Exercice 1. Soit l'équation différentielle $y'(x) = -y^2(x)$.

1. Sans faire de calculs, que pouvez-vous dire de la solution de cette équation ?
2. Montrer que chaque élément de la famille de fonctions $y(x) = \dfrac{1}{x+C}$ est solution de l'équation ci-dessus.
3. Pouvez-vous trouver une solution à cette équation qui n'est pas un élément de la famille de fonctions considérées en 2. ?
4. Donner une solution du problème de Cauchy $y'(x) = -y^2(x),\ y(0) = 0.5$.

Exercice 2.L'évolution d'une population est modélisée par *l'équation différentielle logistique*[1]

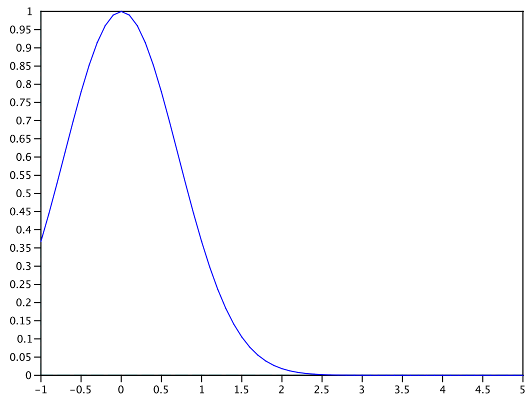
$$P'(t) = 1.2P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{4200}\right).$$

1. Pour quelles valeurs de $P(t)$ la population croît-elle ?
2. Pour quelles valeurs de $P(t)$ la population décroît-elle ?
3. Quelles sont les solutions d'équilibre ?

Exercice 3. De quelle équation différentielle parmi

$$\text{a)}\ \ y'(x) = 1 + xy(x), \qquad \text{b)}\ \ y'(x) = -2xy(x), \qquad \text{c)}\ \ y'(x) = 1 - 2xy(x),$$

le graphe ci-dessous est-il la représentation d'une solution ?



Exercice 4. Résoudre les équations différentielles ci-dessous.

1. $y' = xy^2$
2. $y' = xe^{-y}$
3. $y' = 2 + 2y + x + xy$
4. $y' + e^{x+y} = 0$

Exercice 5. Résoudre les problèmes de Cauchy ci-dessous.

1. $y' = \dfrac{x}{y},\ y(0) = -3$
2. $y' = \dfrac{\ln x}{xy},\ y(1) = 2$
3. $y' = \sqrt{y\,x},\ y(1) = 2$
4. $y' = \dfrac{y\,\sin x}{y+1},\ y(0) = 1$

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles ci-dessous à l'aide d'un changement de variable.

1. $y' = x + y$, on posera $u = x + y$.
2. $xy' = y + xe^{y/x}$, on posera $u = \frac{y}{x}$.

1. appelé aussi modèle de Verhulst proposé par Pierre François Verhulst vers 1840 en réponse au modèle de Malthus qui proposait un taux d'accroissement constant sans frein.

Exercice 7. Un état dispose de 10 milliards d'euros en billets en circulation et chaque jour 50 millions sont déposés dans les banques. Le gouvernement décide d'introduire une nouvelle monnaie en remplaçant les anciens billets déposés dans les banques par des nouveaux.

On note $x(t)$ le montant de la nouvelle monnaie en circulation au temps t.

1. Écrire un modèle d'équations différentielles décrivant le flux de la nouvelle monnaie en circulation.
2. Résoudre ce problème.
3. Combien de temps faudra-t-il pour que la nouvelle monnaie représente 90% de la monnaie en circulation ?