Exercice 1.

1. Soit $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$. Montrer que $f(-1) = f(1)$ et qu'il n'existe pas de réel c tel que $f'(c) = 0$. Ceci contredit-il le théorème de Rolle ?
2. Soit $f(x) = (x-3)^{-2}$. Montrer qu'il n'existe pas de réel c dans $]1,4[$ tel que $f(4) - f(1) = 3f'(c)$. Ceci contredit-il le théorème des accroissements finis ?
3. Existe-t-il une fonction dérivable f telle que $f(0) = -1, f(2) = 4$ et telle que $f'(x) < 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Soit $f(x) = 2x + \cos(x)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
2. Puis, montrer que cette solution est unique.
3. Mêmes questions lorsque $f(x) = 2x - 1 - \sin(x)$.
4. Soit c un réel. Montrer que l'équation $x^3 - 27x - c = 0$ a au plus une solution dans $[-2; 2]$.

Exercice 3.

1. Montrer qu'un polynôme de degré 3 a au plus 3 racines réelles.
2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annulant trois fois sur $\mathbb{R}$. Montrer que f'' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.[Théorème des accroissements finis généralisée et règle de l'Hospital [1]]

Soient f et g deux fonctions continues d'un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose $g(b) \neq g(a)$.

1. On pose $h(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\Big(g(x) - g(a)\Big)$. Montrer qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
2. On suppose que $\lim_{x\to a^+} f(a) = \lim_{x\to a^+} g(a) = 0$ et que g' ne s'annule pas dans un voisinage de a. Montrer que si $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors,
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
3. Application. Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$, $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$, $\lim_{x\to 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 5.[*avec calculatrice*] Calculer le développement de Taylor-Lagrange de $\cos(x)$ au point π à l'ordre 4.En déduire une approximation de $\cos(3)$ à 5.10^{-7} près.

Exercice 6.[*avec calculatrice*] Montrer que pour tout $x \geq 0$,
$$1 - \frac{1}{3}x + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}.$$
En déduire un encadrement de $\frac{1}{2}$ et de $\frac{2}{3}$. Commenter.

Exercice 7. Soit $f(x) = \ln(1+x)$.

1. Calculer de développement de Taylor-Lagrange de f à l'ordre n.
2. On pose $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Montrer que $|\ln 2 - u_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$.
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

1. Guillaume de l'Hospital, mathématicien français du XVIIème siècle.