Partiel de Mathématiques pour Ingénieur
Durée 3h. Sujet de 2 pages recto-verso.

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Tous les exercices sont indépendants.

Le barème est donné à titre indicatif.

Rappels :

1) $\cos(k\pi) = (-1)^k$, $\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Développements limités au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n), \quad \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

3) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I_x de $\mathbb{R}$ contenant x et $n+1$ nœuds $x_0, \dots, x_n$. On note $\Pi_n f$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux nœuds $x_0, \dots, x_n$ de degré inférieur ou égal à n . Alors l'erreur d'interpolation $E_n(x) = f(x) - \Pi_n f(x)$ satisfait

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x),$$

où ξ_x , qui dépend de x , appartient à I_x et ω_{n+1} est le polynôme nodal de degré $n+1$.

Exercice 1.[3 points] Trouver un équivalent aux suites définies ci-dessous (on pourra éventuellement faire un développement limité).

a) $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$, b) $v_n = \sqrt{1+n} - \sqrt{n-1}$, ($n \geq 1$), c) $w_n = \ln(1+n) - \ln(n)$.

Corrigé. On rappelle que deux suites u_n et v_n sont équivalentes, $u_n \sim v_n$, lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

a) On a $u_n = \frac{2}{n^2-1}$, et donc on a immédiatement $u_n \sim \frac{2}{n^2}$.

b) On a $v_n = \frac{2}{\sqrt{1+n} + \sqrt{n-1}}$, et donc on a immédiatement $v_n \sim \sqrt{n}$.

c) On a $w_n = \ln(\frac{1+n}{n})$, et donc on a immédiatement $w_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 2.[6 points]

1. Déterminer si la série $\sum u_n$ est convergente, absolument convergente ou divergente lorsque :

a) $u_n = \frac{1}{n} \sin(n\frac{\pi}{2})$, b) $u_n = \begin{cases} \frac{3^n}{4^n} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{3^n}{4^{n+1}} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

2. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.

3. Calculer le rayon de convergence et déterminer l'intervalle de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque a_n est donné par :

a) $a_n = \frac{n^n}{n!}$, b) $a_n = \ln n$.

Corrigé.

1. a) On utilise le critère d'Abel. b) 1ère méthode : critère de Cauchy. $\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{4\sqrt[4]{4}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

2ème méthode. Pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq (\frac{3}{4})^n$, or $(\frac{3}{4})^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{3}{4}$ qui est strictement inférieur à 1, et donc cette série géométrique converge. Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, on conclut que $\sum u_n$ converge.

2. Le rayon de convergence d'une série entière $\sum u_n x^n$, est l'unique $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que
- si $|x| < R$ alors $(\sum u_n x^n)$ converge absolument,
 - si $|x| > R$ alors $(\sum u_n x^n)$ diverge.
3. On a $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$ car $\left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \exp(n \ln(1 + \frac{1}{n}))$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 + \frac{1}{n}) = 1$. On en conclut que le rayon de convergence vaut $\frac{1}{e}$ et l'intervalle de convergence est $] -e^{-1}, e^{-1}[$.
- On a $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$. On en conclut que le rayon de convergence vaut 1 et l'intervalle de convergence est $] -1, 1[$.

Exercice 3.[6 points]

1. Soit $f(x) = \ln(1 + e^x)$.
 - a. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x)$.
 - b. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1 + e^{1/x}}{2}\right)$.
2. Soit $f(x) = \sqrt{x}$.
 - a. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 2 de $f(x)$.
 - b. Déterminer la position relative de la courbe représentative de $f(x)$ par rapport à sa tangente au point $x = 2$.

Corrigé.

1. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (qui contient 0) comme composée de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc, f admet un DL en 0 d'ordre 3.
Il s'agit ici de composer deux DL. D'après les rappels on a $\exp(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$. La partie polynomiale de ce DL ne tend pas vers 0 donc on ré-écrit $f(x)$ comme suit :

$$f(x) = \ln(1 + \exp(x)) = \ln(2 + \exp(x) - 1) = \ln\left(2\left(1 + \frac{\exp(x) - 1}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{\exp(x) - 1}{2}\right).$$

Donc en posant $u(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)$, qui tend bien vers 0 quand x tend vers 0, on obtient

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{\exp(x) - 1}{2}\right) &= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18}\right)^2 + o(x^3) \\ &= \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{18} + o(x^3) \end{aligned}$$

d'où

$$f(x) = \ln 2 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{18} + o(x^3).$$

2. On remarque que $\ln\left(\frac{\exp(1/x) + 1}{2}\right) = \ln(\exp(1/x) + 1) - \ln 2 = f\left(\frac{1}{x}\right) - \ln 2$. Comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, en utilisant la question précédente on obtient en $+\infty$

$$\ln\left(\frac{1 + e^{1/x}}{2}\right) = \frac{1}{4x} + \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{18x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

et donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\exp(1/x) + 1}{2}\right) = 0$.

Exercice 4.[8 points] Soit $f(x) = \cos(\pi x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Soient $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ et $x_3 = 4$.

1. Calculer, selon la méthode de votre choix, le polynôme d'interpolation de Lagrange, $\Pi_2 f$, de f aux nœuds x_0, x_1 et x_2 .
2. On pose $E_2(x) = f(x) - \Pi_2 f(x)$. Donner une majoration de $|E_2(x)|$ lorsque $x \in [x_0, x_2]$.
3. En déduire une approximation de $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Cette approximation est-elle en accord avec l'estimation obtenue à la question précédente? (On rappelle que $\sqrt{2} \approx 1.4142$.)
4. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $\Pi_3 f$ de f aux nœuds x_0, x_1, x_2 et x_3 .

- En déduire une approximation de $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Commentez votre résultat.
- Pour calculer une approximation de $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ à l'aide d'un polynôme d'interpolation de Lagrange de degré inférieur ou égal à 2, quels nœuds choisiriez-vous parmi x_0, x_1, x_2 et x_3 ? Justifiez votre réponse.

Corrigé.

1.

x	$f(x)$	1ère diff. divisées	2ème diff. divisées	3ème diff. divisées
0	$f[x_0] = 1$			
1	$f[x_1] = 0$	$f[x_0, x_1] = -1$		
2	$f[x_2] = 1$	$f[x_1, x_2] = 1$	$f[x_0, x_1, x_2] = 1$	
4	$f[x_3] = 1$	$f[x_3, x_4] = -\frac{1}{2}$	$f[x_1, x_2, x_3] = -\frac{1}{3}$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -\frac{1}{3}$

Dans la base des polynômes nodaux, le polynôme d'interpolation de f aux nœuds $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \Pi_2 f(x) &= f[x_0]\omega_0(x) + f[x_0, x_1]\omega_1(x) + f[x_0, x_1, x_2]\omega_2(x) \\ &= 1 - x + x(x - 1) = 1 - 2x + x^2. \end{aligned}$$

2. On sait que $E_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{4!}\omega_3(x)$, avec ξ_x dans $[0, 2]$ dépendant de x .

On a $f^{(3)}(x) = \pi^3 \sin(\pi x) - \frac{\pi^3}{8} \cos(\frac{\pi}{2}x)$.

- 1ère majoration de $\omega_3(x)$. Comme $x \in [0, 2]$, on a $|\omega_3(x)| \leq |x||x-1||x-2| \leq 4$, et donc $|E_2(x)| \leq \frac{8 \cdot 4}{4!} = \frac{4}{3}$.

- 2ème majoration $\omega_3(x)$. On cherche $\max_{x \in [0, 2]} \omega_3(x)$. On a $\omega_3'(x) = (2x-1)(x-2) + x(x-1)$, et donc en établissant le tableau de variation de ω_3 on obtient que $\max_{x \in [0, 2]} \omega_3(x) \leq \frac{2}{5}$ et donc $|E_2(x)| \leq \frac{8 \cdot 2}{5 \cdot 4!}$.

3. On remarque que $\frac{\sqrt{2}}{2} = f(\frac{1}{2})$, on peut donc obtenir une majoration de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ à l'aide de $\Pi_2 f(\frac{1}{2})$. On obtient alors que $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1}{4}$. L'erreur vaut ici approximativement $0.7071 - 0.25 = 0.4571$ ce qui est bien inférieur à $\frac{4}{3}$.

4. En utilisant le tableau des différences divisées ci-dessus on obtient que $\Pi_3 f(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - \frac{8}{3}x + 1$.

Exercice 5.[7 points] Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $[a, b]$. Soient x_0, x_1, x_2 et x_3 des points de $[a, b]$.

L'objectif de cet exercice est de calculer une approximation de $f'(x_i), i = 0, \dots, 3$ à partir de $f(x_i), i = 0, \dots, 3$.

Pour y fixé dans $[a, b]$ on définit $Q_y(f)$ l'application qui à une fonction f associe le réel

$$Q_y(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3),$$

où les A_i sont des nombres réels.

Pour $i = 0, \dots, 3$, on note l_i le polynôme caractéristique de Lagrange associé aux nœuds $x_0, \dots, x_3$.

On cherche A_0, A_1, A_2 et A_3 tels que

$$Q_y(p) = p'(y), \quad \text{pour tout polynôme } p \text{ de degré inférieur ou égal } 3. \tag{1}$$

1. Montrer que l'égalité (1) est satisfaite si et seulement si

$$A_i = l_i'(y), \quad i = 0, \dots, 3.$$

2. En déduire que

$$Q_y(f) = (\Pi_3 f)'(y),$$

où $\Pi_3 f$ désigne le polynôme de Lagrange interpolant f aux nœuds $x_0, \dots, x_3$.

Dans ce qui suit, on cherche à établir une expression de l'erreur entre $f'(y)$ et $Q_y(f)$.

3. Montrer que $\omega_4'(x_1) = (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)$.

4. On note $E_3(x) = f(x) - \Pi_3 f(x)$, et $g(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi_x)$, montrer que

$$E_3'(x) = \frac{1}{4!} \omega_4'(x) f^{(4)}(\xi_x) + g'(x) \omega_4(x),$$

avec ξ_x un point de $[a, b]$ dépendant de x .

5. En déduire que

$$f'(x_i) - Q_{x_i}(f) = \frac{1}{4!} \omega'_4(x_i) f^{(4)}(\xi_{x_i}), \quad i = 0, \dots, 3.$$

avec ξ_{x_i} est un point de $[a, b]$ dépendant de x_i .

6. On suppose que pour tout x dans $[a, b]$, il existe un réel positif M tel que $|f^{(4)}(x)| \leq M$.
Donner une majoration de l'erreur $|f'(x_i) - Q_{x_i}(f)|$.

Soient $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 0, b = 4$, et $x_0 = a, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = b$.

7. Calculer une approximation de $f'(1)$ en utilisant la méthode ci-dessus.

8. Calculer l'erreur commise. Votre résultat est-il en accord avec la majoration demandée à la question 6 ?

9. Peut-on obtenir une approximation de $f'(\frac{3}{2})$ en utilisant les nœuds $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$?