Chapitre 2 : Développements limités

Soit f une fonction 3 fois dérivable sur $]a, b[$. Soient x et α deux points de $[a, b]$. Alors il existe un réel c_x entre x et α tel que :

$$f(x) - f(\alpha) = (x-\alpha)f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^3}{3!}f^{(3)}(c_x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) =& f(\alpha) + (x-\alpha)f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^3}{3!}f^{(3)}(\alpha) \\ &+ \frac{(x-\alpha)^3}{3!}\underbrace{\left(f^{(3)}(c_x) - f^{(3)}(\alpha)\right)}_{=\varepsilon(x)}. \end{aligned}$$

$f^{(3)}$ étant continue en α et c_x tendant vers α lorsque x tend vers α (théorème des gendarmes), on a :

$$\lim_{x\to\alpha} \varepsilon(x) = 0.$$

Ainsi,

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^3}{3!}f^{(3)}(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^3}{3!}\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x\to\alpha} \varepsilon(x) = 0$.

Théorème 1 (Formule de Taylor-Young)

Soit f une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$. Soient x et α deux points de $[a,b]$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) =& f(\alpha) + (x-\alpha)f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^3}{3!}f^{(3)}(\alpha) \\ &+ \frac{(x-\alpha)^4}{4!}f^{(4)}(\alpha) + \cdots + \frac{(x-\alpha)^n}{n!}f^{(n)}(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!}\varepsilon(x), \end{aligned}$$

$$\text{avec } \lim_{x\to\alpha} \varepsilon(x) = 0.$$

L'expression ci-dessus est le développement de Taylor-Young de f en α à l'ordre n.

Remarques.

1. Avec la formule de Taylor-Young on retrouve pour $n=1$, la définition de la dérivée :

$$f(x) = f(a) + (x-\alpha)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to\alpha} \varepsilon(x) = 0.$$

2. La formule de Taylor-Young donne uniquement, pour α fixé, une information locale sur f ; c'est-à-dire une information sur le comportement de f au voisinage de α).

Définition 1

Soit f une fonction sur $]a, b[$. Soit α un point de $]a, b[$. On dit que f admet un développement limité (DL) d'ordre n en α s'il existe des réels $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2\frac{(x-\alpha)^2}{2!} + a_3\frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots + a_n\frac{(x-\alpha)^n}{n!} + (x-\alpha)^n\varepsilon(x), \quad \text{avec} \lim_{x\to\alpha}\varepsilon(x) = 0. \tag{1}$$

Autrement dit, il existe un polynôme de degré inférieur ou égal à n, noté P, t.q.

$$f(x) = P(x) + (x-\alpha)^n\varepsilon(x), \qquad \text{avec} \lim_{x\to\alpha}\varepsilon(x) = 0.$$

Proposition 1

1. Si f admet un DL d'ordre n, les réels $a_k, k = 0, \cdots, n$, dans la formule (1) sont uniques.
2. Si f est une fonction n fois dérivable, alors f admet un DL d'ordre n en α et les réels a_k de la formule (1) sont donnés par $a_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$ pour $k = 0, \cdots, n$.

Quelques développements limités usuels à l'ordre 3 en 0.

- $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

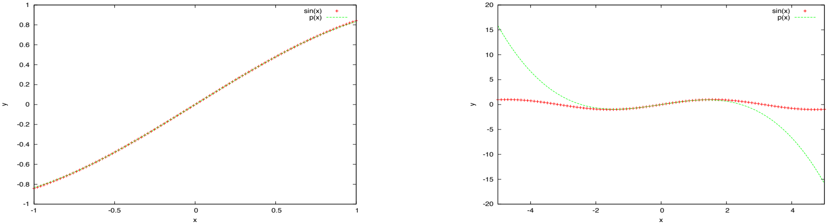


Figure: Approximation de $\sin x$ par son polynôme de Taylor $p(x)$; à gauche sur $[-1;1]$, à droite sur $[-5;5]$.

- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + x^3\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

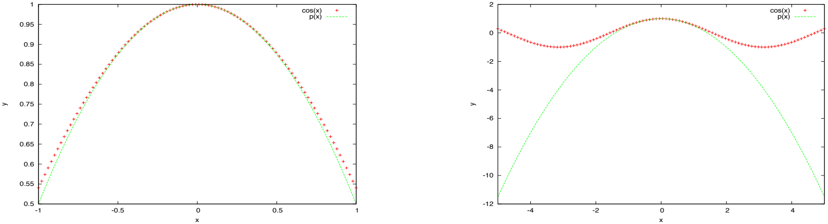
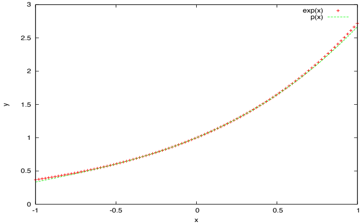


Figure: Approximation de $\cos x$ par son polynôme de Taylor $p(x)$; à gauche sur $[-1;1]$, à droite sur $[-5;5]$.

- $\exp(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.



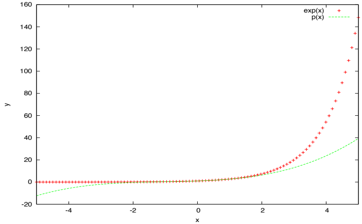
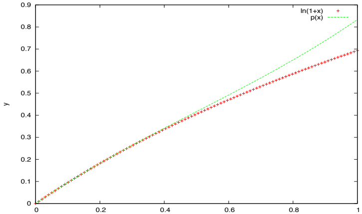


Figure: Approximation de e^x par son polynôme de Taylor $p(x)$; à gauche sur $[-1; 1]$, à droite sur $[-5; 5]$.

- $\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.



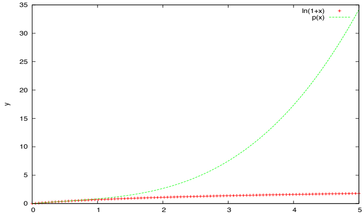


Figure: Approximation de $\ln(1 + x)$ par son polynôme de Taylor $p(x)$; à gauche sur $[0; 1]$, à droite sur $[0; 5]$.

- $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

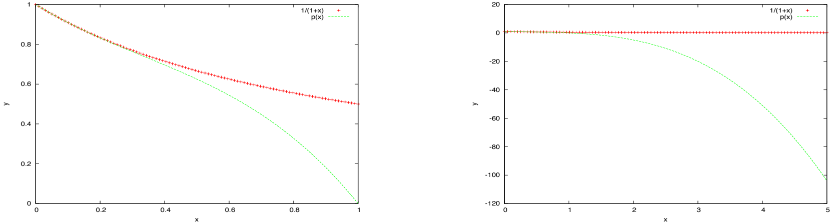


Figure: Approximation de $\frac{1}{1+x}$ par son polynôme de Taylor $p(x)$; à gauche sur $[0;1]$, à droite sur $[0;5]$.

- $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

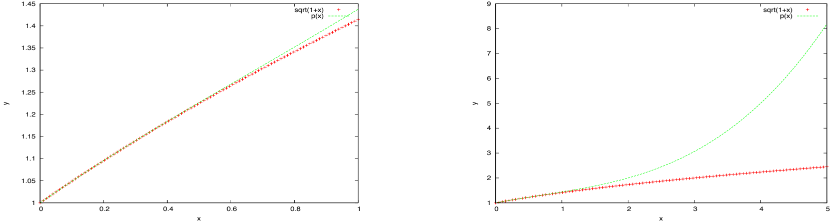


Figure: Approximation de $\sqrt{1+x}$ par son polynôme de Taylor $p(x)$; à gauche sur $[0;1]$, à droite sur $[0;5]$.

Exercice. Retrouver les développements limités ci-dessus en utilisant la formule de Taylor-Young.

Remarque. On obtient un DL en $\alpha \neq 0$, à partir d'un DL en 0, en faisant le changement de variable $h = x + \alpha$.

Proposition 2 (Opérations sur les DL)

Soient f et g deux fonctions sur $]a, b[$. Soit α un point de $]a, b[$. On suppose que f et g admettent un DL d'ordre n en α, i.e il existe des polynômes P et Q tels que

$$f(x) = P(x) + (x-\alpha)^n \varepsilon_1(x) \quad g(x) = Q(x) + (x-\alpha)^n \varepsilon_2(x)$$
$$\text{avec } \lim_{x\to\alpha} \varepsilon_1(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to\alpha} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Alors

1. $f + g$ admet un développement limité (DL) d'ordre n en α,
$$f(x) + g(x) = \big(P + Q\big)(x) + (x-\alpha)^n \varepsilon_3(x), \qquad \text{avec } \lim_{x\to\alpha} \varepsilon_3(x) = 0.$$
2. fg admet un développement limité (DL) d'ordre n en α,
$$f(x)g(x) = R(x) + (x-\alpha)^n \varepsilon_4(x), \qquad \text{avec } \lim_{x\to\alpha} \varepsilon_4(x) = 0,$$
avec $R(x)$ le polynôme obtenu en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n du polynôme $P(x)Q(x)$.
3. Si $g(\alpha) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ admet un développement limité (DL) d'ordre n en α.

Exemples.

- DL en 0 à l'ordre 3 de $\dfrac{e^x}{1+x}$.
- DL en 0 à l'ordre 3 de $\ln(1+x)\cos(x)$.

Calculs de limites

Les DL sont très efficaces pour calculer des limites ayant des formes indéterminées. Il suffit de remarquer que si $f(x) = a_0 + a_1(x-\alpha) + \cdots + a_n(x-\alpha)^n + (x-\alpha)^n\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to\alpha} \varepsilon(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = a_0$.

Exemples.

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2+2x}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

Proposition 3

Soit f une fonction admettant un DL en α :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-\alpha) + a_k(x-\alpha)^k + (x-\alpha)^k\varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x\to\alpha} \varepsilon(x) = 0$ et k le plus petit entier supérieur ou égal à 2 tel que le coefficient a_k soit non nul. Alors,

- l'équation de la tangente à la courbe de f en α est:

$$y = a_0 + a_1(x-\alpha),$$

- la position de la courbe par rapport à la tangente pour x proche de α est donnée par le signe de $f(x) - y$, cest-à-dire le signe de $a_k(x-\alpha)^k$.

Il y a trois cas possibles :

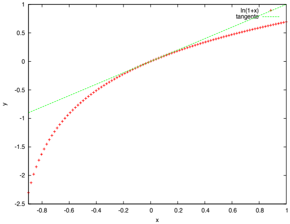
- $a_k(x-\alpha)^k > 0$ pour x proche de α, alors la courbe de f est au-dessus de sa tangente au point $x = \alpha$,
- $a_k(x-\alpha)^k < 0$ pour x proche de α, alors la courbe de f est en-dessous de sa tangente au point $x = \alpha$,
- $a_k(x-\alpha)^k$ change de signe pour x proche de α, alors la courbe de f traverse sa tangente au point $x = \alpha$. On dit que $x = \alpha$ est un point d'inflexion.

Exemples.

- $f(x) = \ln(1+x)$. Le développement limité de f à l'ordre 2 en 0 est

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x), \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

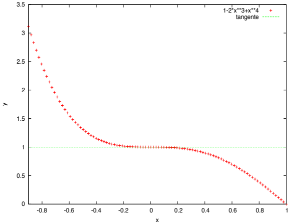
L'équation de la tangente est : $y = x$. Comme $-\frac{1}{2}x^2 < 0$, la courbe de f est en-dessous de sa tangente au point $x = 0$.



- $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$. Le développement limité de f à l'ordre 3 en 0 est

$$f(x) = 1 - 2x^3 + x^3\varepsilon(x), \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

L'équation de la tangente est : $y = 1$. Comme $-2x^3$ change de signe en 0, le point $x = 0$ est un point d'inflexion de f.



Proposition 4 (Développement limités en 0 de fonctions usuelles)

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0. \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0. \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0. \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0. \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n+1))}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x), \\
&\qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0,\ \alpha\in\mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

- On évite de calculer un développement limité par la formule de Taylor-Young. On privilégie un calcul utilisant les DL de fonctions usuelles en utilisant l'addition, la multiplication et la composition de DL.
- De la donnée dun développement limité de f au voisinage de 0, on ne peut pas déduire la moindre majoration ou minoration de $f(a)$ même si a est très proche de 0, une fonction ε qui tend vers 0 quand x tend vers 0 peut prendre en a une très grande valeur ...
- Pour obtenir des majorations ou des minorations il faut utiliser, par exemple, la formule des accroissements finis, ou sa généralisation, la formule de Taylor-Lagrange.