1 Généralités sur les fonctions

Soient E et F deux ensembles d'éléments, la correspondance qui à tout élément x de E fait correspondre au plus un élément y appartenant à F est appelée fonction.
L'élément y est appelé image de x par la fonction f. L'élément x est appelé antécédent de y par la fonction f.
Le sous ensemble D_f de E contenant les éléments x appartenant à E à qui on fait correspondre un élément dans F est appelé domaine ou ensemble de définition de la fonction f.

Question 1.1 *Quel est l'ensemble de définition de* $f(x) = \sqrt{-x^2 + x - 1}$ *et de* $f(x) = \sqrt{-|x|}$ *?*

On appelle graphe de f l'ensemble $\{(x, f(x) \,|\, x \in D_f\}$. Quelles sont les courbes du plan (Oxy) qui sont des graphes de fonctions ?

Proposition 1.1

Une courbe du plan (Oxy) est le graphe d'une fonction de x si et seulement si aucune droite verticale intersecte la courbe plus d'une fois.

Question 1.2 $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y^2 - 2\right\}$. *S'agit-il du graphe d'une fonction de* x *?*

Dans ce qui suit f est une fonction de I dans $J \subset \mathbb{R}$, avec $I \subset D_f$.
Parité et périodicité d'une fonction.
On dit que est f est paire (resp impaire) si :

$$\forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x), \qquad (\forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)).$$

On dit que est f est T-périodique si :

$$\forall x \in D_f,\ f(x + T) = f(x).$$

Sens de variation d'une fonction.

— f est croissante sur I si
$$\forall x \in I,\ x' \in I, x < x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x').$$
Si l'inégalité est stricte, on dit que f est strictement croissante sur I.

— f est décroissante sur I si
$$\forall x \in I,\ x' \in I, x < x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x').$$
Si l'inégalité est stricte, on dit que f est strictement décroissante sur I.

— f est (strictement) monotone sur I si f ne change pas de sens de variation sur I, c'est-à-dire si f est soit (strictement) croissante sur I, soit (strictement) décroissante sur I.

Définition 1.1

On dit que la fonction $f : I \longrightarrow J$ est bijective si tout élément y de J possède un unique antécédent par f. On dira alors que f réalise une bijection de I sur J.

1.1 Quelques fonctions usuelles

1.1.1 Fonctions trigonométriques

Soient P le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1, appelé cercle trigonométrique. Considérons l'application

$$M : \mathbb{R} \longrightarrow P$$

qui à un nombre réel θ associe le point $M(\theta)$, intersection de $\mathcal{C}$ avec la demi-droite d'origine O et d'angle polaire de mesure θ radian. Autrement dit, le point $M(\theta)$ est la seconde extrémité de l'arc de cercle de $\mathcal{C}$ d'origine $A(1, 0)$ obtenu comme suit :

— Si $\theta \geq 0$, on reporte sur $\mathcal{C}$ à partir du point $A(1, 0)$, dans le sens positif un arc de cercle de longueur θ.

— Si $\theta < 0$, on reporte sur $\mathcal{C}$ à partir du point $A(1,0)$, dans le sens négatif un arc de cercle de longueur $|\theta|$.

Définition 1.2

— Le cosinus de θ, noté $\cos\theta$, est l'abscisse du point $M(\theta)$.
— Le sinus de θ, noté $\sin\theta$, est l'ordonnée du point $M(\theta)$.

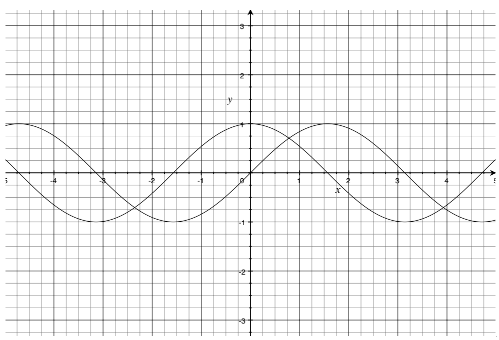
Les fonctions sinus et cosinus sont définis sur $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Lorsque $\cos\theta \neq 0$, le coefficient directeur de la droite $(0M(\theta))$ est $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$. La fonction associée à ce quotient est la fontion tangente.

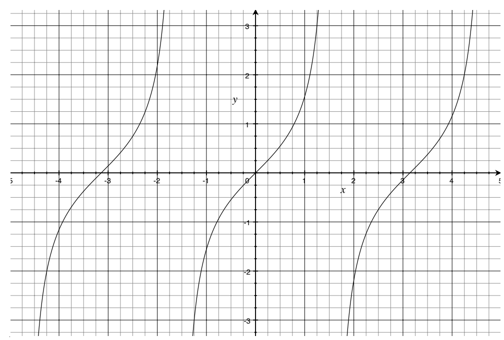
Définition 1.3

La fonction tangente, notée $\tan$, est définie par

$$\begin{array}{rccc} \tan\ : & D_T := \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \theta & \longrightarrow & \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \end{array}$$

Ci-dessous (à gauche) sont représentées les courbes des fonctions sinus et cosinus, et à droite la courble de la fonction tangente.





Le cercle trigonométrique étant de rayon 1, le théorême de Pythagore conduit à

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

De cette relation on déduit quelques valeurs des fonctions trigonométriques.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$

On a les relations élémentaires suivantes :

$$\begin{array}{llll} \sin(-\theta) = -\sin\theta & \cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\sin\theta & \sin(\theta+\pi) = -\sin\theta & \tan(-\theta) = -\tan\theta, \\ \cos(-\theta) = \cos\theta & \sin(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos\theta & \cos(\theta+\pi) = -\cos\theta & \tan(\theta+\pi) = \tan\theta, \end{array}$$

et les formules d'addition :

$$\cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \sin\alpha\sin\theta \qquad \sin(\theta+\alpha) = \sin\theta\cos\alpha + \cos\alpha\sin\theta$$

Question 1.3 *1. Retrouver les valeurs des fonctions trigonométriques données dans le tableau ci-dessus et retrouver les relations élémentaires en utilisant le cercle trigonométrique.*

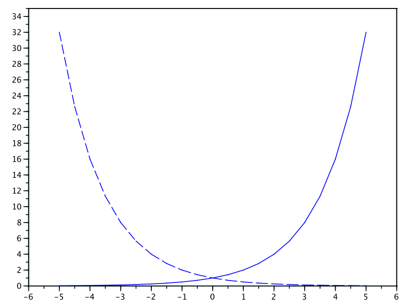
2. Montrer que $\sin^2\theta = \dfrac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$ *et* $\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$.

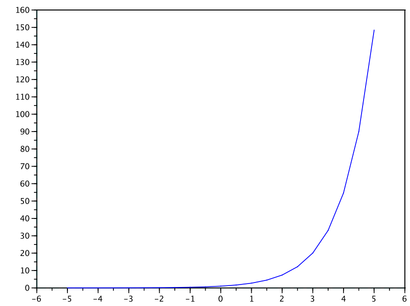
1.1.2 Fonction exponentielle

La fonction $f(x) = 2^x$ est appelée fonction exponentielle car la variable x est l'exposant. En général une fonction exponentielle est de la forme

$$f(x) = a^x, \qquad \text{avec } a \text{ une constante \underline{positive}.}$$

On appelle a la base de la fonction exponentielle. Ci-dessous sont représentés les graphes de $f(x) = a^x$ pour $a = 2$, $a = \frac{1}{3}$ ainsi que le graphe de e^x sur $[-5 : 5]$.





Proposition 1.2 (Règle sur les exposants.)

Soient a et b deux réels positifs et soient x et y deux réels. Alors,

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$

Question 1.4 *Simplifier les expressions ci-dessous.*

1. $\frac{4^{-3}}{2^{-8}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$, *2.* $8^{4/3}$, $x(3x^2)^3$, *3.* $b^8(2b)^4$, $\frac{(6y^3)^4}{2y^5}$, *4.* $\frac{x^{2n}\,x^{3n-1}}{x^{n+2}}$, $\frac{\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}}$.

On cherche la base a de sorte que la pente de la tangente à la courbe de $f(x) = a^x$ en $(0, 1)$ soit égale à 1. Cette valeur de a est approximativement 2.71828 et conduit à définir la fonction exponentielle comme

$$f(x) = e^x.$$

1.2 Fonctions composées

Définition 1.4

Soient f et g deux fonctions de I_f dans J_f et de I_g dans J_g respectivement. La fonction composée $f \circ g$, appelée aussi la composée de f et g est définie de I_g dans J_j par

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Question 1.5 *1. Soient $f(x) = x + \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$. Calculer $(f \circ g), (g \circ f), (f \circ f)$ et $(g \circ g)$ et indiquer leur domaine de définition.*

2. Trouver des fonctions f, g et h telles que $H(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$ s'écrive sous la forme $f \circ g \circ h$.

3. Montrer que si f et g ont même sens de variation (sur I pour f et sur J pour g), alors la composée $g \circ f$ est croissante sur I.

4. Montrer que si f et g ont un sens opposé de variation (sur I pour f et sur J pour g), alors la composée $g \circ f$ est décroissante sur I.

1.3 Fonction réciproque

Le tableau ci-dessous présente les données d'une expérience dans laquelle une culture de bactéries composée initialement de 100 bactéries dans un milieu nutritif limité ; la taille de la population bactérienne a été enregistré toutes les heures. Le nombre de bactéries N est une fonction du temps t : $N = f(t)$. Supposons, cependant, que le biologiste change son point de vue et s'intéresse à la durée nécessaire à la population pour atteindre différents niveaux. En d'autres termes, on s'intéresse à t en fonction de N. Cette fonction est appelée la fonction réciproque de

f, noté f^{-1}, et lue "réciproque de f." Ainsi $t = f^{-1}(N)$ est le temps nécessaire pour que le niveau de la population soit égale à N. les valeurs de f^{-1} peuvent être trouvées en lisant le tableau de gauche de droite à gauche ou en consultant le tableau de droite.

t(heures)	$N = f(t)$
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509

N	$t = f^{-1}(N)$
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5

Proposition 1.3

Si $f : I \to J$ est une bijection, à chaque $y \in J$ correspond un unique élément $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Cela définit une fonction de J dans I, appelée fonction réciproque de f et notée f^{-1}. On a alors

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x.$$

On dit que f est inversible.

Attention : Ne pas confondre $f^{-1}(x)$ et $\dfrac{1}{f(x)}$.

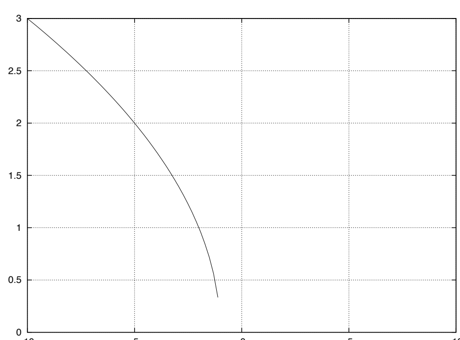
Question 1.6 *Trouver la fonction réciproque de $f(x) = x^3 + 2$.*

Pour une fonction f inversible, $f(a) = b$ si et seulement si $f^{-1}(b) = a$, autrement dit le point (a, b) appartient au graphe de f si et seulement si le point (b, a) appartient au graphe de f^{-1}. Le point (b, a) s'obtenant par symétrie de (a, b) par rapport à la droite $y = x$. On a le résultat suivant :

Proposition 1.4

Le graphe de f^{-1} s'obtient pas symétrie du graphe de f par rapport à la droite $y = x$.

Question 1.7 *Tracer le graphe de f^{-1} à partir du graphe de $f(x) = \sqrt{-1-x}$ sur $]-10, 0]$ représenté à la figure ci-dessous.*



Proposition 1.5

Si $f : I \longrightarrow J$ est bijective et strictement monotone sur I, alors f^{-1} est strictement monotone de même sens sur J.

1.3.1 Fonction logarithme

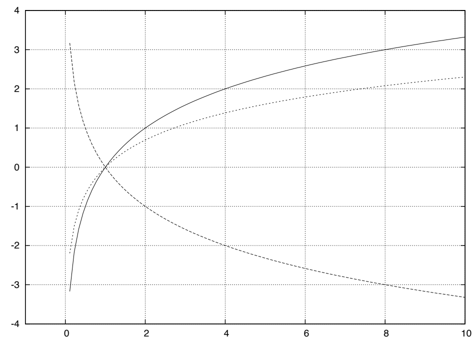
Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. Alors, la fonction exponentielle $f(x) = a^x$ est bijective et donc inversible. Sa fonction réciproque est appelée logarithme de base a et est notée $\log_a(x)$. Ainsi,

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x,$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \log_a(a^x) = x, \qquad \forall x > 0,\ a^{\log_a(x)} = x.$$

Ci-dessous sont représentés les graphes de $\log_a(x)$ pour $a =, a = 0.5$ et $a = e$.



Le logarithme en base e est appelé logarithme népérien et est noté $\ln$. On a en particulier $\ln e = 1$.

Proposition 1.6

Soient x et y des réels strictement positifis. Alors,

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_b(y)$.
2. $\log_a(\dfrac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_b(y)$.
3. $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$, avec r un réel quelconque.

Question 1.8 *1. Montrer que* $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

2. Calculer $\log_2(80) - \log_2(5)$.

3. Simplifier l'expression $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$.

2 Limite et continuité

Galilée en 1605 a découvert expérimentalement que la distance parcourue par un corps en chute libre est proportionnelle au carré du temps (Ce modèle de chute libre néglige la résistance de l'air.) Si la distance de chute après t secondes est désignée par $s(t)$ et mesurée en mètres, alors la loi de Galilée s'exprime par la relation

$$s(t) = \tfrac{1}{2} g\, t^2,$$

où g est l'accélération du champ de pesanteur terrestre (environ 9.81 m.s^{-2}). Comment trouver la vitesse de cet objet au temps $t = 5$ s ?
Calculons la vitesse moyenne sur l'intervalle $[5, 5.1]$ de longueur 0.1 s :

$$\text{vitesse moyenne } = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}} = \frac{s(5.1) - s(5)}{0.1} = 49.49 \text{ ms}^{-1}.$$

Dans le tableau ci-dessous sont reportées les vitesses moyennes sur différents intervalles de temps.

Intervalle de temps	$5 \le t \le 6$	$5 \le t \le 5.1$	$5 \le t \le 5.05$	$5 \le t \le 5.01$	$5 \le t \le 5.001$
Vitesse moy. en ms^{-1}	53.9	49.49	49.245	49.049	49.0049

Remarquons qu'à mesure que l'intervalle de temps est de longueur de plus en plus petite, la vitesse moyenne est de plus en plus proche de 49 ms^{-1}. La vitesse instantannée lorsque $t = 5$ est la valeur limite de ces vitesses moyennes sur des intervalles de longueur de plus en plus petite. La vitesse instantannée au delà de $t = 5$s est $v = 49$ ms^{-1}.

Dire que les valeurs d'une fonction $f(x)$ sont de plus en plus proches d'un réel l à mesure que x s'approche du réel a signifie que la limite de $f(x)$ en a est égal à l. Mathématiquement cela se formule de la façon suivante :

Définition 2.1

On dit que la fonction f admet la limite $l \in \mathbb{R}$ au point $a \in I$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, \quad 0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

L'expression ci-dessus signifie que l'on peut rendre arbitrairement $f(x)$ aussi proche de l en prenant x suffisament proche de a sans, être égal à a.
On écrit $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$ pour signifier que la limite de $f(x)$ lorsque x approche a par la gauche est égale à L. Autrement dit on peut rendre arbitrairement $f(x)$ aussi proche de l en prenant x suffisament proche de a et strictement plus petit que a.
De la même façon on définit la limite à droite de $f(x)$ en a.

Proposition 2.1 (Règle de calculs des limites)

Soient f et g deux fonctions telles que $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ existent et soit c un réel. Alors,

1. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$. (La limite de la somme est la somme des limites.)

2. $\lim\limits_{x \to a}[cf(x)] = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

3. $\lim\limits_{x \to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$. (La limite du produit est le produit des limites.)

4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$. (La limite du quotient est le quotient des limites.)

Question 2.1 *Calculer les limites suivantes.*

a. $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$, *avec* $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ *pour* $x \geq 0$.

b. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$, $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^3+8}$, $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}} - \dfrac{1}{t} \right)$.

2.1 Fonctions continues

Définition 2.2

Une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est continue en a si f admet une limite au point a et

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

La continuité de f au point a s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0, \forall x \in I, \qquad |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Une fonction est continue sur un intervalle si elle est continue en chaque point de cet intervalle.

Question 2.2 *1. Trouver les réels a, b et c tels que* $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \textit{si } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \textit{si } 2 < x < 3 \\ 2x - a + b & \textit{si } x \geq 3 \end{cases}$ *soit continue.*

2. Montrer que la fonction $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin(\frac{1}{x}) & \textit{si } x \neq 0 \\ 0 & \textit{si } x = 0 \end{cases}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Proposition 2.2

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle et la fonction $f : I \longrightarrow f(I)$ est bijective.

Théorème 2.1 (des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et soit L un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ avec $f(a) \neq f(b)$. Alors, il existe un réel c dans $]a,b[$ tel que $f(c) = L$.

Question 2.3 *1. La réciproque est-elle vraie ?*

2. Trouver les racines de $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$.

2.2 Limites infinies et à l'infini

Dans le tableau ci-dessous sont reportées les valeurs de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pour des valeurs de x proches de 0.

x	± 1	± 0.1	± 0.05	± 0.01	± 0.001	± 0.0001
$f(x)$	1	100	400	10^4	10^6	10^8

Nous observons sur ce tableau que les valeurs de $f(x)$ n'approche pas un réel lorsque x se rapproche de 0. Nous remarquons plutôt que les valeurs de $f(x)$ deviennent aussi grandes que nous le souhaitons dès lors que x est suffisament proche de 0. Mathématiquement ceci s'écrit :

Définition 2.3

On dit que la fonction f définie sur un intervalle I admet une limite infinie au point $a \in I$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, \quad 0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) > \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Question 2.4 *1. Écrire la définition de* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

2. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$, $\lim_{x \to +\infty} \sin x$

Limites à connaître.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\alpha x} = 0$, pour $\alpha > 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$, pour $\alpha, \beta > 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-\alpha} e^{\beta x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^{-\alpha} e^{-\beta x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x))^\alpha x^{-\beta} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x))^{-\alpha} x^\beta = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} |\ln(x)|^\alpha x^\beta = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} |\ln(x)|^{-\alpha} x^{-\beta} = +\infty.$

Définition 2.4

Soient f une fonction et a un réel. Lorsque l'une des situations ci-dessous est satisfaite,

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de à la courbe représentative de f.

Dans le tableau ci-après sont reportées les valeurs de $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ pour des valeurs de x de plus en plus grandes.

x	± 1	± 5	± 10	± 100	± 1000	$\pm 10\,000$
$f(x)$	0	0.923077	0.980198	0.999800	0.999998	0.999999998

Définition 2.5

On dit que la fonction f définie sur un intervalle $]a, +\infty[$ admet une limite finie l en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \alpha > 0, \forall x > \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Définition 2.6

Soient f une fonction et l un réel. Lorsque l'une des situations ci-dessous est satisfaite,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

on dit que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale de à la courbe représentative de f.

Question 2.5 *1. Le graphe de $y = f(x)$ peut-il intersecter une asymptote verticale ? une asymptote horizontale ? Combien d'asymptotes horizontales ce graphe peut-il avoir ?*

2. Esquisser le graphe de f dans les deux cas suivants :

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5,\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -5,$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2,\ f(0) = 0,\ f$ *est paire.*