Exercice 1.

1. Soit $\mathbf{A}$ une matrice de taille $n \times n$. Le vecteur $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est l'unique solution du système $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. Un système linéaire $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ peut avoir une infinité de solutions.
3. Si $\mathbf{A}$ n'est pas inversible, alors $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ n'a pas de solution.
4. Le conditionnement d'une matrice est strictement supérieur à 1 pour n'importe quelle norme subordonnée.

Exercice 2. Quelles conditions doivent vérifier a, b et c pour que le système suivant d'inconnues x, y et z admette une solution :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= a \\ 2x + 6y - 11z &= b \\ x - 2y + 7z &= c \end{cases}$$

Exercice 3. Supposons que les nombres sont représentés en virgule flottante dans une base décimale avec 3 chiffres significatifs et que le résultat des opérations est arrondi à 3 chiffres significatifs. Soit le système linéraire $\mathbf{A}x = b$ avec $b = \binom{1}{2}$ et

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre le système par la méthode de Gauss en choisissant comme premier pivot 10^{-4}.
2. Résoudre par la méthode de Gauss en choisissant la deuxième ligne pivot pour ligne pivot à la première étape. Commenter.

Exercice 4. Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\mathrm{cond}_1(\mathbf{A})$.
2. Résoudre $\mathbf{A}x_1 = b_1$ puis $\mathbf{A}x_2 = b_2$ avec $b_1 = \binom{100}{1}$ et $b_2 = \binom{100}{0}$.
3. Calculer $\frac{||x_1 - x_2||_1}{||x_1||_1}$ et $\frac{||b_1 - b_2||_1}{||b_1||_1}$.
4. Conclure.

Exercice 5. Pour chaque système ci-dessous calculer

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty, \quad \text{et} \quad \mathrm{cond}_\infty(\mathbf{A}) \frac{\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{x}}{\|\mathbf{A}\|_\infty},$$

où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ désignent respectivement la matrice et le second membre du système linéaire, et x et $\tilde{x}$ désignent respectivement la solution exacte et une solution approchée du système $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$.

a. $$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 &= \frac{1}{63}, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 &= \frac{1}{168}, \end{cases}$$
$x = \left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{6}\right)^t, \tilde{x} = (0.142, -0.166)^t.$

b. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 3, \\ 1.0001x_1 + 2x_2 &= 3.0001, \end{cases}$$
$x = (1, 1)^t, \tilde{x} = (0.96, 1.02)^t.$

Exercice 6. On considère le système linéaire $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.03 & 58.9 \\ 5.31 & -6.1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 59.2 \\ 47.0 \end{pmatrix}.$$

Supposons que les nombres sont représentés en virgule flottante dans une base décimale avec 3 chiffres significatifs et que le résultat des opérations est arrondi à 3 chiffres significatifs.

1. Appliquer la méthode de Gauss le système $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$. On note $\tilde{x}$ la solution obtenue.
2. Résoudre le système $\mathbf{A}x = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{x}$.
3. Sachant que la solution exacte est $(10, 1)^t$, commenter le résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 7. On considère la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -6 & -10 & -13 \\ -9 & -22 & -36 \end{pmatrix}$$

1. Trouver les matrices élémentaires E_1, E_2 de la méthode de Gauss.
2. Calculer le produit $E_2 E_1 \mathbf{A}$.

Exercice 8.

1. Donner la factorisation LU de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire la solution du système linéaire $\mathbf{A}x = b$ avec $b = (0, 2, -1, 5)^t$.
3. Sans calculer $\mathbf{A}^2$, résoudre le système linéaire $\mathbf{A}^2 x = b$

Exercice 9. On considère la matrice :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

1. Appliquer la factorisation LU à $\mathbf{A}$.
2. On introduit la matrice :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Appliquer la factorisation LU à la matrice $\mathbf{PA}$. Commenter.
3. En déduire que $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{LU}$ (P est appelée matrice de permutation).

Exercice 10. On considère la matrice :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 20 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que cette matrice est symétrique définie positive
2. Donner la factorisation de Cholesky de la matrice $\mathbf{A}$
3. En déduire le déterminant de $\mathbf{A}$
4. Calculer l'inverse de $\mathbf{A}$ en résolvant les trois systèmes $\mathbf{A}x = e_i$ pour $i = 1, 2, 3$, avec (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11. Soit $\mathbf{A}$ une matrice d'ordre n inversible.

1. Montrer que $\mathbf{A}^t.\mathbf{A}$ est symétrique définie positive.
2. En déduire une méthode permettant de résoudre le système linéaire $\mathbf{A}x = b$ en utilisant une factorisation de Cholesky.
3. Appliquer la question précédente avec $b = (1, 1, 1)^t$ et

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$