NOM :
Prénom :
Groupe :
Sup Galilée - Université Paris 13 Lundi 8 décembre 2014

Contrôle continu de Mathématiques pour Ingénieur
Durée **1 heure 30**. Sujet en **3 parties** et 7 pages.
Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

MÉTHODES D'APPROXIMATION DE SOLUTIONS D'ÉQUATIONS NON LINÉAIRES

Fruits de la « troisième révolution industrielle », l'informatique et les ordinateurs occupent une place centrale dans l'organisation sociale comme dans la vie privée. Encore faut-il pouvoir les alimenter. Une vision simpliste de la loi de Moore *consiste à conjecturer que la puissance des ordinateurs double tous les dix ans : on modélise donc les besoins énergétiques de tous les ordinateurs du monde de manière exponentielle, par $B(u) = e^u$, u représentant une unité de temps. Par contre, l'évolution de la production énergétique mondiale n'évolue que linéairement, ce que l'on modélise par $E(u) = u + 2$. On ne peut que s'inquiéter de la possibilité d'être un jour à court d'énergie pour alimenter des ordinateurs aujourd'hui si fondamentaux.*

On s'intéresse donc ici à la détermination du moment où cet équilibre sera atteint, autrement dit à résoudre :

$$(\star) \qquad e^u = u + 2$$

---

1. Mettre le problème $(\star)$ sous la forme $f(u) = 0$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution $u^\star$ à $f(u) = 0$ sur $[0, +\infty[$.

---

1. Recherche par dichotomie [2 pages]

On souhaite dans cette partie appliquer la méthode de dichotomie pour approcher $u^\star$.

(a) Pourquoi peut-on appliquer la méthode de dichotomie sur $[0, 2]$ pour rechercher $u^\star$?

(b) Représenter graphiquement, sur la figure ci-dessous, les deux premières itérations de la méthode de dichotomie.

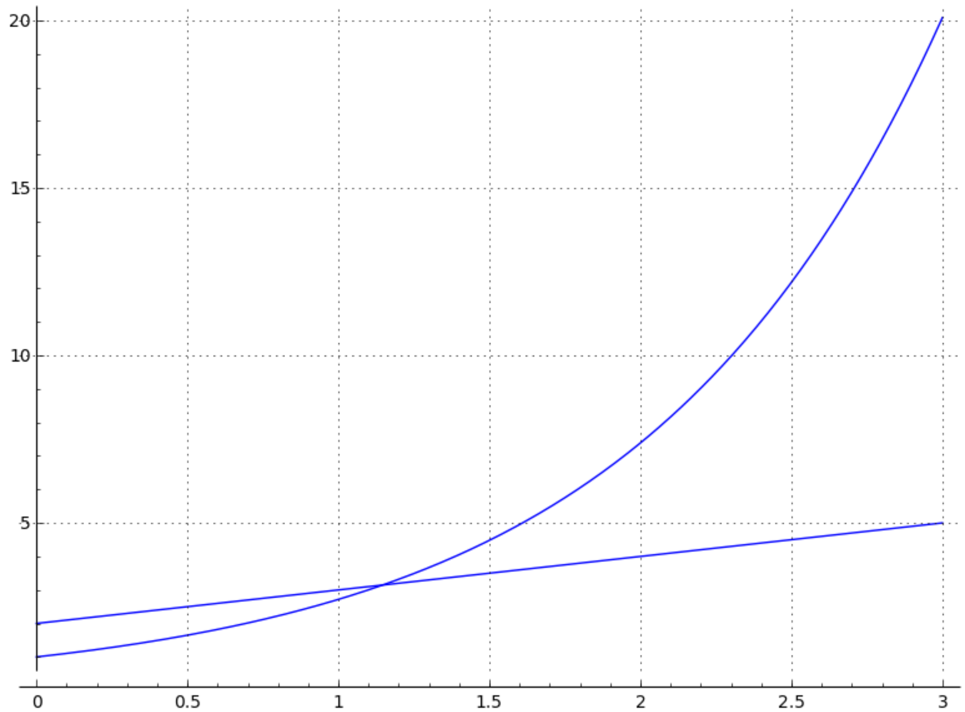

Figure 1. La situation : une production d'énergie insuffisante à terme !

(c) Donner une approximation de $u^\star$ après ces deux itérations.

Il faut encore savoir à quelle précision connaît-on $u^\star$ avec cette méthode.

(d) Rappeler une majoration de l'erreur après m itérations.

(e) Combien d'étapes faut-il pour estimer $u^\star$ à 10^{-20} près ?

2. Transformation en un problème de point fixe [1 page]

Une autre possibilité pour résoudre le problème ($\star$) est d'utiliser la méthode itérative du point fixe.

(a) Donner un problème de point fixe équivalent au problème $f(u) = 0$.

(b) Dessiner les quatre premières itérations sur le graphe de $g(x) = \exp(x) - 2$ ci-dessous , en choisissant comme donnée initiale $\frac{4}{5}$.

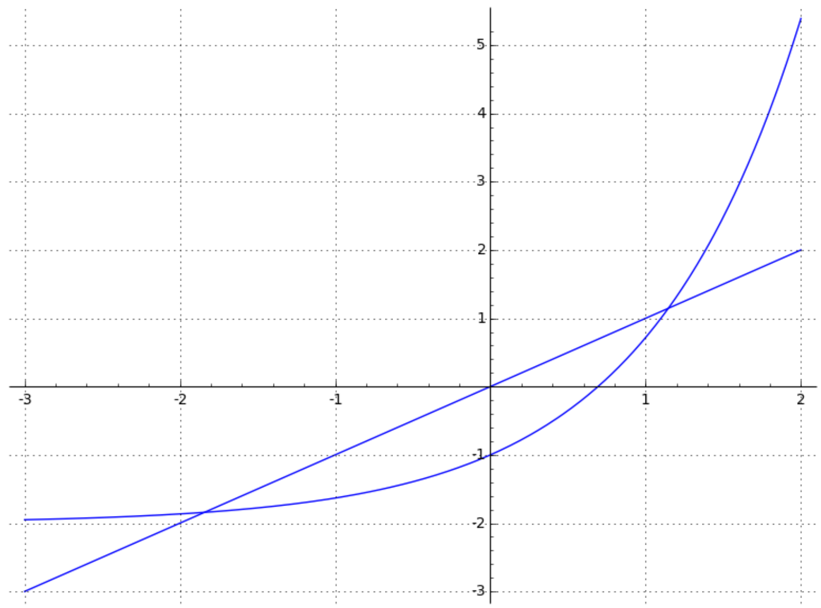

Figure 2. La fonction g et la première bissectrice

(c) Commenter. Quelle hypothèse du théorème du point fixe est manquante ?

3. Méthode de Newton [3 pages]

Revenons au problème de recherche de zéro, $f(u) = 0$.

(a) Représenter graphiquement, sur la figure ci-dessous, les deux premières itérées de la méthode de Newton appliquée à f, en choisissant comme donnée initiale $\frac{1}{2}$.

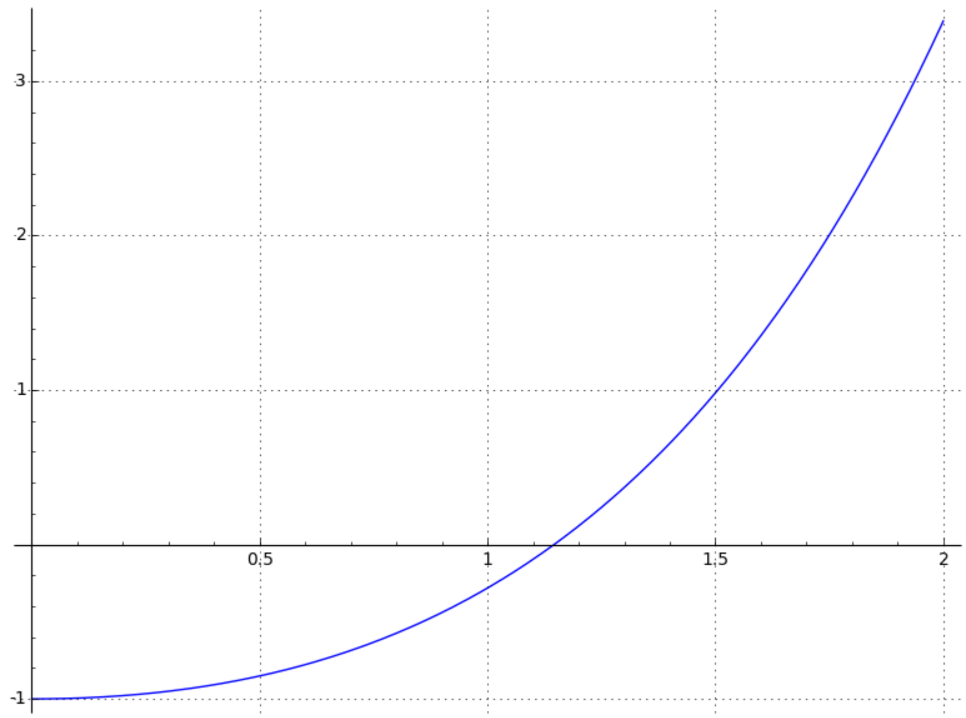

Figure 3. La fonction f sur $[0, 2]$

(b) On note $(x_n)_n$ la suite obtenue par la méthode de Newton appliquée à f. Donner l'expression de x_n pour tout $n \geq 0$.

Dans ce qui suit, supposons que : $\quad \forall n \in \mathbf{N}, \dfrac{|x_{n+1} - u^\star|}{|x_n - u^\star|^2} \leqslant \dfrac{1}{2}.$

(c) Quel est l'ordre de convergence de la méthode de Newton ?

(d) On suppose dorénavant que $|x_0 - u^\star| \leqslant 1$. Montrer que $|x_n - u^\star| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1} |x_0 - u^\star|^{2^n}$.

(e) Combien d'itérations faut-il pour estimer $u^\star$ à 10^{-20} près ? Commenter.

(f) Représenter graphiquement, sur la figure ci-dessous, les deux premières itérations de la méthode de Newton en choisissant comme donnée initiale $-\frac{1}{2}$. Commenter.

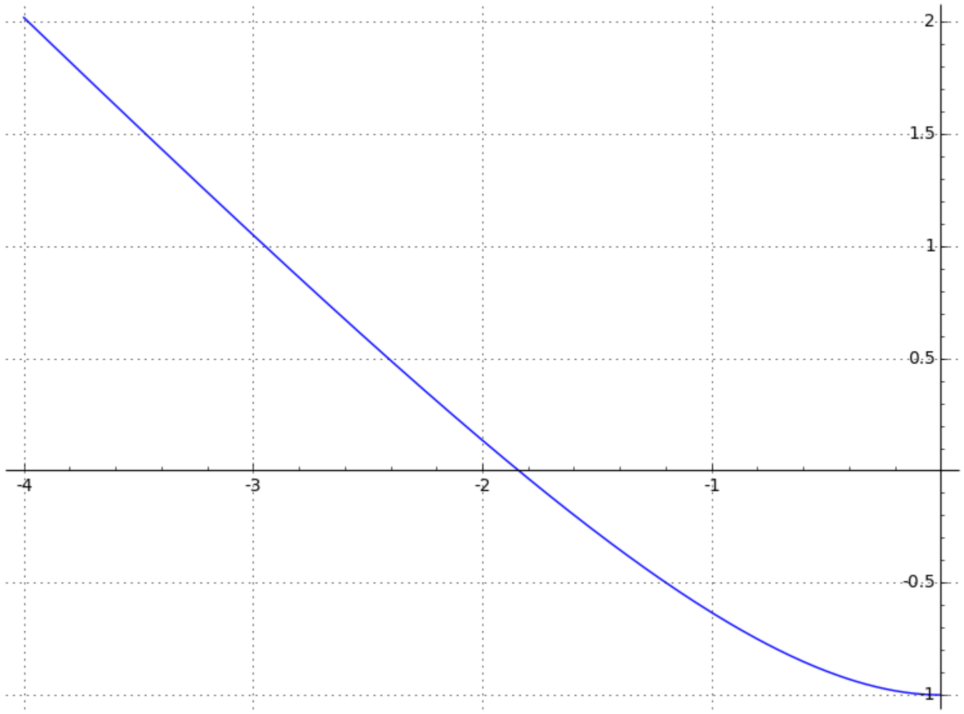

FIGURE 4. La fonction f sur $[-4, 0]$