Équations différentielles

L. El Alaoui
email : elalaoui@math.univ-paris13.fr

bureau : T104

Département informatique – IUT Villetaneuse, Paris 13

Semestre 4 – Janvier 2016 – Mars 2016

Introduction

Modèles de croissance de population

Hypothèse : la population croît à un taux proportionnel à la taille de la population.
Les variables du modèle sont :

- t : temps (variable indépendante)
- P : nombre d'individus dans la population (la variable dépendante)

Le taux de croissance de la population est la dérivée $P'(t)$. Ainsi, l'hypothèse conduit au modèle de Malthus[1]

$$P'(t) = k\,P, \tag{1}$$

où k est une constante de proportionalité.
Cette équation fait intervenir l'inconnue P et sa dérivée d'ordre 1, $P'(t)$.
Remarque. Lorsque $P(t) > 0$ pour tout t, si $k > 0$ alors $P'(t) > 0$. Ceci signifie que la population est toujours croissante.
Résoudre (1) consiste à trouver une fonction dont la dérivée est ègale à une constante fois la fonction elle-même ! Ainsi en prenant $P(t) = C\,e^{kt}$, on a $P'(t) = k\,P(t)$.

[1] Thomas Malthus 1766-1834, est un économiste britannique surtout connu pour ses travaux sur les rapports entre les dynamiques de croissance de la population et la production.

Modélisation du mouvement d'un ressort

On considère un ressort dont une extrémité est fixée et à l'autre extrémité est accroché un objet de masse m. On s'intéresse La loi de Hooke dit que si le ressort est compressé ou étiré de x unité de sa position à l'equilibre, alors il exerce une force proportionnelle à x, i.e.

$$\text{force de ré-équilibrage } = -kx,$$

où k est une constante positive, appelée *constante de raideur*. Si l'on néglige les forces resistantes (frottement de l'air, frottement) alors par la seconde loi de Newton (la force est égale à la masse fois l'accélération) on a

$$m\,x''(t) = -\frac{k}{m}x.$$

Définition 1

Une équation différentielle est une équation contenant une fonction inconnue et une ou plusieurs de ses dérivées.

$$a_m(x)y^{(m)}(x) + a_{m-1}(x)y^{(m-1)}(x) + \cdots + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x) = 0, \quad (2)$$

avec $a_m, a_{m-1}, \cdots, a_1, a_0$ sont des fonctions réelles pouvant dépendre de x.

1. L'entier m est l'ordre de l'équation différentielle (ordre de la dérivée la plus élevée de y).
2. On dit qu'une fonction $u(x)$ est solution de l'équation différentielle (2) si son domaine de définition est un certain intervalle I de $\mathbb{R}$, si elle est suffisamment dérivable sur I , et si elle vérifie, pour tout x de I,

$$a_m(x)u^{(m)}(x) + a_{m-1}(x)u^{(m-1)}(x) + \cdots + a_2(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x) = 0.$$

Remarque : une équation différentielle possède en général une infinité de solutions.

Chapitre 1 : Équations différentielles d'ordre un

Définition 1

Une équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \tag{E}$$

où a et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

En général on adjoint à une équation de la forme (E) une **condition initiale**, c'est-à-dire que l'on fixe la valeur de y en un point $x = x_0$.

Définition 2

On appelle problème de Cauchy le problème

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{3}$$

avec y_0 donné dans $\mathbb{R}$.

En posant $f(x,y) = b(x) - a(x)y(x)$, l'équation (E) se récrit $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$.

Remarque : On peut montrer que si la fonction f admet des dérivées partielles (par rapport à x et y) qui sont continues, alors il existe une et une seule solution au problème de Cauchy.

INTERPRÉTATION PHYSIQUE : Connaissant l'état du système initialement, i.e. en x_0, la solution du problème de Cauchy (3) permet de prédire le comportement futur du sytème.

Définition 3 (Le champ des tangentes)

A tout point $M = (t_0, y_0)$ on associe la droite d_M passant par M et de coefficient directeur $f(x_0, y_0)$. L'application $M \to d_M$ est appelé **champ des tangentes** associé à l'équation (E).

Définition 4 (Courbe intégrale)

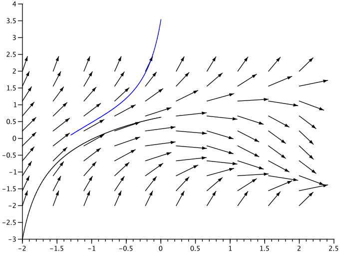
Une **courbe intégrale** de (E) est une courbe différentiable C qui a pour tangente en chaque point M de C la droite d_M du champ des tangentes.

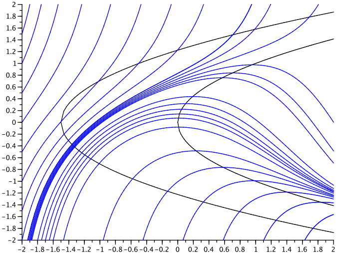
Résoudre le problème de Cauchy revient à trouver une "courbe intégrale" de (E) passant par un point donné (x_0, y_0).

Définition 5 (Lignes isoclines)

On appelle **lignes isoclines** les courbes $\Gamma_p = \{(x, y), \ f(x, y) = p\}$ correspondant à l'ensemble des points M où la droite d_M a une pente donnée égale à p.

Champ des tangentes (à gauche) et lignes isoclines (à droite) correspondant à l'équation $y' = y^2 - x$.





Définition 6

0n appelle équilibre ou état stationnaire de l'équation différentielle (E) une valeur constante y^* telle que si $y(0) = y^*$ alors $y(x) = y^*$ pour tout x (la quantité reste à l'équilibre).

- On dit qu'un équilibre y^* pour lequelle on a $f'(y^*) < 0$ est un équilibre stable.
- on dit qu'un équilibre y^* pour lequelle on a $f'(y^*) > 0$ est un équilibre instable.

Un équilibre est donc une solution constante de l'équation différentielle. Une telle solution a nécessairement une dérivée nulle, c'est-à-dire que l'on a $f(y^*) = 0$.

Rappels sur les primitives

Définition 7

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f si

$$\forall x \in [a, b], \quad F'(x) = f(x).$$

Remarque : la fonction $\widetilde{F}(x) = F(x) + C$, avec C une constante, est aussi une primitive de f.

Proposition 1

Pour toute primitive F de f on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Quelques primitives usuelles

Soit C une constante, soient u et v deux fonctions et soient g et h deux fonctions de primitives respectives G et H.

f(x)	Primitive de f
x^m	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C,\ m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C,$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
e^{ax}	$\dfrac{1}{a}e^{ax} + C,\ a \in \mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

f	Primitive de f
$\alpha g + \beta h$	$\alpha G + \beta H + C$
$u' u^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{1}{n+1} u^{n+1} + C$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + C$
$\dfrac{u'}{u^n},\ n \geq 2$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$
$\dfrac{u'}{e^u}$	$-e^{-u} + C$
$\alpha g(\alpha x + \beta)$	$\alpha G(\alpha x + \beta) + C,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Proposition 2

Les solutions générales de (E) sont toutes de la forme $y = y_p + z$ où y_p est une solution particulière de (E) et où z est une solution du problème "sans second membre" associé :

$$z'(x) + a(x)z(x) \; = \; 0.$$

1.1 Equations à variables séparées.

Ce sont les équations qui peuvent se mettre sous la forme

$$y'(x)g(y(x)) = h(x). \tag{4}$$

Soit alors G une primitive de g et H une primitive de h. L'équation (4) s'écrit donc

$$\frac{d}{\mathrm{d}x} G(y(x)) = \frac{d}{\mathrm{d}x} H(x).$$

La fonction $t \mapsto G(y(x)) - H(x)$ est donc constante et il existe λ telle que

$$G(y(x)) = H(x) + \lambda.$$

$$\begin{aligned} y'(x) + a(x)y(x) &= b(x), \qquad (\mathcal{P}) \\ z'(x) + a(x)z(x) &= 0. \qquad (\mathcal{P}_S) \end{aligned}$$

1) Résolution du problème "sans second membre" $(\mathcal{P}_S)$:

Soit z une solution de $(\mathcal{P}_S)$ et soit A une primitive de a.

- On pose $u(x) = \exp(A(x))z(x)$, on a alors

$$u'(x) = \Big(z'(x) + a(x)z(x)\Big)\exp(A(x)) = 0.$$

  On en déduit que u est constante sur tout intervalle où elle est définie.
- Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$z(x) = \lambda \exp(-A(x)).$$

2) Recherche d'une solution particulière de $(\mathcal{P})$ par variation de la constante

- on cherche y_p sous la forme

$$y(x) = \lambda(x) \exp(-A(x)).$$

  En remplaçant dans $(\mathcal{P})$, on obtient $\lambda'(x) = b(x)\exp(A(x))$.
- On note $G(x)$ une primitive de $b(x)\exp(A(x))$.
  Une solution particulière de $(\mathcal{P})$ est alors donnée par $y_p(x) = \exp(-A(x))G(x)$.

La solution générale de $(\mathcal{P})$ est : $y(x) = e^{-A(x)}(\lambda + G(x))$.

Equations de Bernoulli

Ce sont les équations de la forme

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y^m(t),$$

où m est un réél non nul, et a et b sont des fonctions continues.

1) si $m > 0$: si y s'annule en un point de I alors $y(t) = 0$ est l'unique solution ;

2) si $m < 0$ alors l'équation n'est définie que si $y(t) \neq 0$.

On peut donc supposer que y ne s'annule pas. On pose alors

$$z(t) = y^{-m+1}(t).$$

Cette fonction vérifie l'équation différentielle **linéaire de degré 1**

$$z'(t) = -(m-1)(a(t)z + b(t)).$$

Chapitre 2 : Équations différentielles d'ordre deux

On s'intéresse aux équations du type suivant.

$$y'' = ay' + by \tag{5}$$

où a et b sont deux réels donnés.
Avant d'énoncer le résultat qui donne la solution générale de (5), commençons par chercher une solution sous la forme $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$.
En reportant dans (5), on peut simplifier par e^{rt} qui est toujours non nul. On obtient l'équation suivante en r:

$$r^2 = ar + b. \tag{$\mathcal{E}_{CA}$}$$

Définition 1

L'équation $(\mathcal{E}_{CA})$ porte le nom d'équation caractéristique associée à (5).

La solution générale de (5) s'exprime à l'aide des racines de $(\mathcal{E}_{CA})$.

Théorème 1

Soit E l'ensemble des solutions de (5), définies sur $\mathbb{R}$. L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Si l'équation caractéristique associée possède

- deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors :

$$E = \left\{ t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 t},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

- une racine double r, alors :

$$E = \left\{ t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{rt} + C_2 t \mathrm{e}^{rt},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

- deux racines complexes conjuguées $\alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\alpha - \mathrm{i}\beta$, alors :

$$E = \left\{ t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mathrm{e}^{\alpha t} \sin(\beta t),\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exemples illustrant les trois cas.

équation	$(\mathcal{E}_{CA})$	racines	solution générale
$y" = y' + 6y$	$r^2 = r + 6$	$-2, 3$	$C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}$
$y" = -4y' - 4y$	$r^2 = -4r - 4$	$-2, -2$	$C_1 e^{-2t} + C_2 te^{-2t}$
$y" = -4y' - 13y$	$r^2 = -4r - 13$	$-2 \pm 3i$	$C_1 e^{-2t} \cos(3t) + C_2 e^{-2t} \sin(3t)$

Équations différentielles d'ordre 2 avec second membre non nul

Dans cette section, nous ajoutons une fonction $h(t)$ à l'équation du second ordre à coefficients constants de la section précédente.

$$y'' = ay' + by + h, \tag{6}$$

où a et b sont deux réels, et h est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: le second membre. Comme pour les équations linéaires du premier ordre, la solution générale de (6) s'obtient en ajoutant une solution particulière à l'équation sans second membre (5).

Théorème 2

Soit y_p une solution particulière de $y'' = ay' + by + h$. Soit (y_1, y_2) une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation sans second membre $y'' = ay' + by$. Alors, l'ensemble des solutions de $y'' = ay' + by + h$ est :

$$E = \left\{ C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p,\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Théorème 3 (Principe de superposition)

Soient a et b deux réels, h_1 et h_2 deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient y_1 et y_2 deux fonctions, solutions respectivement des équations différentielles :

$$y'' = ay' + by + h_1, \qquad\qquad y'' = ay' + by + h_2.$$

Pour tout couple de réels (λ, μ), la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de l'équation :

$$y'' = ay' + by + (\lambda h_1 + \mu h_2).$$

En utilisant ce principe, il est possible de calculer des solutions particulières, quand h est une combinaison d'exponentielles et de polynômes, grâce au théorème qui suit.

Seconds membres en exponentielles et polynômes

Soient a, b deux réels, et λ un complexe. Soit P une fonction polynôme. On considère l'équation différentielle suivante.

$$y''(t) = ay'(t) + by(t) + \mathrm{e}^{\lambda t}P(t), \tag{7}$$

dont l'équation caractéristique associée à l'équation sans second membre est $(\mathcal{E}_{CA})$.

Théorème 4

L'équation (7) admet une solution particulière de la forme

$$y_p(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}Q(t),$$

où Q est une fonction polynômiale telle que :

$$\deg(Q) = \begin{cases} \deg(P) & \text{si } \lambda \text{ n'est pas solution de l'équation caractéristique } (\mathcal{E}_{CA}), \\ \deg(P)+1 & \text{si } \lambda \text{ est solution simple de l'équation caractéristique } (\mathcal{E}_{CA}), \\ \deg(P)+2 & \text{si } \lambda \text{ est solution double de l'équation caractéristique } (\mathcal{E}_{CA}). \end{cases}$$

Chapitre 3 : Équations différentielles en économie

En finance, une option est un produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur. L'acheteur de l'option obtient le droit, et non pas l'obligation, d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (strike), pendant un temps donné ou une date fixée. Ce contrat peut se faire dans une optique de spéculation ou d'assurance[2].

On souhaite ici modéliser la dynamique des prix entre l'offre et la demande d'options ainsi que la formation d'un équilibre de prix sur le marché des options.

3.1 Équilibre d'un marché en concurrence pure

Soit P le prix d'une option, ce prix peut bien entendu varier au cours du temps : $P = P(t)$. On note respectivement

- Q_d la demande associée à cette option, et
- Q_o l'offre associée à cette option.

Une façon simple de modéliser l'évolution de l'offre et de la demande en fonction du temps consiste à poser :

$$Q_d(t) = a - bP(t)$$
$$Q_o(t) = -c + dP(t),$$

où a, b, c et d sont des constantes positives. Les paramètres, b et d mesurent respectivement la sensibilité au prix de la demande et de l'offre.
Ces deux paramètres sont positifs, car, sur la plupart des marchés, la demande est décroissante et l'offre est croissante.

[2] Wikipédia

Tous les marchés atteignent-ils un équilibre ?

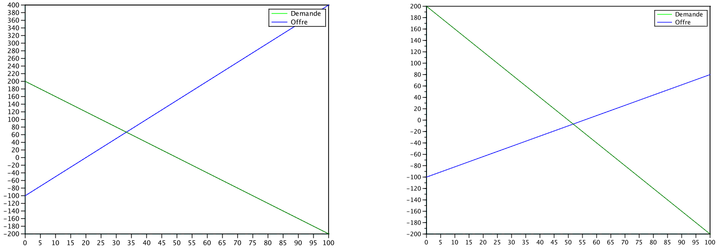


Figure: Évolution de l'offre et de la demande en fonction du prix lorsque celui-ci varie entre les valeurs 20 et 50, avec $a = 200$, $b = 4$, $c = 100$, $d = 5$ (à gauche) et $a = 200$, $b = 4$, $c = 100$, $d = 1.8$ (à droite).

Quel est le prix d'équilibre, noté $\bar{P}$?

Partant d'un prix d'option initial P_0 à l'instant $t = t_0$, comment ce prix va-t-il évoluer au cours du temps ?

Afin de modéliser l'évolution du prix, nous supposons qu'il est soumis à la force (relative) qui relie la demande et l'offre dans le marché. Pour simplifier, supposons que le taux de changement du prix en fonction du temps est à tout moment proportionnel à l'excédent de demande $(Q_d - Q_o)$ qui prévaut à ce moment-là, autrement dit

$$P'(t) = j\big(Q_d(t) - Q_o(t)\big),$$

avec j une constante strictement positive.

Remarque : Le prix augmente lorsque la demande est supérieure à l'offre et diminue en cas d'offre excédentaire.

Montrer que cette modélisation conduit à la résolution d'une équation différentielle. Puis résoudre cette équation.

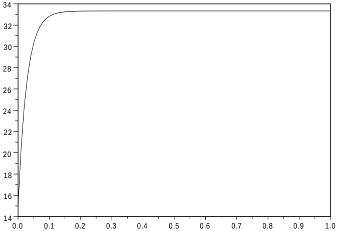


Figure: solution de l'équation différentielle : évolution du prix en fonction du temps lorsque $P_0 = 15$ et $a = 200, b = 4, c = 100, d = 5$

- Le marché sera stable si $-j(b+d) < 0$. Cela signifie que
  - le prix croîtra de façon asymptotique vers le prix d'équilibre $\bar{P}$ s'il est initialement inférieur au prix d'équilibre ($P_0 < \bar{P}$),
  - le prix décroîtra de façon asymptotique vers $\bar{P}$ s'il lui est initialement supérieur ($P_0 > \bar{P}$).
  - Si le prix correspond d'emblée au prix d'équilibre ($P_0 = \bar{P}$), il sera constant et retournera vers l'équilibre suite à une éventuelle perturbation.
- Le marché sera en revanche instable si $-j(b+d) > 0$. Cela signifie que le prix tendra vers moins l'infini s'il est initialement inférieur à l'équilibre et vers plus l'infini s'il est initialement supérieur à l'équilibre. S'il est par hasard égal à l'équilibre, il se placera sur une des deux trajectoires divergentes en cas de perturbation.

Remarque : Certaines demandes peuvent être croissantes (biens Giffen et Veblen), de même que certaines offres peuvent être décroissantes (économies d'échelle externes) ; b et d peuvent donc être négatifs ces marchés peuvent alors être instables.

Second modèle

Le modèle précédent d'offre et de demande d'options n'utilisait que l'information sur les prix. Afin de l'enrichir, nous allons maintenant prendre en compte le fait que les acheteurs et vendeurs se basent non seulement sur le prix actuel mais également sur la tendance qui prévaut à cette période.
À partir de cette tendance, ces intervenants financiers formeront leurs anticipations du niveau futur du prix ce qui aura une influence sur leurs décisions d'offre et de demande.
Du point de vue de la modélisation, l'information sur la tendance du prix d'équilibre d'une option sur le marché financier peut être obtenue en utilisant les dérivées première et seconde. La dérivée première nous informe sur la pente du prix (hausse ou baisse) et la dérivée seconde sur la variation dans la pente (accélération de hausse ou de baisse du prix).
Afin de tenir compte de ces effets nous modélisons l'évolution de l'offre de et la demande en fonction du temps par :

$$nP''(t) + mP'(t) - bP(t) + a = Q_d(t) \tag{8}$$

$$\omega P''(t) + uP'(t) + dP(t) - c = Q_o(t) \tag{9}$$

où a, b, c et d sont des constantes positives (dans toute la suite, nous continuerons d'utiliser les valeurs $a = 200, b = 4, c = 100, d = 5$). Les paramètres m, n, u et w, qui n'ont par ailleurs pas été contraints, emmagasinent l'information sur les anticipations des acheteurs et vendeurs.
Prenons $m > 0$. Alors une hausse de prix impliquera une hausse de la quantité demandée. Ceci nous indique que les acheteurs anticipent que la hausse de prix va se poursuivre et préfèrent augmenter leurs achats maintenant, quand les prix sont encore relativement bas.

Par contre, si $m < 0$, cela signifie que les acheteurs anticipent un renversement rapide dans la tendance du prix et qu'ils préfèrent alors diminuer leurs achats courants et attendre une baisse de prix qui s'effectuera plus tard.
Le paramètre n concerne le taux de changement de la pente du prix dans le temps. Il indique s'il y a accélération ou ralentissement dans l'accroissement des prix.
Comme on peut le constater, les paramètres m et n ajoutent un élément de spéculation aux prix dans notre nouveau modèle, ce qui s'avère tout à fait réaliste au regard des marchés financiers.
Concernant la modélisation du changement de prix, nous conservons la même que pour le premier modèle.
Montrer qu'en utilisant les nouvelles expressions (8) et (9) pour l'offre et la demande, on arrive à une équation différentielle ordinaire du second ordre de la forme.

$$P''(t) + \alpha P'(t) + \beta P(t) + \gamma = 0.$$

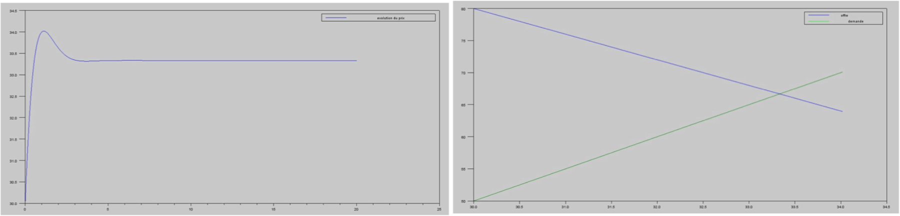


Figure: Évolution du prix (à gauche) en fonction du temps et évolution de l'offre et de la demande en fonction du prix (à droite).

Résolution de l'équation différentielle en posant $Q(t) = P'(t)$.

$$\begin{pmatrix} P'(t) \\ Q'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Alors, si la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$ est diagonalisable la solution générale du système sans second membre (i.e $\gamma = 0$) est

$$\begin{pmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{pmatrix} = e^{At} V, \quad V \in \mathbb{R}^2.$$

Chapitre 4 : Un modèle de croissance économique

L'objet de la macroéconomie est l'étude des variations temporelles et géographiques de l'activité économique. Elle essaie de répondre, entre autres, aux questions suivantes :

- Pourquoi les revenus sont-ils plus élevés aujourd'hui qu'en 1950 ?
- Quelles sont les causes des récessions, des dépressions, des disparités entre les pays ?

Nous allons présenter un modèle simplifié de croissance économique, dû à R. Solow et T. W. Swan (1956).

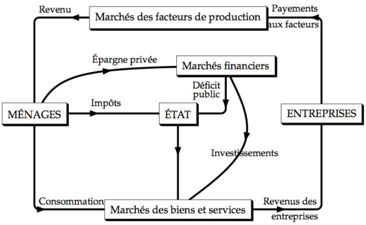


Figure: Circuit monétaire au travers de l'économie.

On suppose que la production Y des entreprises est subordonnée à la quantité de capital K dont elles disposent, de la force de travail L ainsi que des connaissances A, qui mesurent l'efficacité du travail. La fonction qui, aux facteurs de production K, L, A, associe la production Y est appelée fonction de production. On fait plusieurs hypothèses sur la fonction de production :

- La production ne dépend que du capital K et du travail effectif AL.
- La production a des rendements d'échelle constants, c'est-à-dire que si l'on multiplie les quantités de capital et de travail effectif par une constante positive, la production est multipliée par le même facteur.

1. Écrire ces deux hypothèses en termes mathématiques. On note F la fonction de production et $f(x) = F(x, 1)$ la fonction intensive de production.
   On appelle produit marginal du capital la fonction f', c'est-à-dire la variation de production engendrée par l'ajout d'une unité de capital.
   On pose $k = \dfrac{K}{AL}$, le capital par unité de travail effectif. On fait également les hypothèses suivantes :
   - $\forall k > 0,\ f'(k) > 0$ et $f''(k) < 0$,
   - $f(0) = 0$, $\lim\limits_{k \to 0} f'(0) = +\infty$, et $\lim\limits_{k \to +\infty} f'(0) = 0$

2. Que signifient ces deux hypothèses ?
   Les hypothèses ci-dessus et les observations de l'activité économique conduisent à l'expression ci-dessous de la fontion F, appelée fonction de Cobb-Douglas (Douglas est un économiste américain et Cobb est un mathématicien américain - 1928) :

$$F(K, AL) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

   Les quantités Y, K, L, A évoluent au cours du temps. Les variations de K, L et A sont données par des lois empiriques issues de l'observation. On suppose que le travail et la connaissance suivent une progression exponentielle :

$$L(t) = L_0 e^{nt} \quad \text{et} \quad A(t) = A_0 e^{gt},\ A_0, L_0, n, g \in \mathbb{R}^+.$$

   La variation du capital est constituée de l'investissement (qui l'accroît) et de la dépréciation (qui le diminue). On suppose la dépréciation proportionnelle au stock de capital. Quant à l'investissement, on suppose qu'il est proportionnel à la production. Mathématiquement, cela s'exprime comme suit :

$$K'(t) = sY(t) - \delta K(t), \quad 0 < s < 1, 0 < \delta < 1.$$

   Dans ce qui suit on fait l'hypothèse que $n + g + \delta > 0$.
3. Montrer que k est solution de l'équation différentielle

$$k'(t) = s\big(k(t)\big)^{\alpha} - (n + g + \delta)k(t).$$

   La quantité $(n + g + \delta)k$ est appellé investissement de point mort.

4. Quelle est la solution d'équilibre ? Que signifie-elle ? On note k^* cette solution.
5. k^* est-elle croissante en fonction de s ? Que cela signifie-t-il ?
6. Résoudre cette équation différentielle.
7. Le temps étant mesuré en années, on a estimé les valeurs des paramètres : $n = 0.02$, $g = 0.02$, $s = 0.34, \delta = 0.1$, et $\alpha \approx 0.3$. Quel est le temps nécessaire pour que, partant de k_0 à l'instant $t = 0$, $k(t)$ réduise sa distance à k^* de 90%. Autrement dit, trouver T tel que :

$$|k(T) - k^*| \leq 0.1|k_0 - k^*|.$$