Institut Galilée
Université Paris 13
Lundi 18 janvier 2016

---

Partiel de Mathématiques pour Ingénieur
Durée 3h. Sujet de 2 pages recto-verso.
**Les documents, les calculatrices programmables et les téléphones portables sont interdits**.
Les quatre exercices sont indépendants.
Le barème sur 40 points est donné à titre indicatif.

---

**Exercice 1.**[11 points] Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$. On cherche à approcher les racines de l'équation

$$f(x) = 0, \tag{$\mathcal{E}$}$$

à l'aide de la méthode de Newton.

1. Montrer que $-2$ et $1$ sont racines de l'équation $(\mathcal{E})$. Quelles sont leurs multiplicités ? En déduire une expression factorisée de $f(x)$.
2. Selon les théorèmes vus en cours, qu'attend-on comme convergence de la suite de Newton autour de ces racines ?

*Dans la suite de l'exercice nous allons démontrer ces résultats.*

3. Écrire la relation de récurrence liant deux itérés successifs de la méthode de Newton. Montrer que cette relation peut être écrite sous la forme $x_{n+1} = F(x_n)$ avec

$$F(x) = \frac{2x^2 - x + 2}{3x}.$$

(On pourra utiliser les résultats de la question 1).

Cas I : $x_0 > 0$.

4. Calculer $F(x) - 1$. En déduire que $x_n > 1$ pour tout $n \geqslant 1$. Si la suite $(x_n)$ est convergente, quelle est sa limite ? Justifier.
5. Démontrer l'inégalité $F(x_n) - 1 < x_n - 1$ pour $n \geqslant 1$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Que peut-on conclure sur la convergence de cette suite ?
6. Démontrer l'inégalité $x_{n+1} - 1 < \frac{2}{3}(x_n - 1)^2$ pour $n \geqslant 1$. En déduire l'ordre de convergence de la suite $(x_n)$.
7. Démontrer l'inégalité $x_{n+1} - 1 < \left(\frac{2}{3}\right)^{2^n - 1}(x_1 - 1)^{2^n}$ pour $n \geqslant 0$. Estimer le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir une approximation de la racine $x = 1$ à $10^{-10}$ près si on choisit $1 < x_0 < 2$ (on pourra utiliser les résultats de la question 4 pour montrer que $1 < x_1 < 2$ et on rappelle que $\ln 2 \approx -0.4$ et $\ln 10 \approx 2.3$).

Cas II : $x_0 < -2$ ou $-1/2 < x_0 < 0$.

8. Calculer $F(x) + 2$ et en déduire que $x_n < -2$ pour $n \geqslant 1$. Si la suite $(x_n)$ est convergente, quelle est sa limite ? Justifier.
9. Adapter le raisonnement utilisé dans les questions 5-6 pour démontrer la convergence de la suite $(x_n)$. Quel est son ordre de convergence ?

Cas III : $-2 < x_0 < -1/2$.

10. Montrer que $F\left(]-2, -1/2[\right) \subset ]-2, -5/3[$. En utilisant le théorème de point fixe, montrer la convergence de la suite $(x_n)$. Quelle est sa limite ?
11. En utilisant l'expression de $F(x) + 2$ trouvée dans la question 8, trouver l'ordre de convergence et le facteur asymptotique de convergence de la suite $(x_n)$.

**Corrigé.**

1. On a :
$$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = 0, \qquad f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 = 0,$$
ce qui montre que $-2$ et $1$ sont racines de l'équation $(\mathcal{E})$. Afin de trouver leurs multiplicités, calculons les dérivées première est seconde de $f$ :
$$f'(x) = 3x^2 + 6x, \qquad f''(x) = 4x.$$
On a :
$$f'(-2) = 3(-2)^2 + 6(-2) = 0, \qquad f''(-2) = 4(-2) = -8 \neq 0, \tag{1}$$
d'où la multiplicité de la racine $x = -2$ est $2$ (racine double). Pour la racine $x = 1$ on a :
$$f'(1) = 3(1)^2 + 6 \cdot 1 = 9 \neq 0,$$
d'où la multiplicité de cette racine est $1$ (racine simple). Cela permet de trouver une expression factorisée de $f(x)$ :
$$f(x) = (x+2)^2(x-1). \tag{2}$$
d'où la multiplicité de la racine $x = 1$ est 1.
2. La racine $x = 1$ étant simple, on s'attend à la convergence quadratique. La racine $x = -2$ étant double, on s'attend à la convergence linéaire.
3. Les itérés de la méthode de Newton sont donnés par la relation
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \geqslant 0.$$
En utilisant les relations $(2)$ et $(1)$ pour $f$ et $f'$, on trouve
$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n+2)^2(x_n-1)}{3x_n^2+6x_n} &= x_n - \frac{(x_n+2)^2(x_n-1)}{3x_n^2+6x_n} = x_n - \frac{(x_n+2)^2(x_n-1)}{3x_n(x_n+2)} \\ &= x_n - \frac{(x_n+2)(x_n-1)}{3x_n} = x_n - \frac{x_n^2+x_n-2}{3x_n} = \frac{2x_n^2-x_n+2}{3x_n} = F(x_n). \end{aligned}$$
4. On a
$$F(x) - 1 = \frac{2x^2-x+2}{3x} - 1 = \frac{2x^2-4x+2}{3x} = \frac{2(x-1)^2}{3x}. \tag{3}$$
En écrivant $x_{n+1} - 1 = F(x_n) - 1$, on trouve
$$x_{n+1} - 1 = \frac{2(x_n-1)^2}{3x_n}, \qquad \forall n \geqslant 0. \tag{4}$$
Montrons par récurrence que $x_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$.
Initialization : prenons $n = 0$ dans la relation $(4)$. On a :
$$x_1 - 1 = \frac{2(x_0-1)^2}{3x_0} \geqslant 0 \quad \text{car} \quad x_0 > 0, \quad \text{ce qui implique} \quad x_1 \geqslant 1.$$
Hérédité : supposons que $x_n \geqslant 1$. On déduit alors de la relation $(4)$ que $x_{n+1} - 1 \geqslant 0$ (car $x_n > 0$) et donc $x_{n+1} \geqslant 1$.
Si la suite $(x_n)$ est convergente de limite $\ell$, alors $\ell \geqslant 1$ (car $x_n \geqslant 1$ pour $n \geqslant 1$). Passons à la limite dans l'égalité $x_{n+1} = F(x_n)$ :
$$\ell = \frac{2\ell^2 - \ell + 2}{3\ell}, \tag{5}$$
d'où $\ell^2 + \ell - 2 = 0$. Cette équation admet deux solutions, $\ell_1 = 1$ et $\ell_2 = -2$. La solution $\ell_2 = -2$ ne vérifie pas la condition $\ell \geqslant 1$. On en déduit que $\ell = 1$.
5. Utilisons $(3)$ :
$$F(x_n) - 1 = \frac{2(x_n-1)^2}{3x_n} = \frac{2}{3}\frac{x_n-1}{x_n}(x_n-1) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{x_n}\right)(x_n-1). \tag{6}$$
D'après la question 4, $x_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$ et donc $x_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$. On a alors $1/x_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et, par conséquent, $1 - 1/x_n < 1$ pour tout $n \geqslant 1$. Cela permet de majorer le terme de droite dans $(6)$, le facteur $(x_n - 1)$ étant positif :
$$F(x_n) - 1 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{x_n}\right)(x_n-1) \leqslant \frac{2}{3}(x_n-1) \leqslant x_n - 1.$$

On a donc $F(x_n) - 1 \leqslant x_n - 1$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui est équivalent à $F(x_n) \leqslant x_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme $F(x_n) = x_{n+1}$, on trouve que $x_{n+1} \leqslant x_n$ pour tout $n \geqslant 1$. La suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est donc décroissante. Nous avons montré dans la question 4 qu'elle est minorée par $1$. Elle est donc convergente (car toute suite décroissante et minorée est convergente). D'après la question 4, cela implique que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

6. Reprenons la relation $(4)$. Nous avons montré dans la question 4 que $x_n \geqslant 1$ pour $n \geqslant 1$. Cela permet d'estimer le terme de droite :
$$x_{n+1} - 1 = \frac{2(x_n-1)^2}{3x_n} \leqslant \frac{2}{3}(x_n-1)^2, \qquad \forall n \geqslant 1. \tag{7}$$
L'ordre de convergence de la suite $(x_n)$ est donc au moins $2$.
(Remarquons que l'on peut montrer que l'ordre de convergence est exactement $2$. En effet, il suffit de diviser la relation $(4)$ par $(x_n-1)^2$ :
$$\frac{x_{n+1}-1}{(x_n-1)^2} = \frac{2}{3x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}.$$
Cela signifie que la suite $(x_n)$ converge à l'ordre $2$ et son facteur asymptotique de convergence est $2/3$).

7. Montrons par récurrence l'inégalité
$$x_{n+1} - 1 \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{2^n-1} (x_1-1)^{2^n}, \qquad n \geqslant 0. \tag{8}$$
Initialization : $n=0$. L'inégalité $(8)$ s'écrit alors
$$x_1 - 1 \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^0 (x_1-1)^1 = x_1 - 1.$$
On obtient donc une inégalité qui est vraie.
Hérédité : on suppose que l'inégalité $(8)$ est vraie pour $n$ et on cherche à la démontrer pour $n+1$. Utilisons l'inégalité $(7)$ avec $n$ remplacé par $n+1$ :
$$x_{n+2} - 1 \leqslant \frac{2}{3}(x_{n+1}-1)^2.$$
Utilisons l'inégalité $(8)$ qui est supposée vraie pour $n$ :
$$x_{n+2} - 1 \leqslant \frac{2}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2^n-1}(x_1-1)^{2^n}\right)^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2(2^n-1)}(x_1-1)^{2\cdot 2^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n+1}-1}(x_1-1)^{2^{n+1}}.$$
Ceci est exactement l'inégalité $(8)$ avec $n$ remplacé par $n+1$. L'inégalité $(8)$ est ainsi démontrée pour tout $n \geqslant 0$.
On suppose maintenant que $1 < x_0 < 2$. Montrons que cela implique $1 < x_1 < 2$. Nous avons vu dans la question 4 que
$$x_1 - 1 = \frac{2(x_0-1)^2}{3x_0}. \tag{9}$$
Si $1 < x_0 < 2$, on a
$$\frac{1}{2} < \frac{1}{x_0} < 1,$$
et
$$0 < (x_0-1)^2 < 1,$$
d'où, en multipliant les deux inégalités, on trouve
$$0 < \frac{(x_0-1)^2}{x_0} < 1.$$
En multipliant la dernière inégalité par $2/3$, on obtient
$$0 < \frac{2}{3}\frac{(x_0-1)^2}{x_0} < \frac{2}{3} < 1.$$
En comparant avec $(9)$, on conclut que
$$0 < x_1 - 1 < 1, \quad \text{d'où} \quad 1 < x_1 < 2.$$

L'estimation $(8)$ devient alors

$$x_{n+1}-1 \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{2^n-1}(x_1-1)^{2^n} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{2^n-1}, \qquad n \geqslant 0.$$

Compte tenu de l'inégalité $x_{n+1}-1 \geqslant 0$ (cf. question 4), on peut estimer la valeur absolue de l'erreur $x_{n+1}-1$ :

$$0 \leqslant x_{n+1}-1 \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{2^n-1}, \qquad n \geqslant 0.$$

d'où

$$|x_{n+1}-1| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{2^n-1}, \qquad n \geqslant 0.$$

Pour avoir $|x_{n+1}-1| \leqslant 10^{-10}$, il suffit d'imposer la condition

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2^n-1} \leqslant 10^{-10}.$$

On a alors

$$(2^n-1)\ln(2/3) \leqslant -10\ln 10.$$

En divisant cette inégalité par $\ln(2/3)$ (un nombre négatif), on obtient

$$2^n-1 \geqslant -\frac{10\ln 10}{\ln(2/3)}.$$

On trouve alors

$$2^n \geqslant 1-\frac{10\ln 10}{\ln(2/3)}, \quad \text{d'où} \quad n\ln 2 \geqslant \ln\left(1-\frac{10\ln 10}{\ln(2/3)}\right).$$

Finalement, la condition qui garantit $|x_{n+1}-1| < 10^{-10}$ est

$$n \geqslant \frac{\ln\left(1-\frac{10\ln 10}{\ln(2/3)}\right)}{\ln 2} \approx 5.85.$$

Il suffit donc de prendre $n \geqslant 6$. Le nombre d'itérations qui permet d'avoir une approximation de la racine à $10^{-10}$ près est 7 (car c'est l'erreur à la $(n+1)$-ème itération que l'on a majoré).

8. On a

$$F(x)+2 = \frac{2x^2-x+2}{3x}+2 = \frac{2x^2+5x+2}{3x} = \frac{2(x+\frac{1}{2})(x+2)}{3x}.$$

En écrivant $x_{n+1}+2 = F(x_n)+2$, on trouve

$$x_{n+1}+2 = \frac{2(x_n+\frac{1}{2})(x_n+2)}{3x_n}, \qquad \forall n \geqslant 0. \tag{10}$$

Montrons par récurrence que $x_n < -2$ pour tout $n \geqslant 1$.
Initialization : prenons $n=0$ dans la relation $(10)$. On a :

$$x_1+2 = \frac{2(x_0+\frac{1}{2})(x_0+2)}{3x_0} < 0 \quad \text{car} \quad x_0 \in ]-\infty,-2[\cup]-\tfrac{1}{2},0[,$$

ce qui implique $x_1 < -2$.
Hérédité : supposons que $x_n < -2$. On déduit alors de la relation $(10)$ que $x_{n+1}+2 < 0$ (car $x_n < -2$) et donc $x_{n+1} < -2$.
Si la suite $(x_n)$ est convergente de limite $\ell$, alors $\ell \leqslant -2$ (car $x_n \leqslant -2$ pour $n \geqslant 1$). On a vu dans la question 4 que $\ell$, étant solution de l'équation $(5)$, pouvait prendre deux valeurs : $1$ et $-2$. On conclut donc que $\ell = -2$.

9. Réécrivons la relation $(10)$ comme suit :

$$x_{n+1}+2 = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2x_n}\right)(x_n+2), \qquad \forall n \geqslant 0. \tag{11}$$

D'après la question 8, $x_n < -2$ pour tout $n \geqslant 1$ et donc $1/2x_n < 0$ pour tout $n \geqslant 1$. On a alors $1 + 1/2x_n < 1$ pour tout $n \geqslant 1$. Par conséquent,

$$\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2x_n}\right) < \frac{2}{3} \qquad \forall n \geqslant 1,$$

ou encore

$$\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2x_n}\right) < 1 \qquad \forall n \geqslant 1,$$

En multipliant la dernière inégalité par $(x_n+2)$ qui est un nombre négatif (car $x_n < -2$), on trouve

$$\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2x_n}\right)(x_n+2) > (x_n+2), \qquad \forall n \geqslant 1.$$

En comparant avec la relation (11), on conclut que $x_{n+1}+2 > x_n+2$ pour tout $n \geqslant 1$. La suite $(x_n)$ est donc croissante à partir du rang 1. Comme elle est majorée par $-2$, on en déduit que cette suite est convergente. D'après la question 8, cela implique que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -2$.

Pour trouver l'ordre de convergence de la suite $(x_n)$, il suffit de diviser la relation (11) par $x_n+2$ :

$$\frac{x_{n+1}+2}{x_n+2} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2x_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2\cdot(-2)}\right) = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que la suite $(x_n)$ converge à l'ordre 1 (et le facteur asymptotique de convergennce est $1/2$).

10. Calculons la dérivée de la fonction $F$ :

$$F'(x) = \frac{(4x-1)3x-(2x^2-x+2)\cdot 3}{(3x)^2} = \frac{6(x^2-1)}{9x^2} = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right). \tag{12}$$

La fonction $F$ est donc croissante sur $]-2,-1]$ ($F'$ est positive), décroissante sur $[-1,-1/2[$ ($F'$ est négative) et atteint son maximum en $-1$. On a

$$F(-1) = -5/3, \qquad F(-2) = -2, \qquad F(-1/2) = -2,$$

d'où $F\left(]-2,-1]\right) = [-2,-5/3[$ et $F\left([-1,-1/2[\right) = ]-2,-5/3]$. On en déduit que

$$F\left(]-2,-1/2[\right) = F\left(]-2,-1]\right) \cup F\left([-1,-1/2[\right) = ]-2,-5/3],$$

ce qui implique

$$F\left(]-2,-1/2[\right) \subset ]-2,-1/2[.$$

Afin de prouver que l'on peut utiliser le théorème de point fixe, il faut trouver une majoration de $F'$ qui est donnée par la formule (12). La fonction $1/x^2$ étant croissante sur $]-2,-1/2[$, la fonction $1-1/x^2$ est décroissante est donc $F'$ est décroissante sur $]-2,-1/2[$. Par conséquent, $F'$ peut être majorée par sa valeur en $-2$ :

$$F'(x) \leqslant F'(-2) = \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad -2 < x < -1/2.$$

L'intervalle $]-2,-1/2[$ étant stable par $F$ et la dérivée $F'$ étant majorée par un nombre strictement inférieur à 1 (en l'occurence, $1/2$), le théorème de point fixe peut être appliqué. On conclut que la suite $(x_n)$ est convergente. Notons $\ell$ sa limite. Nous avons montré dans la question 4 que $\ell$ vérifie l'équation (5) et peut donc prendre deux valeurs : $-2$ et 1. On sait par ailleurs que $x_{n+1} = F(x_n) \in ]-2,-1/2[$ pour tout $n \geqslant 0$, ce qui implique $\ell \in [-2,-1/2]$. On exclut donc la valeur $\ell = 1$ et on trouve $\ell = -2$.

11. On divise par $x_n+2$ la relation (10) :

$$\frac{x_{n+1}+2}{x_n+2} = \frac{2(x_n+\frac{1}{2})}{3x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

L'ordre de convergence de la suite $(x_n)$ est 1 et le facteur asymptotique de convergence est $1/2$.

---

**Exercice 2.**[10 points] On se propose d'étudier l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$ :

$$(1+e^x)y'' + 2e^x y' - y = xe^x. \tag{$\mathcal{E}_y$}$$

1. Soit $f$ l'unique solution de $(\mathcal{E}_y)$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Donner le développement limité de $f$ en 0 à l'ordre 2.
2. On fait le changement de fonction inconnue $z(x) = (1 + e^x)y(x)$. Montrer que $y$ est solution de $(\mathcal{E}_y)$ si et seulement si $z$ est solution de
$$z'' - z = xe^x. \tag{$\mathcal{E}_z$}$$
3. Chercher une solution particulière de $(\mathcal{E}_z)$ sous la forme $z(x) = (ax^2+bx+c)e^x$ puis donner l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_z)$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_y)$ et donner une expression de $f$.

**Corrigé.**

1. $f$ est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_y)$ donc $2f''(0) + 2f'(0) - f(0) = 0$. D'où $f''(0) = -1$. On en déduit le développement limité de $f$ en $0$ à l'ordre $2$ :
$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
2. On pose $z(x) = (1 + e^x)y(x)$. On a $z'(x) = e^x y(x) + (1 + e^x)y'(x)$ et $z''(x) = e^x y(x) + 2e^x y'(x) + (1 + e^x)y''(x)$. On en déduit que
$$z'' - z = (1 + e^x)y'' + 2e^x y' - y$$
d'où l'équivalence demandée.
3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $z(x) = (ax^2+bx+c)e^x$. On a $z''(x) = (ax^2+(4a+b)x+(2a+2b+c))e^x$ et donc $z''(x)-z(x) = (4ax + 2a + 2b)e^x$. On pose $z_p(x) = \frac{1}{4}x(x-1)e^x$, cette fonction correspond au choix $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$ et $c = 0$. D'après le calcul de $z'' - z$, $z_p$ est bien une solution particulière de $(\mathcal{E}_z)$, autrement dit $z_p'' - z_p = xe^x$.
Considérons maintenant le système homogène
$$z'' - z = 0$$
Le polynôme caractéristique associé est $P(X) = X^2 - 1$. Ses racines sont $1$ et $-1$. Les solutions de $z'' - z = 0$ sont donc les $x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$, où $A$ et $B$ sont deux constantes réelles.
Notons $E$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_z)$. D'après ce qui précède et le cours, on a
$$E = \{x \mapsto Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{4}x(x-1)e^x \mid A, B \in \mathbb{R}\}$$
4. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_y)$. Connaissant $E$, on en déduit que
$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \frac{1}{1+e^x}\left(Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{4}x(x-1)e^x\right) \mid A, B \in \mathbb{R}\}$$
Cherchons maintenant les constantes $A$ et $B$ correspondant à la solution $f$ introduite à la première question. En notant $f(x) = \frac{1}{1+e^x}\left(Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{4}x(x-1)e^x\right)$, l'équation $f(0) = 0$ s'écrit
$$\frac{1}{2}(A + B) = 0$$
d'où $A = -B$. D'autre part, dérivons l'expression
$$(1 + e^x)f(x) = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{4}x(x-1)e^x$$
pour obtenir
$$e^x f(x) + (1 + e^x)f'(x) = Ae^x - Be^{-x} + \frac{1}{4}(2x-1)e^x + \frac{1}{4}x(x-1)e^x$$
En $x = 0$, cette équation donne
$$2 = A - B - \frac{1}{4}$$
On en déduit que $A = \frac{9}{8}$ et $B = -\frac{9}{8}$. D'où
$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}\left(\frac{9}{8}\left(e^x - e^{-x}\right) + \frac{1}{4}x(x-1)e^x\right)$$

---

**Exercice 3.**[8 points] Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont on note $X_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, X_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ les vecteurs colonne. L'objectif de cet exercice est de montrer l'inégalité

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|X_i\|, \qquad (\mathcal{H})$$

avec $\|(x_1,...,x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

.............................................

*On rappelle que pour une matrice $S = (s_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ admettant une décomposition de Cholesky $H^T H$, avec $H$ une matrice triangulaire supérieure, on a*

$$h_{11} = \sqrt{a_{11}},$$

*et pour $i = 2, \ldots, n$,*

$$h_{ii} = \sqrt{\left(s_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ki}^2\right)}, \quad et \quad h_{ij} = \left(s_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ki}h_{kj}\right)/h_{ii}, \quad j = i+1, \ldots, n.$$

.............................................

1. Calculer le déterminant de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Calculer $\|X_1\|, \|X_2\|$ et $\|X_3\|$. En déduire que dans ce cas, l'inégalité $(\mathcal{H})$ est bien vérifiée.

*On s'attache désormais à montrer l'inégalité $(\mathcal{H})$ dans un cadre général.*

3. Vérifier l'inégalité $(\mathcal{H})$ lorsque $A$ n'est pas inversible.
4. On suppose désormais que $A$ est inversible. Montrer que la matrice $A^t A$ est symétrique définie positive.
5. En utilisant la décomposition $A^t A = T^t T$ de Cholesky de $A^t A$, avec $T = (t_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, montrer que $\det(A)^2 = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}^2$.
6. Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ telle que $M = A^t A$. Montrer que $t_{ii}^2 \leq m_{ii}$, et que $m_{ii} = \|X_i\|^2$.
7. En déduire que $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|X_i\|$.
8. Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si $T$ est une matrice diagonale.

*L'inégalité $(\mathcal{H})$ s'appelle l'inégalité d'Hadamard.*

**Corrigé.**

1. $\det(B) = 2$
2. On voit que $\|X_1\|$, $\|X_2\|$, $\|X_3\|$ valent respectivement $\sqrt{5}$, $3$ et $6$. On a donc bien l'inégalité $(\mathcal{H})$.
3. La norme d'un vecteur est toujours positive, en particulier l'inégalité $(\mathcal{H})$ est évidente lorsque $A$ n'est pas inversible (son déterminant est alors nul).
4. cf TD
5. On écrit $A^t A = T^t T$ la décomposition de Cholesky de la matrice $A^t A$ (on rappelle que $T$ est ici triangulaire supérieure).
   D'un côté $\det(A^t A) = \det(A)^2$ car le déterminant du matrice est égal à celui de sa transposée.
   De l'autre $\det(T^t T) = \det(T)^2$ pour les mêmes raisons, et $T$ étant triangulaire $\det(T) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$, d'où

$$\det(A)^2 = \det(T)^2 = \prod_{i=1}^{n} (t_{ii})^2.$$

6. On calcule $m_{ii}$ de deux manières différentes. D'une part on a $M = T^tT$, donc l'écriture de la formule produit de deux matrices donne
$$m_{ii} = \sum_{j=1}^{n}(T^t)_{ij}(T)_{ji} = \sum_{j=1}^{n} t_{ji}t_{ji} = t_{ii}^2 + \sum_{j\neq i} t_{ji}^2 \qquad (*)$$
et on a donc bien pour tout $i$ l'inégalité $m_{ii} \geq t_{ii}$. Le même raisonnement avec l'égalité $M = A^tA$ donne
$$m_{ii} = \sum_{j=1}^{n}(A^t)_{ij}(A)_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}a_{ji} = \|X_i\|^2$$

7. On voit par les questions 5 et 6 que
$$\det(A)^2 = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}^2 \leq \prod_{i=1}^{n} m_{ii} = \prod_{i=1}^{n} \|X_i\|^2 \qquad (**)$$
ce qui donne l'égalité $(\mathcal{H})$ après racine carrée.

8. On voit que $(\mathcal{H})$ devient une égalité si et seulement si la phrase $(**)$ est une suite d'égalités, autrement dit si et seulement si l'on a $m_{ii} = t_{ii}^2$ pour tout $i$. Par $(*)$ tout ceci est équivalent à la nullité de tous les $t_{ij}$ tels que $j \neq i$, c'est-à-dire $T$ est diagonale.

---

**Exercice 4.**[11 points] Dans cet exercice on s'intéresse à la résolution approchée du système différentiel ci-dessous sur l'intervalle $[0; 2]$
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad (\mathcal{S})$$
avec $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $x(t), y(t), z(t)$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour approcher la solution de $(\mathcal{S})$, on subdivise l'intervalle $[0; 2]$ en $N$ sous-intervalles $[t_i; t_{i+1}]$, $i = 0, N-1$, avec $t_0 = 0$ et $t_N = 2$. Ces sous-intervalles sont tous de même longueur $h$. Puis, on construit une suite $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ qui approche $\begin{pmatrix} x(t_n) \\ y(t_n) \\ z(t_n) \end{pmatrix}$.

I. **Méthode d'Euler explicite.** En intégrant numériquement chaque équation du système par la méthode du rectangle à gauche, on obtient, pour $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ donné, la suite ci-dessous.
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + h\,A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \qquad n \geq 0. \qquad (\mathcal{E}_{ex})$$

1. Calculer les trois premières itérées de la suite définie par $(\mathcal{E}_{ex})$ lorsque $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $h = 1$.

II. **Méthode d'Euler implicite.** En intégrant numériquement chaque équation du système par la méthode du rectangle à droite, on obtient, pour $\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \\ \tilde{z}_0 \end{pmatrix}$ donné, la suite ci-dessous.
$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \\ \tilde{z}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \\ \tilde{z}_n \end{pmatrix} + h\,A \begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \\ \tilde{z}_{n+1} \end{pmatrix}, \qquad n \geq 0. \qquad (\mathcal{E}_i)$$

1. Montrer que l'expression $(\mathcal{E}_i)$ s'écrit
$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \\ \tilde{z}_{n+1} \end{pmatrix} = \Big(I - hA\Big)^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \\ \tilde{z}_n \end{pmatrix},$$
où $I$ désigne la matrice identité dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.
2. Appliquer la factorisation $LU$ à la matrice $B = I - hA$ lorsque $h = 1$.
3. À l'aide de cette factorisation, résoudre les trois systèmes linéaires $Bw_i = e_i$, $i = 1, 2, 3$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. En déduire que $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 & 1/4 \\ -2 & 2 & -1/2 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$.
5. Calculer les deux premières itérées de la suite définie par $(\mathcal{E}_i)$ lorsque $\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \\ \tilde{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $h = 1$.
6. Dans le tableau ci-dessous sont reportées les valeurs de $e_{exp} = \left\| \begin{pmatrix} x(2) \\ y(2) \\ z(2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{pmatrix} \right\|$ et $e_{imp} = \left\| \begin{pmatrix} x(2) \\ y(2) \\ z(2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x}_N \\ \tilde{y}_N \\ \tilde{z}_N \end{pmatrix} \right\|$ pour différentes valeurs de $h$ et pour $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \\ \tilde{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Comparer les méthodes d'Euler explicite et implicite. Quels sont les avantages et inconvénients de ces deux méthodes ?

| $h$ | 1 | 0.5 | 0.1 | 0.05 |
|---|---|---|---|---|
| $e_{exp}$ | 6.2717905 | 0.5997937 | 0.0378048 | 0.019563 |
| $e_{imp}$ | 1.4685339 | 0.3164121 | 0.0436864 | 0.0210277 |

**Corrigé.** 1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -16 \end{pmatrix}$.

II.

1. L'expression $(\mathcal{E}_i)$ s'écrit $\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \\ \tilde{z}_{n+1} \end{pmatrix} - h\,A \begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \\ \tilde{z}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \\ \tilde{z}_n \end{pmatrix}, \qquad n \geq 0.$
Comme $det(I - hA) = h^3 + 4h^2 + 2h + 1 > 0$ puisque $0 \leq h \leq 2$, on déduit immédiatement l'égalité demandée.
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
En appliquant l'algorithme de Gauss à la matrice $B$ on obtient $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Résoudre $Bw_i = e_i$ revient à résoudre $Ly_i = e_i$ puis $Uw_i = y_i$. On obtient grâce à l'algorithme de substitution
$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$
4. On note que $B$ est inversible puisque $\det(B) = 4 \neq 0$. Par définition de la matrice inverse, on a $B^{-1}B = BB^{-1} = I$. Ce qui signifie que les vecteurs colonnes de $B^{-1}$ sont solution des systèmes $By_i = e_1$. Par la question précédente, on déduit immédiatement que l'inverse de $B$ est bien la matrice donnée.
5. On a $\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \\ \tilde{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7/4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \tilde{x}_3 \\ \tilde{y}_3 \\ \tilde{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -6 \\ 13/4 \end{pmatrix}$.

6. Lorsque $h$ est grand la méthode d'Euler implicite donne des résultats plus précis, mais nécessite d'inverser une matrice. Lorsque $h$ devient petit, la méthode d'Euler explicite donne des résultats plus précis, mais $h$ petit signifie qu'il faut faire plus d'itérations ...