Institut Galilée
Université Paris 13

Lundi 12 janvier 2015

Partiel de Mathématiques pour Ingénieur
Durée 3h. Sujet de 4 pages recto-verso.
Les documents et les téléphones portables sont interdits.
Les calculatrices sont autorisées.
Tous les exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif.
Les parties A et B doivent étre rédigées sur des copies séparées.

Partie A

Exercice 1.[5 points]

1. Soit q une fonction réelle positive dont le développement limité au voisinage de 0 d'ordre 2 est :

$$q(x) = 2 + 2x + x^2 + o(x^2), \quad x \to 0.$$

   Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $\sqrt{q}$.

2. En effectuant un changement de variable, calculer l'intégrale

$$\int_0^{\ln(4)} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

3. $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq x \leq \frac{2}{3}, 0 \leqslant y \leqslant x\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \frac{2}{3} \leq x \leq 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - \frac{x}{2}\right\}$.
   a. Représenter le domaine K.
   b. Calculer $I = \iint_K x^2 dxdy$.

Exercice 2.[10 points] On envisage de déposer un câble de télécommunications au fond de l'océan pour relier Brest à New York, et l'on souhaite connaître approximativement la longeur de câble nécessaire. On se place dans un repère orthonormé où l'on considère une fonction p qui représente le profil sous-marin entre Brest, de coordonnées $(-L, 0)$ et New York, de coordonnées $(L, 0)$ avec $L > 0$. Ainsi, $p(-L) = p(L) = 0$ et $p(x) < 0$ si $x \in]-L, L[$.

1. Montrer, en justifiant bien votre raisonnement, que la longueur exacte ℓ de câble nécessaire vaut :

$$\ell = \int_{-L}^{L} \sqrt{1 + p'(x)^2} dx\,.$$

   En déduire que $\ell \geq 2L$.
   On note $M = \sup_{x \in [-L,L]} |p'(x)|$. Des études empiriques ont montré que l'on peut considérer que la pente du profil est faible, c'est-à-dire $M \ll 1$ ce qui permet de faire l'approximation ci-dessous :

$$\ell \approx \ell_1 = 2L + \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} p'(x)^2 \, dx\,.$$

2. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a

$$\left| \sqrt{1 + x^2} - \left(1 + \frac{1}{2}x^2\right) \right| \leq \frac{x^4}{8}.$$

3. En majorant $|\ell - \ell_1|$, déduire l'encadrement

$$2L \leq \ell \leq 2L(1 + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{8}M^4).$$

4. On suppose maintenant qu'un bateau a sondé le fond marin en des points $(x_k)_{0\leq k\leq N}$ entre Brest ($x_0 = -L$) et New York ($x_N = L$), et a relevé la valeur de $p'(x_k)$ pour $k = 1 \dots N$. On suppose constante la distance entre deux points. On utilise une formule d'intégration composite pour calculer une approxmation de ℓ, donnée par

$$\ell_N = \frac{2L}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x_k) + f(x_{k+1})).$$

où l'on prend $f(x) = \sqrt{1 + p'(x)^2}$. De quelle méthode s'agit-il ? Quel est son ordre ?

5. On rappelle que si h est la longueur de l'intervalle qui sépare deux points consécutifs, l'erreur de quadrature pour la formule précédente est donnée par

$$E = -\frac{2L}{12} h^2 f''(\xi)\,, \quad \xi \in [-L, L].$$

On suppose qu'il existe $A, B > 0$ tels que $\sup_{[-L,L]} |p''(x)| \leq A$ et $\sup_{[-L,L]} |p^{(3)}(x)| \leq B$. Montrer que

$$|E| \leq \frac{2L^3}{3N^2}(A^2 + MB).$$

6. En pratique, le câble étant assez rigide, on peut considérer que $A \leq M$ et $B \leq M$. En supposant que $M \leq 1/10$ et que $2L = 5,4.10^6\, m$, majorer l'erreur relative $|E/\ell|$ et en déduire le nombre de points nécessaires pour avoir $|E/\ell| \leq 10^{-1}$.

Exercice 3.[8 points] On considère la fonction $f(x, y, z) = x^2 + yz$ sur la boule unité de $\mathbb{R}^3$ définie par $B = \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$, et on s'intéresse à ses extremums.

1. Commençons l'étude à l'intérieur de la sphère, sur $B_0 = \{x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.
   a. Si f admet un extremum local en x_0, que peut-on dire se son gradient/de ses dérivées partielles en x_0 ?
   b. Quels sont les points critiques de f ? Peut-on conclure quant aux extremums de f sur B_0 ?
   c. Rappeler la définition de la matrice hessienne de f en un point x_0.
   d. On suppose que f admet en x_0 un point critique. On suppose que la hessienne de f en x_0 est diagonalisable avec pour valeurs propres λ_1 et λ_2. Que peut-on dire si les valeurs propres sont strictement positives ? si elles sont strictement négatives ? si l'une des deux est nulle ? si les deux sont de signes strictement opposés ?
   e. Quelle est la hessienne de f ? Que dire des extremums locaux de f sur B_0 ?
2. Passons à l'étude sur le bord $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
   a. Soit U un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $f, g_1, \dots, g_k$ des applications continûment différentiables sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notons
   $$C = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}.$$
   On suppose de plus que les gradients $\nabla g_i(a)$ sont linéairement indépendants.
   Quelle est la condition nécessaire pour que la restriction de f à C admette un extremum au point $a \in C$?
   b. On admet que f admet un maximum et un minimum sur S. Quels sont les minimums et maximums de f ? Où sont-ils atteints ?
3. Conclusion : f a-t-elle des extremums locaux sur B ? globaux ?

Partie B

Exercice 4.[10 points] Soit $f(x) = \exp(x) - x - 1$. On cherche à résoudre de façon approchée le problème

$$f(x) = 0. \qquad (\mathcal{P})$$

I. Méthode de Newton

1. Le problème $(\mathcal{P})$ a-t-il une unique solution dans l'intervalle $[-1, 1]$? On notera p cette solution.
2. Donner l'expression de la suite obtenue par la méthode de Newton permettant d'approcher cette solution.
3. Calculer les deux premières itérées lorsque la donnée initiale est égale à 1.
4. On note e_n l'erreur entre la solution exacte de $(\mathcal{P})$ et la solution approchée à l'itération n. Dans le tableau ci-dessous sont reportées les valeurs de $|e_n|$ pour différentes valeurs de n.

n	1	2	5	6	7	8	9	10	15	20
e_n	0.5819767	0.3190550	0.0437957	0.0220577	0.0110694	0.0055449	0.0055449	0.0055449	0.0000434	0.0000014

Déduire de ce tableau l'ordre de convergence de la méthode. Expliquer ce résultat.

II. Méthode de Newton modifiée.

On dit qu'une fonction h a un zéro $x^\star$, de multiplicité m lorsque qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ telle que $g(x^\star) \neq 0$ et $h(x) = (x - x^\star)^m g(x)$.
Dire que $x^\star$ est un zéro de multiplicité m revient à dire $h(x^\star) = 0, h'(x^\star) = 0, h^{(m-1)}(x^\star) = 0$ et $h^{(m)}(x^\star) \neq 0$.
On pose $u(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

1. Montrer que $p = 0$ est un zéro de u de multiplicité 1.
2. Écrire la méthode de Newton appliquée à la résolution de $u(x) = 0$ comme un problème de point fixe. On notera $(x_n)_n$ la suite ainsi obtenue et G la fonction point fixe.
   On admettra dans ce qui suit que pour tout x dans $[-1, 1]$, $|G'(x)| \leq k$, avec $0 < k < 1$ et que $|G''(x)| \leq M$ avec $M > 0$.
3. À quelles conditions la suite $(x_n)_n$ converge-t-elle ? Dans ce qui suit on admet que $(x_n)_n$ converge vers p.
4. Montrer que $G'(p) = 0$.
5. Donner le développement de Taylor-Lagrange de G en p à l'ordre 2. Puis, montrer que
$$x_{n+1} = p + \frac{G''(\xi_n)}{2}(x_n - p)^2, \quad \text{avec } \xi_n \text{ entre } x_n \text{ et } p.$$
6. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1} - p|}{|x_n - p|^2}$. Quel est l'ordre de convergence de cette méthode ?
7. Montrer que pour $n \geq 1$, $|x_n - p| \leq (\frac{M}{2})^n |x_0 - p|^{2^n}$.
8. Combien d'itérations faut-il pour approcher la solution de $(\mathcal{P})$ à 10^{-6} près ? Commenter.

Exercice 5.[7 points] On rappelle que pour une matrice carrée d'ordre n, on a $\|\mathbb{A}\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

On considère la matrice $\mathbb{A}$ définie par :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la factorisation $\mathbb{LU}$ de $\mathbb{A}$ à l'aide de la méthode vue en cours.
2. En déduire la solution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$.

3. On perturbe le second membre de sorte que $\mathbf{b}_p = \begin{pmatrix} 32.01 \\ 22.99 \\ 33.01 \\ 30.99 \end{pmatrix}$. La solution de $\mathbb{A}\mathbf{x}_p = \mathbf{b}_p$ est $\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} 1.82 \\ 0.36 \\ 1.35 \\ 0.79 \end{pmatrix}$.

   L'inverse de $\mathbb{A}$ est

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a. Calculer $\mathrm{cond}_\infty(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\|_\infty \|\mathbb{A}^{-1}\|_\infty$.

   b. Calculer $\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$ et $\frac{\|\mathbf{b}-\mathbf{b}_p\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$. Qu'observez-vous ? Justifiez.
