

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions s'écrivant comme suit :

$$f(x) = 3 + x + 5x^3 + x^2\varepsilon_1(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0 \quad g(x) = -2 + 2x - 2x^{\frac{5}{2}} + x^2 + 4x^3 + x^3\varepsilon_2(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

1. L'expression donnée de f définit-elle un DL à l'ordre 3 en 0 de f ?
2. Montrer que f admet un DL à l'ordre 2 en 0.
3. L'expression donnée de g définit-elle un DL à l'ordre 3 en 0 de g ?
4. Montrer que g admet un DL à l'ordre 2 en 0.
5. Montrer, en définissant explicitement le reste, que la fonction $h(x) = 2 + x + x^3\sqrt{1+x} + x^{\frac{5}{2}}e^{-x}$ admet un DL d'ordre 2 en 0.

Exercice 2. Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0 lorsque

$$\text{a) } f(x) = \cos(x) \exp(x), \quad \text{b) } f(x) = \left(\ln(1+x)\right)^2, \quad \text{c) } f(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}.$$

Exercice 3.

1. Soit $f(x) = \frac{e^x - \cos x}{x}$.
 - a. Calculer le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2 en 0.
 - b. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Peut-on en déduire $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?
 - c. Donner l'équation de la tangente à f en 0.
 - d. Quelle est la position de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0 ?
2. Reprendre les questions ci-dessus lorsque $f(x) = \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$.
3. Reprendre les questions ci-dessus lorsque $f(x) = \frac{\sin x}{1+x}$.

Exercice 4.

1. Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Calculer le DL de f en 1 à l'ordre 2. On posera $y = x - 1$ pour se ramener à un développement limité usuel en 0.
2. À l'aide d'un changement de variable, calculer le DL en 2 à l'ordre 2 de $f(x) = e^x$.
3. À l'aide d'un changement de variable, calculer le DL en 2 à l'ordre 2 de $f(x) = \ln(x)$.