NOM :
Prénom :
Groupe :
Sup Galilée - Université Paris 13 Lundi 7 décembre 2015

Contrôle continu de Mathématiques pour Ingénieur
Durée **1 h 30**. Sujet de **2 exercices** et 5 pages.
Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. Soit la fonction f dont le graphe est donné à la figure 1. On cherche à résoudre de façon approchée l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de la dichotomie.

1. Peut-on utiliser l'intervalle $[-1, 0]$ pour résoudre de façon approchée l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de la dichotomie ? Justifier votre réponse.

   Oui car $f(-1)f(0) < 0$, donc le gaphe de f intersecte au moins une fois l'axe des abcisses.

2. Retenant cet intervalle initial, laquelle des racines est approchée par cette méthode ? Justifier votre réponse.

   D'après le graphe de f, on a $f(0)f(-1/2) > 0$ et $f(-1)f(-1/2) < 0$. Donc la méthode de dichotomie va approcher la racine appartenant à l'intervalle $[-1; -1/2]$.

3. Utiliser le graphe donné à la figure 1 pour représenter les 4 premières itérées de la méthode.

   voir cours

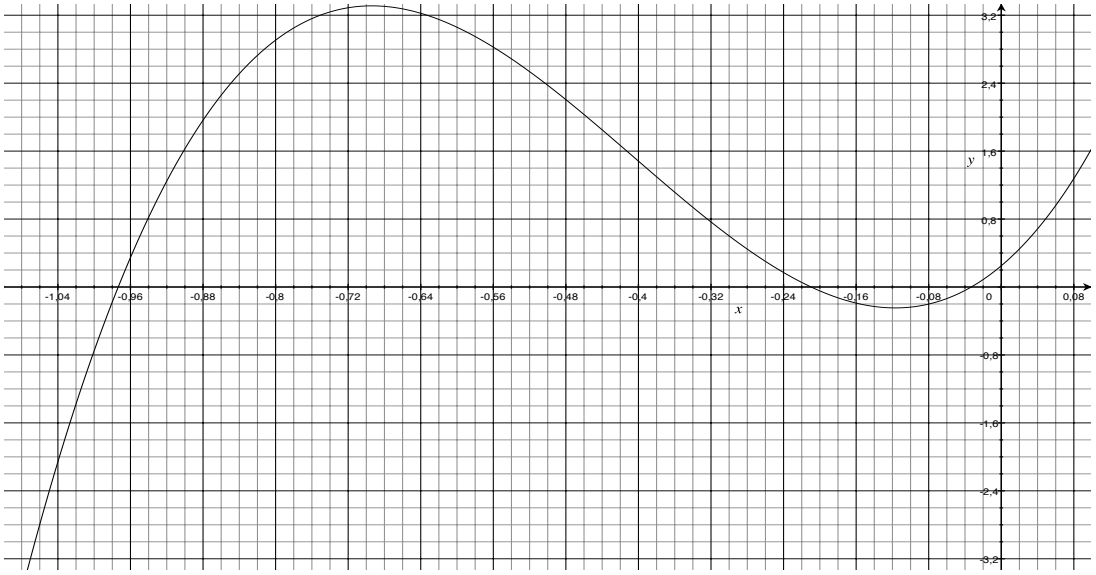

FIGURE 1 – Graphe de f.

4. Combien d'itérations de la méthode de la bissection seront nécessaires pour obtenir cette racine avec une erreur inférieure à 10^{-6} ? (On utilisera que $\ln(10)/\ln(2) \approx 3.3$.)

   On sait que pour $n \geq 0$, $|x^\star - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$, avec $x^\star$ tel que $f(x^\star) = 0, a = -1, b = 0$ et x_n la solution obtenue par la méthode de dichotomie à la n-ème itération. Donc pour que l'erreur soit inférieure à 10^{-6} il faut que $\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-6}$, c-à-d $6\ln(10)/\ln(2) \leq n + 1$, et donc $n \geq 19$.

Exercice 2. Soit $f(x) = 1 - x + \frac{1}{2}\cos(x)$. Dans cet exercice on cherche à résoudre

$$f(x) = 0, \qquad \text{sur } [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]. \tag{$\mathcal{P}$}$$

1. Montrer que le problème $(\mathcal{P})$ a une unique solution. On note p cette solution.

   $f(-\pi/2)f(\pi/2) = (1 + \pi/2)(1 - \pi/2) < 0$, donc $(\mathcal{P})$ a au moins une solution sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De plus, $f'(x) = -1 - \frac{1}{2}\sin(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $(\mathcal{P})$ a une unique solution.

2. Montrer que résoudre le problème $(\mathcal{P})$ est équivalent à résoudre le problème de point fixe $\Phi(x) = x$ avec $\Phi(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos(x)$.

   $1 - x + \frac{1}{2}\cos(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}\cos(x) = x.$

3. En utilisant le graphe donné à la figure 2, tracer les 3 premières itérées de la méthode de point fixe en choisissant comme donnée initiale 0.
   voir cours

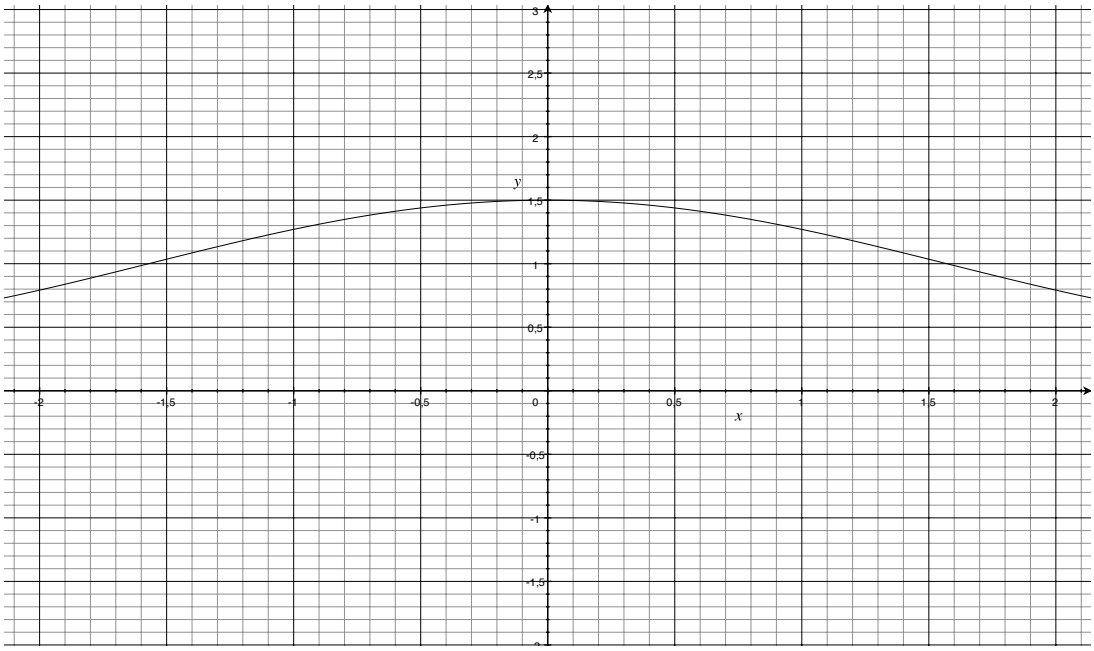

FIGURE 2 – Graphe de $\phi(x)$.

4. Écrire l'expression de la suite, notée (x_n), obtenue par la méthode de point fixe.

   Pour x_0 donné, $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, $n \geq 0$, soit $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2}\cos(x_n)$.

5. Montrer que l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est stable par Φ. Montrer que pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $|\Phi'(x)| \leq \frac{1}{2}$. La méthode de point fixe converge-t-elle ?

   Soit $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors $\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{1}{2}\cos(x) \leq \frac{3}{2}$, donc $\Phi(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
   $\Phi'(x) = -\dfrac{1}{2}\sin(x)$ donc $|\Phi'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
   Par le théorème de point fixe, la méthode converge.

6. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe ξ_k entre p et x_k tel que $|x_k - p| = |\Phi'(\xi_k)||x_{k-1} - p|$. En déduire l'ordre de convergence de cette méthode.

   Par le théorème des accroissements finis, il existe ξ_k entre p et x_k tel que $|x_k - p| = |\Phi'(\xi_k)||x_{k-1} - p|$. Ainsi, $\dfrac{|x_k - p|}{|x_{k-1} - p|} \leq |\Phi'(\xi_k)| \leq \dfrac{1}{2} < 1$. Donc la méthode converge à l'ordre 1.

7. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - p| \leq \frac{1}{2^k}|x_0 - p|$. En déduire le nombre d'itérations nécessaires pour approcher p à 10^{-3} près. (On utilisera que $\ln(10) \approx 2.3, \ln \pi \approx 1.1$ et que $\ln(2) \approx 0.7$).

   D'après la question précédente on a $|x_k - p| \leq \dfrac{1}{2}|x_{k-1} - p|$, ainsi $\dfrac{1}{2}|x_{k-1} - p| \leq \dfrac{1}{2^2}|x_{k-2} - p|$, et $\dfrac{1}{2^2}|x_{k-2} - p| \leq \dfrac{1}{2^3}|x_{k-3} - p|$ et en procédant de proche en proche on obtient l'inégalité demandée.

8. On considère maintenant la méthode de Newton pour résoudre $(\mathcal{P})$. Donner l'interprétation géométrique de la méthode de Newton.

   La méthode de Newton consiste à approcher la courbe de f par sa tangeante.

9. En utilisant le graphe donné à la figure 3, tracer les 3 premières itérées de la méthode de Newton en choisissant comme donnée initiale -1.

   voir cours.

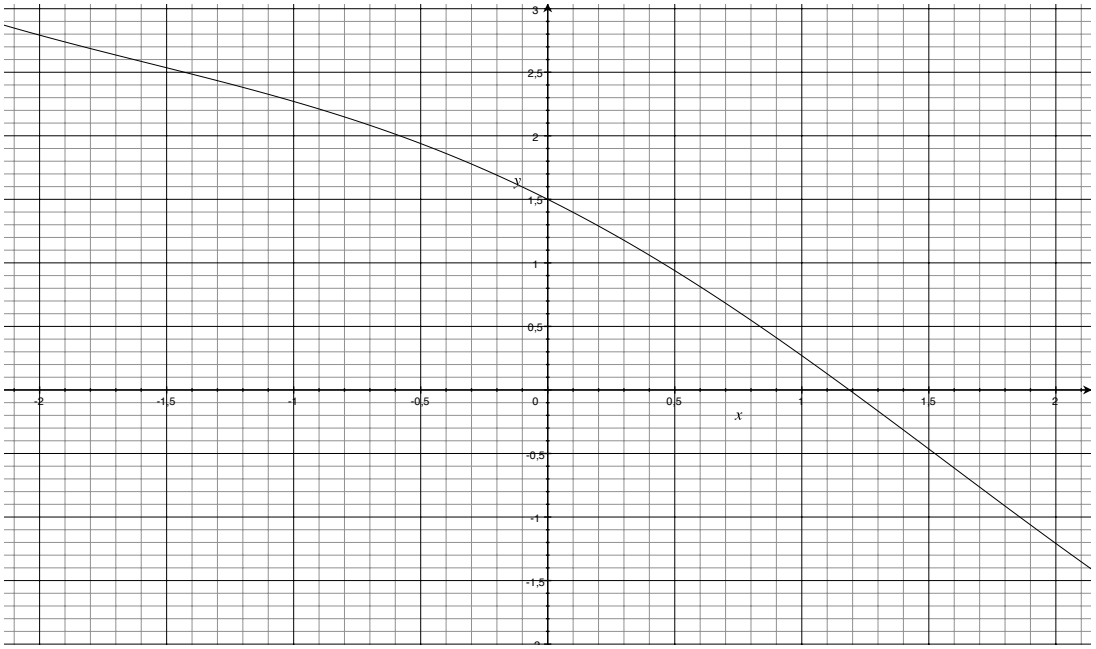

FIGURE 3 – Graphe de $f(x)$.

10. Écrire l'expression de la suite obtenue par la méthode de Newton. On note (z_n) cette suite.

    Pour z_0 donné $z_{n+1} = z_n - \dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}$, $n \geq 0$.

11. Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{|z_{k+1} - p|}{|z_k - p|^2} \leq \frac{1}{2}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|z_{k+1} - p| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k+1}-1} |z_0 - p|^{2^{k+1}}$.
    Quel est l'ordre de convergence de la méthode de Newton ?

    On procède par récurrence. On fait l'hypothèse que $|z_{k+1} - p| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k+1}-1} |z_0 - p|^{2^{k+1}}$.
    Pour $k = 0$, cette inégalité est vérifiée.
    En utilisant faite puis l'hypothèse de récurrence, on a $|z_{k+2} - p| \leq \dfrac{1}{2}|z_{k+1} - p|^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k+2}-1} |z_0 - p|^{2^{k+2}}$