Institut Galilée
Université Paris 13 Lundi 21 novembre 2016

Partiel de Mathématiques pour Ingénieur
Durée 3h. Sujet de 2 pages recto-verso.
Les documents, les calculatrices programmables et les téléphones portables sont interdits.
Les cinq exercices sont indépendants.
Le barème sur 40 points est donné à titre indicatif.

Rappels :

1) Développements limités au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

2) Le conditionnement d'une matrice inversible A, relativement à une norme notée $||\cdot||$, est défini par :

$$\mathrm{cond}_{||\cdot||}(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}^{-1}\|\,\|\mathrm{A}\|.$$

Exercice 1.[6 points]

1. Calculer $\lim_n \left(\frac{n+x}{n-x}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Donner le développement en série entière de $f(x) = \frac{2}{3-x}$ et déterminer son intervalle de convergence.
3. Soit $f(x) = \big(1+\sin(x)\big)^{\frac{1}{x}}$.
   a. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
   b. En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.
   c. Quelle est la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0 ?

Correction.

1. Voir TD
2. Voir TD
3. $f(x) = \exp\big(\frac{1}{x}\ln(1+\sin(x))\big)$.
   a. On sait que $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$;comm $\sin x$ vaut bien 0 en 0 on a $\ln(1+\sin(x)) = x - \dfrac{x^3}{3!} - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$. Ainsi, $f(x) = e\exp\big(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\big) = e\big(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{8}x^2\big) + o(x^2) = e\big(1 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{24}x^2\big) + o(x^2)$.
   b. On en déduit que $\lim_{x\to 0} f(x) = e$.
   c. D'après ce DL on déduit que l'équation de la tangente à la courbe de f en 0 est $e(1 - \frac{x}{2})$. Comme $\frac{7\,e}{24}x^2$ est positif, on conclut que la tagente est au-dessous de la courbe de f en 0.

Exercice 2.[11 points] Soit $f(x) = \sqrt{1+x}$. On cherche à approcher $f(x)$ par un polynôme d'interpolation sur l'intervalle $[0,1]$.

1. Calculer le polynôme de Lagrange interpolant f aux noeuds $\{0, 0.44, 0.69\}$. On note $\Pi_2 f$ ce polynôme.
2. En utilisant la méthode de Newton, recalculer le polynôme d'interpolation aux noeuds $\{0, 0.44, 0.69\}$.
3. Est-ce que ces deux polynômes sont identiques ? Est-ce que les deux polyômes obtenus par ces deux méthodes sont toujours identiques dans le cas général ? Donner une explication.
4. Soit $x \in [0,1]$. Donner l'expression de l'erreur d'interpolation $E_2(x) = f(x) - \Pi_2 f(x)$.
5. Calculer le poynôme d'interpolation, $\Pi_3 f$, de f aux nœuds $\{0, 0.44, 0.5625, 0.69\}$.

6. Donner une estimation de $f(0.21)$ par les polynômes $\Pi_2 f$ et $\Pi_3 f$. Les résultats seront arrondis à 3 chiffres significatifs.
7. Calculer la valeur précise de $f(0.21)$ et comparer avec les valeurs obtenues à la question précédente.
8. **Application.** Dans le plus ancien texte mathématique *Suan shu shu* "écriture de compte ", le problème "Mise au carré d'un champ" est énoncé : Soit un champ d'un arpent : de combien de pas est-il carré ? En utilisant le polynôme $\Pi_2 f$, donner une approximation arrondie à 3 chiffres significatifs de la solution de ce problème.

" arpent " traduit une unité d'aire.
"pas" traduit une unité de longueur.
On sait que 240 pas carrés= 1 arpent.

Exercice 3.[9 points] Soit f_ε une fonction dont le graphe passe par les points $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1 - \varepsilon,\ y_1 - \varepsilon a)$, et $P_2 = (x_1, y_1)$.

1. Calculer la forme de Newton du polynôme d'interpolation, P_2^ε, qui coïncide avec f_ε aux points $P_0,\ P_1$ et P_2.
2. Soit x fixé dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0+} P_2^\varepsilon(x) = H_2(x)$, où
$$H_2(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{a(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)^2}(x - x_0)(x - x_1).$$
3. Montrer que $H_2'(x_1) = a$, $H_2(x_0) = y_0$ et $H_2(x_1) = y_1$.
Un tel polynôme est appelé polynôme d'interpolation de Hermite.
4. Soit une fonction f telle que $f(0) = y_0$, $f(1) = y_1$ et $f'(1) = a$. On note $H_2[f]$ le polynôme d'interpolation de Hermite de f, c'est-à-dire, le polynôme qui interpole f aux nœuds $\{0, 1\}$ et dont la dérivée en 1 coïncide avec la dérivée de f.
L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe $C_0,\ C_1,\ C_a > 0$ tels que
$$\max_{x\in[0,1]} \left|H_2[f](x)\right| < C_0\,|y_0| + C_1|y_1| + C_a|a|.$$
   a. Donner l'expression explicite de $H_2[f]$.
   b. Puis, montrer que $\max_{x\in[0,1]} |x(x-1)| \le \frac{1}{4}$
   c. À l'aide de l'inégalité triangulaire et du résultat obtenu à la question b., borner chaque terme de $H_2[f](x)$.
5. **Application.** On suppose que $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{2})$. Trouver le polynôme $H_2[f]$ qui interpole f aux points $0, 1$ et dont la dérivée en 1 coïncide avec la dérivée de $f(x)$.

Correction.

1. Différences divisées : Le polynôme P_2^ε est donné par

x	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
x_0	y_0		
$x_1 - \varepsilon$	$y_1 - \varepsilon a$	$\frac{y_1 - y_0 - a\varepsilon}{x_1 - x_0 - \varepsilon}$	
x_1	y_1	$\frac{y_1 - (y_1 - a\varepsilon)}{x_1 - (x_1 - \varepsilon)} = a$	$\frac{a - \frac{y_1 - y_0 - a\varepsilon}{x_1 - x_0 - \varepsilon}}{x_1 - x_0} = \frac{a(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_0 - \varepsilon)}$

$$P_2^\varepsilon(x) = f[x_0]\omega_0(x) + f[x_0, x_1 - \varepsilon]\omega_1(x) + f[x_0, x_1 - \varepsilon, x_1]\omega_2(x),$$

oú $\omega_0(x) = 1$, $\omega_1(x) = (x - x_0)$ et $\omega_2(x) = (x - x_0)(x - (x_1 - \varepsilon))$. Alors,

$$\begin{aligned} P_2^\varepsilon(x) = y_0 &+ \frac{y_1 - y_0 - a\varepsilon}{x_1 - x_0 - \varepsilon}(x - x_0) \\ &+ \frac{a(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_0 - \varepsilon)}(x - x_0)(x - (x_1 - \varepsilon)). \end{aligned}$$

2. pour x fixe,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} P_2^\varepsilon(x) &= y_0 + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{y_1 - y_0 - a\varepsilon}{x_1 - x_0 - \varepsilon}(x - x_0) \\ &\quad + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{a(x_1 - x_0 - \varepsilon) - (y_1 - y_0 - a\varepsilon)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_0 - \varepsilon)}(x - x_0)(x - (x_1 - \varepsilon)) \\ &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{a(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)^2}(x - x_0)(x - x_1) = H_2(x). \end{aligned}$$

3. C'est facile à remarquer

$$\begin{aligned} H_2(x_0) &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_0 - x_0) + \frac{a(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)^2}(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) = y_0, \\ H_2(x_1) &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) + \frac{a(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)^2}(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) = y_1. \end{aligned}$$

Pour la derivée,

$$H_2'(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + \frac{a(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)^2} (x - x_1 + x - x_0) \,,$$

d'oú

$$\begin{aligned} H_2'(x_1) &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + \frac{a(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)^2}(x_1 - x_0) \\ &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + \frac{a(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{a(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = a. \end{aligned}$$

4. — posant $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$, on obtient

$$H_2[f](x) = y_0 + (y_1 - y_0)x + (a - (y_1 - y_0))x(x - 1) \tag{1}$$

— Posons $f(x) = x(x-1)$; alors $f'(x) = 2x - 1$. Alors, $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ (et $f'(x)$ change son signe en $\frac{1}{2}$). On remarque que

$$f(0) = 0,\ f(1) = 0,\ f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4},$$

et $f(x) \in [-\frac{1}{4}, 0]$ pour $x \in [0,1]$. D'oú $|f(x)| = g(x) \leq \frac{1}{4}$ pour chaque $x \in [0,1]$, alors $\max\limits_{x\in[0,1]} g(x) \leq \frac{1}{4}$ (en fait, égal à $\frac{1}{4}$).

— grace à l'inégalité triangulaire, pour chaque x

$$\begin{aligned} |H_2[f](x)| &= |y_0 + (y_1 - y_0)x + (a - (y_1 - y_0))x(x-1)| \\ &\leq |y_0| + |(y_1 - y_0)x| + |(a - (y_1 - y_0))x(x-1)|. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \max_{x\in[0,1]} |H_2[f](x)| &\leq \max_{x\in[0,1]} (|y_0| + |(y_1 - y_0)x| + |(a - (y_1 - y_0))x(x-1)|) \\ &\leq \max_{x\in[0,1]} |y_0| + \max_{x\in[0,1]} |(y_1 - y_0)x| + \max_{x\in[0,1]} |(a - (y_1 - y_0))x(x-1)|, \end{aligned}$$

our la derniere inégalite est obtenu en utilisant $\max\limits_{x\in[0,1]} (f(x) + g(x)) \leq \max\limits_{x\in[0,1]} f(x) + \max\limits_{x\in[0,1]} g(x),$ [1] Considerons chaque terme de l'inégalite obtenue :

$$\max_{x\in[0,1]} |y_0| = |y_0|, \qquad \max_{x\in[0,1]} |(y_1 - y_0)x| = |y_1 - y_0| \leq |y_1| + |y_0|$$

$$\max_{x\in[0,1]} |(a - (y_1 - y_0))x(x-1)| = \frac{1}{4}|a - (y_1 - y_0)| \leq \frac{1}{4}(|a| + |y_1| + |y_0|) \,.$$

D'oú,

$$\begin{aligned} \max_{x\in[0,1]} |H_2[f](x)| &\leq |y_0| + |y_1| + |y_0| + \frac{1}{4}(|a| + |y_1| + |y_0|) \\ &= \frac{9}{4}|y_0| + \frac{5}{4}|y_1| + \frac{1}{4}|a|. \end{aligned}$$

1. Pour obtenir cette inégalité, notons :

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \max_{y\in[0,1]} f(y), \qquad x \in [0,1], \\ g(x) &\leq \max_{y\in[0,1]} g(y), \qquad x \in [0,1], \end{aligned}$$

d'oú la somme

$$f(x) + g(x) \leq \max_{y\in[0,1]} f(y) + \max_{y\in[0,1]} g(y), \qquad x \in [0,1].$$

Comme l'inégalite est vraie pour chaque $x \in [0,1]$,

$$\max_{x\in[0,1]} (f(x) + g(x)) \leq \max_{x\in[0,1]} (\max_{y\in[0,1]} f(y) + \max_{y\in[0,1]} g(y)) \equiv \max_{y\in[0,1]} f(y) + \max_{y\in[0,1]} g(y).$$

5. $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$, $f'(1) = 0$. Alors, en utilisant (1), ou $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ et $a = 0$,

$$H_2[f](x) = x - x(x-1) = 2x - x^2.$$

Exercice 4.[6 points] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\text{cond}_{||\cdot||_\infty}(A)$ et $\text{cond}_{||\cdot||_1}(A)$.
2. Résoudre les systèmes linéaires suivants :
   a. $Ax = b$ pour $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$.
   b. $Ay = b + \epsilon b$ avec $\epsilon b = \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Az = b + \Delta b$ avec $\Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$.
   c. Majorer chacune des expressions ci-dessous en fonction du nombre de conditionnement.
   $$\frac{||y-x||_1}{||x||_1}, \quad \frac{||z-x||_1}{||x||_1}, \quad \frac{||y-x||_\infty}{||x||_\infty}, \quad \frac{||z-x||_\infty}{||x||_\infty}.$$
   d. Conclure.

Exercice 5.[8 points] Soient $A, M, N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 10 & 16 & 29 \\ 0 & 4 & 18 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

et $b, c, d \in \mathbb{R}^3$ les vecteurs définis par :

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 186 \\ 1046 \\ 512 \end{pmatrix}.$$

1. a. Résoudre le système $Mx = b$.
   b. Résoudre le système $Nx = c$. On notera $\bar{x}$ l'unique solution de ce système.
2. a. Donner la décomposition LU de A en appliquant la méthode du pivot de Gauss. On prendra soin de donner les deux matrices élémentaires E_1 et E_2 et d'expliquer chaque étape du calcul.
   b. Résoudre le système $Ax = b$.
   c. Résoudre le système $A^2x = d$ sans calculer A^2.

Correction.

1. a. On résout le système triangulaire

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ 5x_1 + x_2 = 20 \\ 4x_2 + x_3 = 24 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 20 - 5 \times 3 = 5 \\ x_3 = 24 - 4 \times 5 = 4 \end{cases}$$

La solution de cette équation est donc $x = c$.

   b. On résout le système triangulaire

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_2 + 4x_3 = 5 \\ 2x_3 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = (3 - 5 \times 2 - 3 \times (-3))/2 = 1 \\ x_2 = 5 - 4 \times 2 = -3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

La solution de cette équation est donc $\bar{x} = (1, -3, 2)$.

2. a. On part de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 10 & 16 & 29 \\ 0 & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

et on fait l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$. On obtient

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

puis on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$ et on obtient

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose $U = N$, on a $E_2 E_1 A = U$ donc $A = LU$ où $L = E_1^{-1} E_2^{-1}$. Or, d'après le cours,

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $L = M$.

b. D'après les questions précédentes,

$$Ax = b \Longleftrightarrow M(Nx) = b \Longleftrightarrow Nx = c \Longleftrightarrow x = \bar{x}$$

c. La première méthode ici consiste à remarquer que $Ab = d$ et comme A est inversible, on a

$$A^2 x = d \Longleftrightarrow Ax = b \Longleftrightarrow x = \bar{x}$$

Si on ne remarque pas cette égalité, on peut écrire

$$A^2 x = d \Longleftrightarrow M(Ny) = d$$

où $y = Ax$ et résoudre cette équation d'inconnue y en se ramenant à deux systèmes triangulaires : $Mz = d$ de solution $\bar{z}$ et $Ny = \bar{z}$ de solution $\bar{y}$. On commence par résoudre $Mz = d$:

$$\begin{cases} z_1 = 186 \\ 5z_1 + z_2 = 1046 \\ 4z_2 + z_3 = 512 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z_1 = 186 \\ z_2 = 1046 - 5 \times 186 = 116 \\ z_3 = 512 - 4 \times 116 = 48 \end{cases}$$

donc $\bar{z} = (186, 116, 48)$. On résoud maintenant $Ny = \bar{z}$:

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 = 186 \\ y_2 + 4y_3 = 116 \\ 2y_3 = 48 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = (186 - 5 \times 24 - 3 \times 20)/2 = 3 \\ y_2 = 116 - 4 \times 24 = 20 \\ y_3 = 24 \end{cases}$$

donc $\bar{y} = b$. On a montré que

$$A^2 x = d \Longleftrightarrow Ax = b \Longleftarrow x = \bar{x}$$

donc la solution de l'équation $A^2 x = b$ est $x = \bar{x}$.