Exercice 1. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

1. Une suite (u_n) converge vers 0 si et seulement si la suite $(|u_n|)$ converge vers 0.
2. Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue en $\ell \in I$ et (u_n) une suite dont les termes sont dans I et convergeant vers ℓ. Alors la suite $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$. En particulier, si (u_n) est une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, alors la limite vérifie $\ell = f(\ell)$.
3. Si une suite (u_n) converge vers ℓ alors la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0.
4. Si la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0 alors la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.
5. Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite convergente de limite nulle. Alors la suite (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = u_n v_n$ est convergente de limite nulle.
6. Soit (u_n) une suite réelle convergente.
   (a) Si à partir d'un certain rang on a $u_n \geq 0$, alors nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.
   (b) Si à partir d'un certain rang on a $u_n > 0$, alors nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$.
7. Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang. Alors, si (u_n) et (w_n) sont convergentes de même limite ℓ, la suite (v_n) est convergente de limite ℓ.

Exercice 2. Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle.

a) $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$ b) $v_n = \left(\dfrac{n-x}{n+x}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$ c) $w_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$ d) $z_n = \cos\left((n + \dfrac{1}{n})\pi\right)$

Exercice 3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$ et (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Si la suite (u_n) converge, quelle est sa limite ? On note ℓ cette limite.
2. Soit $v_n = u_n - \ell$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, et en déduire la nature de la suite (u_n).
3. Application : on considère un carré de côté 1. On le partage en 9 carrés égaux, et on colorie le carré central. Puis, pour chaque carré non-colorié, on réitère le procédé. On note u_n l'aire hachurée après l'étape n. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 4.

1. Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. A-t-on : $(u_n)^2 + u_n \sim u_n^2$, $\;e^{(u_n)^2+u_n} \sim e^{(u_n)^2}$?
2. Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. A-t-on : $\cos u_n \sim 1 + u_n$, $\;\cos u_n - 1 \sim u_n$?
   Montrer que $\ln(1+u_n) \sim u_n$, $e^{u_n} - 1 \sim u_n$, $\frac{1}{1+u_n} \sim 1 - u_n$, $\sin(u_n) \sim u_n$, puis $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{(u_n)^2}{2}$.
3. Donner un équivalent simple et la limite éventuelle des suites (u_n) définies par :
$$u_n = \frac{n^4 - 2n^3 + 100}{3n^5 + 6}, \qquad u_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n + \sqrt{n}}, \qquad u_n = \ln(n^2 + n + 5) - \ln(n^2 - n + 3).$$

Exercice 5. Étudier la vitesse de convergence des suites $(u_n)_{n\geq 2}$ définies par : $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$, $\quad u_n = \dfrac{1}{n!}$, $\quad u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Exercice 6.

1. Soient p_n une suite convergent linéairement vers 0 et q_n une suite convergent quadratiquement vers 0 avec le même facteur asymptotique $\frac{1}{2}$. Pour simplifier, on suppose que $\dfrac{|p_{n+1}|}{|p_n|} \approx \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{|q_{n+1}|}{|q_n|} \approx \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.
   a) Montrer que $|p_n| \approx \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |p_0|$ et que $|q_n| \approx \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n-1} |q_0|^{2^n}$ pour tout $n \geq 1$.
   b) Lorsque $p_0 = q_0 = 1$, calculer p_i et q_i pour $i = 1, \cdots 4$. Commenter vos résultats.
2. Donner un exemple de suite convergent à l'ordre 3 vers 0.