Exercice 1.[Vrai-Faux]

1. Si $\lim_{x\to 0} f(x) = 6$, alors il existe un réel δ tel que si $0 < |x| < \delta$, alors $|f(x) - 6| < \delta$.
2. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe mais $\lim_{x\to a} g(x)$ n'existe pas, alors $\lim_{x\to}[f(x) + g(x)]$ n'existe pas.
3. Si la droite $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe de f, alors f n'est pas définie en 1.
4. Si $f(x) > 1$ pour tout x, et $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, alors $\lim_{x\to 0} f(x) > 1$.

Exercice 2. Calculer les limites ci-dessous.

1. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$
2. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1}$
3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3+7x^4}{x^4+x^5}$
4. $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$
5. $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$
6. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{4x}$

Exercice 3. Déterminer l'ensemble de définition et toutes les asymptotes des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \frac{e^x - 5}{e^x + 1}$
2. $g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$
3. $h(x) = \frac{\ln(x^2) + 1}{2x}$

Exercice 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Un point fixe de f est un réel x^* appartenant à I tel que $f(x^*) = x^*$.

1. Esquisser le graphe d'une fonction continue dont l'ensemble de définition est l'intervalle $[0, 1]$ et l'ensemble d'arrivée est $[0, 1]$. Localiser le point fixe.
2. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que toute fonction définie sur I à valeurs dans I a un point fixe.

Exercice 5. Lorsque les fonctions ci-dessous sont inversibles, calculer leur fonction réciproque en précisant leur domaine de définition.

1. $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$,
2. $g(x) = e^{x^2+1}$,
3. $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,
4. $k(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{x}$.

Exercice 6.

1. Montrer que la fonction sinus restreinte à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ admet une fonction réciproque de $[-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On note arcsin cette fonction réciproque. La notation $\theta = \arcsin(x)$ peut se lire, "θ est l'arc (entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) dont le sinus vaut "$x$".
2. Calculer $\arcsin(0), \arcsin(\frac{1}{2}), \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}), \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $\arcsin(1)$.
3. Montrer que la fonction arcsin est impaire et tracer le graphe de cette fonction.
4. Montrer que pour $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$.
5. Montrer que pour $\arcsin(\sin x)) = x$ si et seulement si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
6. L'équation $\arcsin x = \frac{2\pi}{3}$ a-t-elle une solution ?

Exercice 7.

1. Montrer que la fonction cosinus restreinte à l'intervalle $[0, \pi]$ admet une fonction réciproque de $[-1, 1]$ à $[0, \pi]$. On note arccos cette fonction réciproque. La notation $\theta = \arccos(x)$ peut se lire, "θ est l'arc compris entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le cosinus vaut "x".
2. Calculer $\arccos(0), \arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}), \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $\arccos(1)$.
3. La fonction arccos est-elle paire, impaire ?
4. Montrer que pour $x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.
5. L'équation $\arccos x = \frac{2\pi}{3}$ a-t-elle une solution ?