

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles ci-dessous.

a) $y' - y = 1$

c) $y' + y = \sin(e^x)$

e) $xy' - 4y = x^6 e^x$

b) $y' - y = e^x$

d) $(1+x)y' + y = 1+x, x > 0$

f) $4x^3y + x^4y' = \sin^3 x$

Exercice 2. Résoudre les problèmes de Cauchy ci-dessous.

a) $x^2y' + 2xy = \ln x, x > 0, y(1) = 2$

c) $2xy' + y = 6x, x > 0, y(4) = 20$

b) $y + xy' = x^2 + 3x, x > 0, y(2) = 4$

d) $x^3y' + 3x^2y = \cos x, x > 0, y(\pi) = 0$

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle du second ordre $xy'' + 2y' = 12x^2$ en effectuant le changement de variable $u = y'$.

Exercice 4. Une équation de *Bernoulli* est de la forme

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^m(x),$$

où m est un réel non nul, et a et b sont des fonctions continues. En supposant que y ne s'annule pas, on pose

$$z(x) = y^{-m+1}(x).$$

1. Montrer que z vérifie l'équation différentielle linéaire de degré 1 suivante :

$$z'(x) = -(m-1)(a(x)z(x) + b(x)).$$

2. Résoudre les équations différentielles ci-dessous.

a) $xy' + y = -xy^2$

b) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$

Exercice 5. On lâche un objet de masse m sans vitesse initiale. On suppose que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse de l'objet. Si $s(t)$ est la distance parcourue par l'objet après t secondes, alors la vitesse est $v = s'(t)$ et l'accélération est $a = v'(t)$. Si g est l'accélération due à la gravité, alors la force extérieure qui s'exerce sur l'objet est $mg - cv$, où c est une constante positive. La seconde loi de Newton s'énonce alors comme suit :

$$m v'(t) = mg - cv(t).$$

1. Résoudre cette équation linéaire et montrer que

$$v(t) = \frac{mg}{c} \left(1 - e^{-ct/m}\right).$$

2. Quelle est la vitesse limite ?

3. Calculer la distance parcourue par l'objet après t secondes.