Exercice 1. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

1. Une suite (u_n) converge vers 0 si et seulement si la suite $(|u_n|)$ converge vers 0.
2. Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue en $\ell \in I$ et (u_n) une suite dont les termes sont dans I et convergeant vers ℓ. Alors la suite $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$. En particulier, si (u_n) est une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, alors la limite vérifie $\ell = f(\ell)$.
3. Si une suite (u_n) converge vers ℓ alors la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0.
4. Si la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0 alors la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.
5. Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite convergente de limite nulle. Alors la suite (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = u_n v_n$ est convergente de limite nulle.
6. Soit (u_n) une suite réelle convergente.
   a. Si à partir d'un certain rang on a $u_n \geq 0$, alors nécessairement $\lim_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.
   b. Si à partir d'un certain rang on a $u_n > 0$, alors nécessairement $\lim_{n\to+\infty} u_n > 0$.
7. Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang. Alors, si (u_n) et (w_n) sont convergentes de même limite ℓ, la suite (v_n) est convergente de limite ℓ.

Exercice 2. Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle.

a) $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$ b) $v_n = \left(\dfrac{n-x}{n+x}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$ c) $w_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$ d) $z_n = \cos\left((n + \dfrac{1}{n})\pi\right)$

Exercice 3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$ et (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Si la suite (u_n) converge, quelle est sa limite ? On note ℓ cette limite.
2. Soit $v_n = u_n - \ell$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, et en déduire la nature de la suite (u_n).
3. Application : on considère un carré de côté 1. On le partage en 9 carrés égaux, et on colorie le carré central. Puis, pour chaque carré non-colorié, on réitère le procédé. On note u_n l'aire hachurée après l'étape n. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 4.

1. Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. A-t-on : $(u_n)^2 + u_n \sim u_n^2$, $e^{(u_n)^2+u_n} \sim e^{(u_n)^2}$?
2. Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. A-t-on : $\cos u_n \sim 1 + u_n$, $\cos u_n - 1 \sim u_n$?
   Montrer que $\ln(1 + u_n) \sim u_n$, $e^{u_n} - 1 \sim u_n$, $\frac{1}{1+u_n} \sim 1 - u_n$, $\sin(u_n) \sim u_n$, puis $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{(u_n)^2}{2}$.
3. Donner un équivalent simple et la limite éventuelle des suites (u_n) définies par :
$$u_n = \frac{n^4 - 2n^3 + 100}{3n^5 + 6}, \qquad u_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n + \sqrt{n}}, \qquad u_n = \ln(n^2 + n + 5) - \ln(n^2 - n + 3).$$

Exercice 5. Étudier la vitesse de convergence des suites $(u_n)_{n\geq 2}$ définies par :
$$u_n = \frac{1}{\ln(n)}, \qquad u_n = \frac{1}{n!}, \qquad u_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Exercice 6.

1. Soient p_n une suite convergent linéairement vers 0 et q_n une suite convergent quadratiquement vers 0 avec le même facteur asymptotique $\frac{1}{2}$. Pour simplifier, on suppose que $\dfrac{|p_{n+1}|}{|p_n|} \approx \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{|q_{n+1}|}{|q_n|^2} \approx \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

a) Montrer que $|p_n| \approx \left(\frac{1}{2}\right)^n |p_0|$ et que $|q_n| \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1} |q_0|^{2^n}$ pour tout $n \geq 1$.

b) Lorsque $p_0 = q_0 = 1$, calculer p_i et q_i pour $i = 1, \cdots 4$. Commenter vos résultats.

2. Donner un exemple de suite convergent à l'ordre 3 vers 0.

Exercice 7.

1. Soit $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

2. (Série arithmétique). Etudier la série (Σu_n) avec u_n une suite arithmétique de raison $r \neq 0$.
3. (Série géométrique). Etudier la série (Σu_n) avec u_n une suite géométrique.

Exercice 8. Etudier la série (Σu_n) lorsque

1. $u_n = \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$, $\quad u_n = \frac{1}{a^n + \frac{1}{a^n}}$, $a > 0$ $\quad u_n = \frac{n!}{n^n}$,
2. $u_n = \frac{n^\alpha}{2^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\quad u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, $n \geq 1$, $\quad u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$, $n > 1$.
3. $u_n = \frac{\cos n}{n}$, $\quad v_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.

Exercice 9.

1. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 10. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1}$?
2. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ une série entière convergeant pour $|x| < 2$. Que peut-on dire de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$?

Exercice 10. Donner le développement en série entière des fonctions ci-dessous et déterminer l'intervalle de convergence.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $\qquad$ b) $f(x) = \dfrac{5}{1-4x^2}$, $\qquad$ c) $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$, $\qquad$ d) $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$.

Exercice 11. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

1. Dans la théorie des DL_n, on peut toujours se ramener au voisinage de 0 (i.e. un $\mathrm{DL}_n(0)$).
2. L'ordre d'un développement limité est le degré du polynôme P_n.
3. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$, il est unique.
4. f admet un $\mathrm{DL}_0(x_0) \iff f$ continue en x_0.
5. f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0) \iff f$ dérivable en x_0.
6. f admet un $\mathrm{DL}_2(x_0) \iff f$ deux fois dérivable en x_0.

Exercice 12. Calculer les limites ci-dessous.

$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2} - \cos(x)}{x^2} \qquad \text{b)} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \qquad \text{c)} \lim_{x\to 0} \big(1+\sin(x)\big)^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 13. Pour chacune des fonctions f suivantes : $f : x \mapsto \cos(x)$, $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$,

1. Écrire le développement limité d'ordre 5 de f en 0. Ce développement sera utilisé pour toutes les questions suivantes.
2. Écrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0^+ pour $f(\sqrt{x})$.
3. Écrire un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ pour $f(\mathrm{e}^{-x})$.
4. Écrire un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ pour $f(1/x)$.

Exercice 14.

1. Soit a et b deux réels. Donner le développement limité 'a l'ordre 4 en 0 de $g(x) = \ln \dfrac{1+ax}{1+bx}$.
2. Soit f la fonction définie, lorsque cela a un sens, par
$$f(x) = (3x^2 + 6x - 10) \ln \frac{x+4}{x+2}.$$
Montrer qu'elle admet un développement asymptotique lorsque x tend vers l'infini, de la forme
$$f(x) = \alpha x + \beta + \gamma \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}),$$
où α, β et γ sont des réels non nuls.
3. En déduire la position de la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$ par rapport à ses asymptotes.

Exercices supplémentaires.

Exercice 15.

1. A., B. et P. ont developpé trois procédures de tri d'une suite $u_1, \dots, u_n$ de n termes. La procedure développée et programmée par A. trie ce suite en $100 \times n^2$ millisecondes. La procédure développée et programmée par B. trie la suite en $10^{-5} \times 2^n$ millisecondes. L'algorithme de P. a besoin de $10^5 \times n \log n$ millisecondes pour la même opération. Quand n est trés grand, quelle procédure est la plus efficace ? (Indication : commencer par déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, ou $u_n = \frac{n^2}{2^n}$; examiner $\frac{u_{n+1}}{u_n}$).
2. Étudier la nature des suites suivantes et déterminez leur limites eventuelles :
$$1) \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 10^{200} n + \sqrt{n} + 5}{6 + 2n^3}, \qquad 2) \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1},$$
$$3) \lim_{n\to\infty} n \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) \text{ (Indication : poser } t_n := a^{\frac{1}{n}} - 1 \text{ et considerer } t_n \to 0).$$
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Indication : representer $n = (n^{\frac{1}{n}} - 1 + 1)^n$ et montrer que $n > \frac{n(n-1)}{2}(n^{\frac{1}{n}} - 1)^2$.
4. montrez que $v_n = o(u_n),\ w_n = o(v_n) \implies w_n = o(u_n)$.

5. trouvez un équivalent simple et la limite éventuelle des suites (u_n) définies par :

$$1)\ u_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}; \qquad 2)\ u_n = \tan\frac{1}{n}, \qquad 3)\ u_n = n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

6. En supposant que (u_n) admette une limite ℓ, où $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{a}{u_n^2}\right)$, et $u_0 \neq 0$, trouvez la limite ℓ de u_n.

Exercice 16.

1. Calculer les développements limités suivants au voisinage de 0
   à l'ordre 3
   $$\sin(\ln(1+x)), \quad \ln(1+\sin x), \quad (1+2x-2x^2)^{\frac{1}{3}}, \quad \ln(1+x)+(1+x)^2, \quad e^{e^x}, \quad \frac{1-\cos x}{x\ln(1+x)},$$
   à l'ordre 4
   $$e^x - \sqrt{1+x}, \quad (1+x)\sin x, \quad e^x \sin x, \quad \frac{\cos x}{1-x}, \quad \ln(1+x)+(1+x)^2,$$
   à l'ordre 5
   $$\sin x + \cos x, \quad x^2 \sin x.$$
2. Calculer les limites suivantes.
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x\tan x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x - 1 \right) \ln x.$$
3. Soit f la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x^2+2x+2)$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au voisinage de 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.