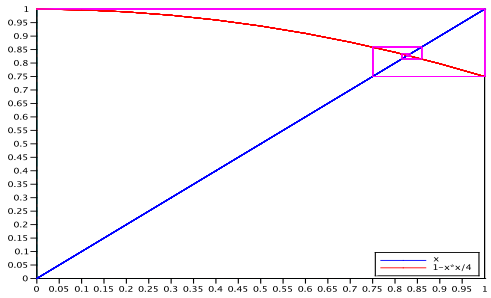
NOM :
Prénom :
Groupe :
Sup Galilée - Université Paris 13 Lundi 12 décembre 2016

Contrôle continu de Mathématiques pour Ingénieur
Durée **1 heure**. Sujet de **2 exercices** et 4 pages recto-verso.
Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. Soit $\beta > 0$. On considère la fonction $g(x) = 1 - \beta x^2$ sur $[-1, 1]$.

1. Rappeler le principe de la méthode de point fixe. voir cours
2. Énoncer le théorème du point fixe. voir cours
3. Montrer que pour $0 \leq \beta \leq 2$, l'intervalle $[-1, 1]$ est stable par g.
   Montrer que $[-1, 1]$ est stable par g revient à montrer que $[1 - \beta] \subset [-1; 1]$. Ce qui est bien le cas lorsque $0 \leq \beta \leq 2$.
4. Quel(s) est (sont) le(s) point(s) fixe(s) de g lorsque $0 < \beta < 2$? Même question lorsque $\beta = 2$?
   Lorsque $\beta < 2$. Les points fixes de la fonction g sont obtenus en résolvant l'équation $g(x) = x$. Cette équation a deux solutions, seule la solution $x_1 = \frac{1}{2\beta}(\sqrt{4\beta + 1} - 1)$ appartient à l'intervalle $[-1; 1]$.
   Lorsque $\beta = 2$, les points fixes sont $x_2 = 1$ et $x_3 = -1$ qui sont tous les deux dans $[-1; 1]$.
5. Pour quelles valeurs de β le point fixe est-il attractif ?
   On $g'(x) = 2\beta x$. Ainsi $|g'(x_1)| = |-(\sqrt{4\beta + 1} - 1)| < 1$ lorsque $0 < \beta < \frac{3}{4}$. Dans ce cas x_1 est un point fixe attractif.
   Lorsque $\beta = 2$, $x_2$et x_3 sont des points fixes répulsifs puisque $|g(x_i)| > 1$, pour $i = 2, 3$.
6. Pour quelles valeurs de β la méthode du point fixe converge-t-elle ? Quel est l'ordre de convergence de la méthode ?
   Lorsque $0 < \beta < \frac{1}{2}$, l'application g est strictement contractante ; le thérème du point fixe permet de conclure quant à la convergence de la méthode quel que soit le premier terme choisi dans l'intervalle $[-1; 1]$.
   Lorsque $\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{3}{4}$, l'application g n'est pas strictement contractante ; le thérème du point fixe ne peut s'appliquer. Il faut faire une étude de suite pour conclure, ce qui n'était pas demandé ici.
   Lorsque $\beta > \frac{3}{4}$, le point fixe est répulsif, la méthode ne converge pas.
   La méthode de point fixe converge à l'ordre 1 puisque $g'(x_1) \neq 0$.
7. Illustrer graphiquement la méthode du point fixe dans le cas $\beta = 1$.



Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ ayant un unique zéro, x^*, sur $[a,b]$.

1. Donner la suite obtenue par la méthode de Newton permettant d'approcher x^*. On note (x_n) cette suite.

$$\begin{aligned} &x_0 \text{ donné dans } [a,b] \\ &x_{n+1} = x_n - \tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

2. Écrire la méthode de Newton comme une méthode de point fixe. On notera Φ la fonction point fixe et (z_n) la suite ainsi obtenue.
   La méthode de Newton est une méthode de point fixe lorsque la fonction point fixe est définie par $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
   Ainsi on construit la suite ci-dessous :

$$\begin{aligned} &z_0 \text{ donné dans } [a,b] \\ &z_{n+1} = \Phi(z_n), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

3. Écrire le développement de Taylor Lagrange de Φ à l'ordre 1 au point x^*.

$$\Phi(x) = \Phi(x^*) + (x - x^*)\Phi'(x^*) + \frac{(x-x^*)^2}{2}\Phi''(\xi), \qquad \text{avec } \xi \text{ entre } x \text{ et } x^*.$$

4. En supposant qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $|\Phi''(x)| \leq M$, montrer que $|z_{n+1} - x^*| \leq \frac{M}{2}|z_n - x^*|^2$.
   En prenant $x = z_n$ dans le développement ci-dessus et en remarquant que $\Phi(z_n) = z_{n+1}, \Phi(x^*) = x^*$, et que $\Phi'(x^*) = 0$, on a $z_{n+1} - x^* = \frac{(z_n - x^*)^2}{2}\Phi''(x^*)$, d'où l'on déduit l'inégalité énoncée.

5. En déduire que $|z_{n+1} - x^*| \leq \frac{2}{M}\left(\frac{M}{2}(z_n - x^*)\right)^{2^{n+1}}$.
   Procédons par récurrence.

   i) Lorsque $n = 0$, on a bien $|z_1 - x^*| \leq \frac{M}{2}|z_0 - x^*|^2$ d'après la question précédente.

   ii) Supposons l'inégalité vraie au rang n et montrons que cette inégalité est satisfaite au rang $n+1$. En utilisant successivement la question précédente et l'hypothèse de récurrence on obtient

$$\begin{aligned} |z_{n+2} - x^*| \leq \frac{M}{2}|z_{n+1} - x^*|^2 &\leq \frac{M}{2}\left(\frac{2}{M}\left(\frac{M}{2}(z_n - x^*)\right)^{2^{n+1}}\right)^2 \\ &= \frac{2}{M}\left(\frac{M}{2}(z_0 - x^*)\right)^{2^{n+2}}. \end{aligned}$$

   iii) Par récurrence, on conclut que l'inégalité énoncée est vraie pour tout $n \geq 0$.