I.U.T. de Villetaneuse
Département d'informatique Vendredi 13 mars 2015

Corrigé du contrôle d'Analyse

Exercice 1. Les trois questions suivantes sont indépendantes. On détaillera chacune des réponses.

1. Calculer $16^{\frac{3}{4}}$.
2. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $\ln a + \frac{1}{2}\ln b = \ln\left(a\sqrt{b}\right)$.
3. Résoudre l'équation $e^{5-3x} = 1$.

Correction :

1. $16^{\frac{3}{4}} = \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left((2^4)^{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(2\right)^3 = 8$.
   Autre méthode. $16^{\frac{3}{4}} = \exp(\frac{3}{4}\ln 16) = \exp(\frac{3}{4}\ln(2^4)) = \exp(\frac{12}{4}\ln 2) = \exp(3\ln 2) = \exp(\ln 2^3) = \exp(\ln 8) = 8$.
2. $\ln a + \frac{1}{2}\ln b = \ln a + \ln(b^{\frac{1}{2}}) = \ln(a\, b^{\frac{1}{2}}) = \ln(a\sqrt{b})$.
3. $e^{5-3x} = 1$ est équivalent à $\ln(e^{5-3x}) = \ln 1$, c-à-d, $5 - 3x = 0$ et donc $x = \frac{5}{3}$.

Exercice 2.

1. Donner la définition d'une fonction réciproque.
2. Soit $g(x) = \ln(x^2 + e)$.
   a. Donner le domaine de définition de g.
   b. Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty;0[$ sur un invervalle J à définir.
   c. Justifier que g admet une fonction réciproque de J vers $]-\infty;0[$, puis calculer cette fonction réciproque.

Correction :

1. voir cours.
2. Le domaine de définition de la fonction ln est $]0,+\infty[$. g est la composée de $\ln x$ avec $x^2 + e$: $g(x) = f(h(x))$ avec $f(x) = \ln(x)$ et $h(x) = x^2 + e$. Comme $h(x) > 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(h(x))$ est bien définie et $D_g = \mathbb{R}$.
3. g est continue et dérivable sur $]-\infty,0[$ comme composée de fonctions continues et dérivables sur cet intervalle et $g'(x) = \Big(f(h(x))\Big)' = f(h(x))h'(x) = \dfrac{2x}{x^2+e}$.
   Pour $x < 0$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$. De plus $g(0) = \ln e = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.
   Donc g réalise une bijection de $]-\infty,0[$ sur $J =]1,+\infty[$.
4. Comme g réalise une bijection de $]-\infty,0[$ sur $J =]1,+\infty[$, elle admet une fonction réciproque de $J =]1,+\infty[$ vers $]-\infty,0[$, notée g^{-1}. Pour calculer g^{-1}, on pose $y = \ln(x^2+e)$ et on va chercher à exprimer x en fonction de y.
   $$y = \ln(x^2+e) \Leftrightarrow e^y = x^2 + e \Leftrightarrow x^2 = e^y - e \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{e^y - e}.$$
   Comme on sait que g^{-1} est à valeurs dans $]-\infty,0[$, on doit prendre $x = -\sqrt{e^y - e}$
   et donc $g^{-1}(x) = -\sqrt{e^x - e}$.

Exercice 3. Déterminer les extrema éventuels des fonctions définies ci-dessous.

a) $f(x) = x^2 - x - 1$, sur $[0;3]$ b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{lorsque } 0 \le x < 1 \\ (2-x)^2 & \text{lorsque } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Correction :

a) f est une fonction continue sur $[0,3]$ qui est un intervalle fermé, donc elle admet un maximum et un minimum. Pour trouver ces extrema on calcule $f(0), f(3)$ et $f(c_i)$ avec c_i des points critiques.
On a $f('x) = 2x - 1$ donc $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{1}{2}$. Il n'y a ici qu'un seul point critique qui est $c = \frac{1}{2}$.
On a $f(0) = -1, f(3) = 5$ et $f(\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}$. Donc f a un minimum en $x = \frac{1}{2}$ qui vaut $-\frac{5}{4}$ et f a un maximum en $x = 3$ qui vaut 5.

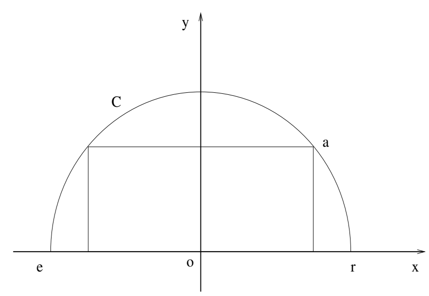
b) On remarque que g n'est pas continue sur $[0,2]$, puisque $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 1$. La fonction n'a donc pas de maximum sur $[0,2]$.
Calculons les points critiques de g.

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{lorsque } 0 \leq x < 1 \\ -2(2-x) & \text{lorsque } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Donc $g'(x) = 0$ si et seulement si $x = 2$ qui est donc le seul point critique.
De l'expression de g' on déduit que g est strictement croissante sur $[0,1[$ et va de $g(0) = 1$ à $+\infty$ et g est strictement décroissante sur $[1,2]$ et va de $g(1) = 1$ à $g(2) = 0$. On en déduit que g admet un minimum en $x = 2$ qui vaut 0.

Exercice 4.

L'objectif de cet exercice est de trouver le rectangle d'aire maximale inscrit dans le demi-cercle de centre 0 et de rayon R. On note $\mathcal{C}$ ce demi-cercle. Ici, *inscrit* signifie que deux sommets du rectangle sont sur le demi-cercle et que les deux autres sommets sont sur l'axe des abcisses, comme le montre la figure ci-contre.



1. Exprimer l'aire d'un rectangle inscrit dans le demi-cercle $\mathcal{C}$ en fonction de x et y.
2. En utilisant que pour tout point (x,y) appartenant à $\mathcal{C}$, $x^2 + y^2 = R^2$, montrer que l'aire d'un rectangle inscrit dans $\mathcal{C}$ est :
$$A(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}.$$
3. Trouver les extrema de $A(x)$.
4. En déduire l'aire du plus grand rectangle inscrit dans $\mathcal{C}$.

Correction :

1. Un rectangle inscrit dans $\mathcal{C}$ a une longueur égale à $2x$ et une largeur égale à y, donc l'aire d'un tel rectangle est $2xy$.
2. Comme (x,y) appartient à $\mathcal{C}$, $y^2 = R^2 - x^2$, soit $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (car on a choisi le demi-cercle dans la partie supérieure du plan). Ainsi $A(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$.
3. On cherche les extrema de A sur $[0,R]$ qui est un intervalle fermé. Pour trouver un extrema de A on va chercher un (ou des) point critique, c puis calculer $A(0), A(R)$ et $A(c)$ pour déterminer les extrema.
Cherchons les points critiques :
$$A'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} + 2x\frac{-2x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$
$A'(x) = 0$ si et seulement si $2(R^2 - x^2) - 4x^2 = 0$ soit $2R^2 = 6x^2$ ou encore $x = \sqrt{\frac{R^2}{3}}$. (x étant une longueur on le choisit poisitif.)
On a $A(0) = 0$, $A(R) = 0$ et $A(\sqrt{\frac{R^2}{3}}) = 2\sqrt{\dfrac{R^2}{3}}\sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{3}} = 2\sqrt{\dfrac{R^2}{3}\dfrac{2R^2}{3}} = 2\sqrt{2}\dfrac{R}{3}$. Donc l'aire du plus grand rectangle inscrit dans $\mathcal{C}$ est $2\sqrt{2}\dfrac{R}{3}$.