Exercice 11. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

1. Dans la théorie des DL_n, on peut toujours se ramener au voisinage de 0 (i.e. un $\mathrm{DL}_n(0)$).
2. L'ordre d'un développement limité est le degré du polynôme P_n.
3. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$, il est unique.
4. f admet un $\mathrm{DL}_0(x_0) \iff f$ continue en x_0.
5. f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0) \iff f$ dérivable en x_0.
6. f admet un $\mathrm{DL}_2(x_0) \iff f$ deux fois dérivable en x_0.

Exercice 12. Calculer les limites ci-dessous.

$$\text{a)}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos(x)}{x^2} \qquad \text{b)}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2} \qquad \text{c)}\lim_{x\to 0}\big(1+\sin(x)\big)^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 13. Pour chacune des fonctions f suivantes : $f : x \mapsto \cos(x)$, $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$,

1. Écrire le développement limité d'ordre 5 de f en 0. Ce développement sera utilisé pour toutes les questions suivantes.
2. Écrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0^+ pour $f(\sqrt{x})$.
3. Écrire un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ pour $f(\mathrm{e}^{-x})$.
4. Écrire un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ pour $f(1/x)$.

Exercice 14.

1. Soit a et b deux réels. Donner le développement limité 'a l'ordre 4 en 0 de $g(x) = \ln\dfrac{1+ax}{1+bx}$.
2. Soit f la fonction définie, lorsque cela a un sens, par
$$f(x) = (3x^2+6x-10)\ln\frac{x+4}{x+2}.$$
Montrer qu'elle admet un développement asymptotique lorsque x tend vers l'infini, de la forme
$$f(x) = \alpha x + \beta + \gamma\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}),$$
où α, β et γ sont des réels non nuls.
3. En déduire la position de la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$ par rapport à ses asymptotes.

Exercices supplémentaires.

Exercice 15.

1. A., B. et P. ont developpé trois procédures de tri d'une suite $u_1, \ldots, u_n$ de n termes. La procedure développée et programmée par A. trie ce suite en $100 \times n^2$ millisecondes. La procédure développée et programmée par B. trie la suite en $10^{-5} \times 2^n$ millisecondes. L'algorithme de P. a besoin de $10^5 \times n\log n$ millisecondes pour la même opération. Quand n est trés grand, quelle procédure est la plus efficace ? (Indication : commencer par déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, ou $u_n = \frac{n^2}{2^n}$; examiner $\frac{u_{n+1}}{u_n}$).
2. Étudier la nature des suites suivantes et déterminez leur limites eventuelles :
$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+10^{200}n+\sqrt{n}+5}{6+2n^3}, \qquad 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1},$$
$$3)\ \lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) \text{ (Indication : poser } t_n := a^{\frac{1}{n}}-1 \text{ et considerer } t_n \to 0).$$
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. Indication : representer $n = (n^{\frac{1}{n}}-1+1)^n$ et montrer que $n > \frac{n(n-1)}{2}(n^{\frac{1}{n}}-1)^2$.
4. montrez que $v_n = o(u_n),\ w_n = o(v_n) \implies w_n = o(u_n)$.

5. trouvez un équivalent simple et la limite éventuelle des suites (u_n) définies par :

$$1)\ u_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}; \qquad 2)\ u_n = \tan\frac{1}{n}, \qquad 3)\ u_n = n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

6. En supposant que (u_n) admette une limite ℓ, où $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{a}{u_n^2}\right)$, et $u_0 \neq 0$, trouvez la limite ℓ de u_n.

Exercice 16.

1. Calculer les développements limités suivants au voisinage de 0
   à l'ordre 3
$$\sin(\ln(1+x)), \quad \ln(1+\sin x), \quad (1+2x-2x^2)^{\frac{1}{3}}, \quad \ln(1+x)+(1+x)^2, \quad e^{e^x}, \quad \frac{1-\cos x}{x\ln(1+x)},$$
   à l'ordre 4
$$e^x - \sqrt{1+x}, \quad (1+x)\sin x, \quad e^x \sin x, \quad \frac{\cos x}{1-x}, \quad \ln(1+x)+(1+x)^2,$$
   à l'ordre 5
$$\sin x + \cos x, \quad x^2 \sin x.$$
2. Calculer les limites suivantes.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x\tan x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x - 1 \right) \ln x.$$
3. Soit f la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x^2+2x+2)$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au voisinage de 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.