Institut Galilée
Université Paris 13 Lundi 9 novembre 2015

Partiel de Mathématiques pour Ingénieur
Durée 3h. Sujet de 2 pages recto-verso.
Les documents, les calculatrices programmables et les téléphones portables sont interdits.
Les quatre exercices sont indépendants.
Le barème sur 30 points est donné à titre indicatif.

Rappel : Soient $n+1$ nœuds $x_0, \ldots, x_n$ d'un intervalle $[a,b]$ et $\Pi_n f$ le polynôme interpolant la fonction f en ces nœuds. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, l'erreur d'interpolation est donnée pout tout x dans $[a,b]$ par

$$f(x) - \Pi_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \qquad \text{avec } \xi \in]a,b[.$$

Ici $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ est le polynôme nodal de degré $n+1$.

Exercice 1.[5 points]

1. Linéariser $\cos^4 x$.
2. Résoudre $z^4 = \dfrac{-8}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$.
3. Soit $a \in]0,\pi[$. Écrire le nombre complexe $z = 1 + e^{ia}$ sous forme trigonométrique.

Corrigé. 1.

$$\cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \left(\frac{e^{2ix}+1+e^{-2ix}}{4}\right)^2 \left(\frac{e^{2ix}+1+e^{-2ix}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix}+2e^{2ix}+3+2e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\cos(4x)+2\cos(2x)+6\right)$$

2. On a $\sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2e^{i\pi/4}$. Et donc

$$\frac{-8}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = -16e^{-i\pi/4} = 16e^{i\pi/4}.???$$

Donc $z^4 = \frac{-8}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$ est équivalent à $z = 2e^{ik\pi/16+pi/4}$.???
3. On remarque que $z = e^{ia/2}\left(e^{-ia/2}+e^{ia/2})\right) = 2\cos(a/2)e^{ia/2}$. Il s'agit bien de l'écriture trigonométrique du complexe z puisque $\cos(a/2) > 0$ car $a \in]0,\pi[$.

Exercice 2.[7 points]

1. Calculer les limites des suites suivantes : $u_n = \ln(2n^2-n) - \ln(3n+1)$, $v_n = \left(\dfrac{n+2}{n-2}\right)^n$, $s_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Corrigé.

1. $u_n = \ln\left(\dfrac{2n^2-n}{3n+1}\right) = \ln\left(\dfrac{2n^2-n}{3n+1}\right) = \ln\left(\dfrac{2n-1}{3+1/n}\right)$, d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   $v_n = \exp\left(n\ln(\dfrac{n+2}{n-2})\right) = \exp\left(n\ln(1+\dfrac{4}{n-2})\right)$. Or $\ln(1+\dfrac{4}{n-2}) \sim_{+\infty} \dfrac{4}{n-2}$, donc $n\ln(1+\dfrac{4}{n-2}) \sim_{+\infty} \dfrac{4n}{n-2}$.
   Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n}{n-2} = 4$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} v_n = e^4$.

3. $s_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$. On reconnaît une somme de Riemann $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_k)$ avec $x_k, k = 0, \ldots, n-1$ des points de l'intervalle $[0,1]$ tels que $x_0 = 0, x_{n-1} = 1$ et $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$ pour tout k et $f(x) = \sqrt{x}$. Comme f est continue sur $[0,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = [\tfrac{2}{3}x^{3/2}]_0^1 = \frac{2}{3}$.

2. Par intégration par parties on obtient : $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = [\tfrac{1}{3}x^3\ln x]_1^e - \tfrac{1}{3}\int_1^e x^3\tfrac{1}{x} = \tfrac{e^3}{3} - (\tfrac{e^3}{9} - \tfrac{1}{9}) = \tfrac{2e^3}{9} + \tfrac{1}{9}$.
   En faisant le changement de variable $u = \sqrt{x}$, on obtient $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ soit $2u\,du = \mathrm{d}x$ et donc
   $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_1^2 \frac{1-u}{u}u\,du = 2\int_1^2 1 - u\,du = 2(1 - \tfrac{1}{2}(4-1)) = -1.$

Exercice 3.[10 points] Soit $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)\cos(\pi x)$ et soient $x_0, x_1, \cdots, x_n$ des points de l'intervalle $[0,5]$ tels que $x_0 = 0, x_n = 5$ et $x_{j+1} - x_j = h > 0$, pour $j = 0, \ldots, n-1$.
Sur chacun des n sous-intervalles $[x_j, x_{j+1}]$ on construit une interpolation linéaire de f. Le polynôme par morceaux de degré 1 ainsi obtenu est noté $\widetilde{\Pi}_{1,n}f$.
On désigne par $\Pi_1^j f$ le polynôme de degré inférieur ou égal à 1 interpolant f aux nœuds x_j et x_{j+1}.
Le polynôme $\widetilde{\Pi}_{1,n}f$ est définit comme suit : $\widetilde{\Pi}_{1,n}f(x) = \Pi_1^j f(x)$ lorsque $x \in [x_j, x_{j+1}], j = 0, \ldots, n-1$.

1. Illustrer graphiquement l'approximation de f par $\widetilde{\Pi}_{1,n}f$.
2. On pose $g_j(x) = -(x - x_j)(x - x_{j+1})$ pour $x \in [x_j, x_{j+1}]$. Montrer que pour tout $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $g_j(x) \leq \dfrac{h^2}{4}$.
3. Donner une majoration de l'erreur $|f(x) - \Pi_1^j f(x)|$ lorsque $x \in [x_j, x_{j+1}]$.
4. Quelle doit être la longueur h de chaque sous-intervalle pour que l'erreur entre f et son polynôme d'interpolation linéaire par morceaux $\widetilde{\Pi}_{1,n}f$ soit inférieure ou égale à 10^{-6} ?
5. Donner une approximation de $f(\frac{1}{4})$ et de $f(\frac{9}{2})$ à l'aide de $\widetilde{\Pi}_{1,5}f$.
6. Donner une approximation de $f(\frac{1}{4})$ à l'aide du polynôme de degré inférieur ou égal à 2, $\Pi_2 f$, interpolant f en des nœuds que vous aurez convenablement choisis parmi $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Puis, calculer une approximation de $f(\frac{9}{2})$ à l'aide de $\Pi_2 f$.
7. Quelle méthode d'interpolation choisiriez-vous pour obtenir une approximation de f en différents points de $[0,5]$?

Corrigé.

Exercice 4.[8 points] Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. On pose $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

1. On approche I à l'aide de la formule d'intégration numérique ci-dessous :
   $$I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right).$$
   Quels sont les poids et les nœuds de cette formule ? De quelle méthode s'agit-il ? Illustrer graphiquement cette méthode.
2. Déterminer l'ordre de cette formule d'intégration.
3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. Montrer que l'erreur d'approximation est :
   $$I(f) - I_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi), \qquad \text{avec } \xi \in]a,b[.$$
4. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des points de l'intervalle $[a,b]$ tels que $x_0 = a, x_n = b$ et $x_{j+1} - x_j = h > 0$, pour $j = 0, \ldots, n-1$. On approche $I(f)$ par la formule composite
   $$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{x_{j+1} - x_j}{2}\left(f(x_j) + f(x_{j+1})\right).$$
   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n-1} h f(x_j)$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(f) = I(f)$.

5. Application. Un radar a été utilisé pour enregistrer la vitesse d'une voiture toutes les 6 secondes pendant les 36 premières secondes d'une course (voir le tableau ci-dessous).

t (sec)	0	6	12	18	24	30	36
v (mètre par sec)	124	134	148	156	147	133	121

Calculer une approximation de la distance parcourue par cette voiture pendant ces 36 secondes.

Corrigé.