{u}} + (-1)\overrightarrow{\mathbf{u}} = (-1)\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, *(tout élément admet un opposé pour l'addition).*

(v) $\lambda(\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{u}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{v}}$, *(distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition vectorielle).*

(vi) $(\lambda + \mu)\overrightarrow{\mathbf{u}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{u}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{u}}$, *(distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition scalaire).*

(vii) $\lambda(\mu\overrightarrow{\mathbf{u}}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *("associativité" de la multiplication externe).*

(viii) $1\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{u}}$, *(1 est un "élément neutre" pour la multiplication externe).*

Définition 1.3

Au vu des propriétés (i) à (viii) ci-dessus, on dit que $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$.
Les éléments de $\mathbb{R}^m$ sont appelés les **vecteurs** de cet espace vectoriel,

Attention à ne jamais additionner des scalaires et des vecteurs et à multiplier deux vecteurs entre eux.

Définition 1.4

Soient $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, n scalaires. Alors, on dit que le vecteur

$$\overrightarrow{\mathbf{w}} = \lambda_1\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 + \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{u}}_2 + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{\mathbf{u}}_n,$$

est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_n$ dont les coefficients sont $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

Théorème 1.1

Un vecteur $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ de $\mathbb{R}^m$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_n$ de $\mathbb{R}^m$ si et seulement si le système linéaire ayant pour matrice augmentée $(\overrightarrow{\mathbf{u}}_1\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_2\ \ldots\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_n\ \overrightarrow{\mathbf{b}})$ est compatible.

Définition 1.5

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_n$ de $\mathbb{R}^m$ **engendrent** $\mathbb{R}^m$ si tout vecteur $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_n$, i.e.
Pour tout $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ dans $\mathbb{R}^n$, il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tels que

$$\overrightarrow{\mathbf{w}} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{u}}_n.$$

1.3 Indépendance linéaire

Définition 1.6

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_n$ de $\mathbb{R}^m$ sont dits **linéairement indépendants** (ou **libres**) si

$$\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{u}}_n = \overrightarrow{\mathbf{0}} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Dans le cas contraire on dit que les vecteurs sont **linéairement dépendants** (ou **liés**).

Théorème 1.2

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_n$ de $\mathbb{R}^m$ sont linéairement indépendants si et seulement si le système linéaire ayant pour matrice augmentée $(\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \;\; \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \;\; \ldots \;\; \overrightarrow{\mathbf{u}}_n \;\; \overrightarrow{\mathbf{0}})$ a une unique solution.

Par convention, l'ensemble vide est une famille libre.

i) Le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ est linéairement indépendant si $\overrightarrow{\mathbf{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ et linéairement dépendant si $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

ii) Les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2$ sont linéairement indépendants si et seulement si $\overrightarrow{\mathbf{v}}_1$ n'est pas un multiple de $\overrightarrow{\mathbf{v}}_2$ et $\overrightarrow{\mathbf{v}}_2$ n'est pas un multiple de $\overrightarrow{\mathbf{v}}_1$.

Théorème 1.3

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{v}}_n$ de $n \geq 2$ de $\mathbb{R}^m$ sont linéairement dépendants si et seulement si il existe au moins un vecteur $\overrightarrow{\mathbf{v}}_k$, $1 \leq k \leq n$, qui est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{v}}_{k-1}, \overrightarrow{\mathbf{v}}_{k+1}, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{v}}_n$.

Théorème 1.4

1. Lorsque $n > m$ alors toute famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est linéairement dépendante.
2. Toute famille linéairement indépendante de vecteurs de $\mathbb{R}^m$ a au plus m éléments.
3. Si une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^m$ contient le vecteur nul, alors elle est linéairement dépendante. Si elle contient deux vecteurs égaux, alors elle est linéairement dépendante.

1.4 Bases de $\mathbb{R}^m$

Définition 1.7

Des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{v}}_n$ qui à la fois sont linéairement indépendants **et** engendrent $\mathbb{R}^m$ forment une **base** de $\mathbb{R}^m$. On note alors $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{v}}_n)$.

Théorème 1.5

Des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{v_n}}$ de $\mathbb{R}^n$ forment une **base** de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si
Pour tout vecteur $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ de $\mathbb{R}^n$ il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ **uniques** tels que

$$\overrightarrow{\mathbf{w}} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{v}}_n. \tag{1.1}$$

Remarque : L'équation (1.1) signifie que les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{v_n}}$ engendrent $\mathbb{R}^m$. De plus le fait que les scalaires $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ sont uniques signifie que la famille est linéairement indépendante.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\overrightarrow{\mathbf{e}}_3 = (0, 0, 1, 0 \cdots, 0), \cdots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_m = (0, 0, \cdots, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^m$. Cette base s'appelle la **base canonique** de $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.8

- L'expression (1.1) est la **décomposition** du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ dans la base $(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{v}}_n)$.
- Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont appelés **coordonnées** (ou **composantes**) du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ dans la base $(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{v}}_n)$.

Théorème 1.6

i) Toute base de $\mathbb{R}^m$ admet exactement m éléments.

ii) Toute famille libre de m vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est une base de $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.9

La **dimension** de $\mathbb{R}^m$ est le nombre d'éléments de toute base de $\mathbb{R}^m$,

$$\dim \mathbb{R}^m = m.$$

2 Sous-espaces vectoriels

Désormais nous n'utiliserons plus la notation avec une flèche pour désigner un vecteur.

Définition 2.10

Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$. On dit que F est un **sous-espace vectoriel (s.e.v.)** de $\mathbb{R}^m$ si

i) $0_{\mathbb{R}^m} \in F$.

ii) pour tous u et v dans F, $u+v \in F$, (F est stable par addition).

iii) pour tout u dans F et tout λ dans $\mathbb{R}$, $\lambda u \in F$, (F est stable pour la multiplication par un scalaire).

Remarques 1) Un s.e.v. n'est jamais vide puisqu'il contient toujours au moins le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^m}$.
2) Un s.e.v. est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.7

Soient F_1 et F_2 deux s.e.v de $\mathbb{R}^m$. Alors, $F_1 \cap F_2$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$.

Remarque : En général, $F_1 \cup F_2$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$.

La notion de base vue à la section précédente s'étend naturellement aux s.e.v de $\mathbb{R}^m$.

Définition 2.11

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$. Des vecteurs $v_1, \cdots, v_k$ de F qui à la fois sont linéairement indépendants **et** engendrent F forment une **base de F**.

Théorème 2.8

Soit F un s.e.v. Les vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ de F forment une **base de F** si et seulement si :
Pour tout vecteur $\underline{\underline{w \text{ de } F}}$ il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ **uniques** tels que

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Définition 2.12

Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ sont appelés **coordonnées** (ou **composantes**) de $\underline{w \text{ dans } \mathcal{B}}$. Et l'on note $(x)_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$.

Théorème 2.9

(de la base extraite) Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ engendré par une famille finie de vecteurs $\mathcal{V}$. Alors il existe un sous-ensemble de $\mathcal{V}$ qui est une base de F.

(de la base incomplète) Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ et $\mathcal{V}$ une famille libre de vecteurs de F. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de F qui contient $\mathcal{V}$.

Corollaire 2.1 Tout s.e.v admet une base.

Théorème 2.10

Soient F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ et $\mathcal{B}$ une base de F de cardinal k, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ une famille de vecteurs de F. On note A la matrice définie comme suit

$$A = \left((u_1)_{(\mathcal{B})} \ (u_2)_{(\mathcal{B})} \ \ldots \ (u_n)_{(\mathcal{B})}\right).$$

Alors, la famille $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ est libre si et seulement si le sysème linéaire homogène $Ax = 0$ n'admet que la solution triviale.

Théorème 2.11

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ et soit $\mathcal{B}$ une base de F de cardinal k. Toute famille de n vecteurs avec $n > k$ est linéairement dépendante.

Théorème 2.12 (de la dimension)

Toutes les bases d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ ont le même nombre d'éléments.

Ce qui conduit à la définition suivante.

Définition 2.13

La **dimension** d'un s.e.v. F de $\mathbb{R}^m$ est le nombre d'éléments de chacune de ses bases.

$$\dim F = \text{card}\mathcal{B}, \text{ pour toute base } \mathcal{B} \text{ de } F.$$

Théorème 2.13

Soit F un s.e.v de **dimension** k alors

- toute famille linéairement indépendante de F a **au plus** k éléments,
- une famille linéairement indépendante de F ayant k éléments est une base de F,
- toute famille génératrice de F a **au moins** k éléments,
- une famille génératrice de F ayant k éléments est une base de F.

Remarque. Quand on connaît la valeur de la dimension d'un s.e.v. et *seulement dans ce cas* , pour montrer qu'une famille donnée est une base, il suffit de s'assurer que son nombre d'éléments est égal à la dimension, puis vérifier soit que la famille est linéairement indépendante, soit qu'elle est génératrice.

Théorème 2.14

Soient F_1 et F_2 deux s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ tels que $F_1 \subset F_2$. Alors

$$\dim F_1 \leq \dim F_2 \leq m.$$

De plus, $\dim F_1 = \dim F_2$ si et seulement si $F_1 = F_2$.

En général un s.e.v. admet une infinité de bases. Comment sont reliées les composantes d'un vecteur dans une base aux composantes de ce même vecteur dans une autre base ?

Définition 2.14

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ de dimension k et soient $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \cdots, u_k)$ et $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$ deux bases de F.
On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = ((v_1)_{\mathcal{B}}\ (v_2)_{\mathcal{B}}\ \cdots\ (v_k)_{\mathcal{B}}).$$

C'est une matrice $k \times k$.

Théorème 2.15

Pour tout $x \in F$, $(x)_{\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}(x)_{\mathcal{B}'}$.