5.3 Rappels sur les équations différentielles

Définition 1

Une équation différentielle est une équation contenant une fonction inconnue et une ou plusieurs de ses dérivées.

$$a_m(t)y^{(m)}(t) + a_{m-1}(t)y^{(m-1)}(t) + \cdots + a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t) = 0, \tag{1}$$

avec $a_m, a_{m-1}, \cdots, a_1, a_0$ sont des fonctions réelles pouvant dépendre de x.

1. L'entier m est l'ordre de l'équation différentielle (ordre de la dérivée la plus élevée de y).
2. On dit qu'une fonction $u(t)$ est solution de l'équation différentielle (1) si son domaine de définition est un certain intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$, si elle est suffisamment dérivable sur $\mathcal{I}$, et si elle vérifie, pour tout x de $\mathcal{I}$,

$$a_m(t)u^{(m)}(t) + a_{m-1}(t)u^{(m-1)}(t) + \cdots + a_2(t)u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_0(t) = 0.$$

Résoudre l'équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions, définies sur un intervalle, qui satisfont l'équation (on dit aussi intégrer l'équation différentielle).

Quelques exemples

1. L'équation différentielle $y' = ay$, où a est une constante réelle modélise des situations très diverses, où la vitesse de variation d'une quantité est proportionnellle à cette même quantité :
   - La taille d'une population ayant un taux d'accroissement constant.
   - L'évolution d'un avoir placé à intérêts composés à taux fixe.
   - L'évolution de la masse d'une substance radio-active (dans ce cas, la constante a est négative ; elle dépend de la substance et de l'unité de temps choisie).
2. La seconde loi de Newton sur le mouvement d'une particule. L'inconnue est la fonction vectorielle $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. $x(t)$ représente la position de la particule à l'instant t. En notant m la masse de la particule et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une force agissant sur la particule,
$$mx''(t) = F(t, x(t)).$$
3. Le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra. On considère une population constituée de deux espèces : des proies et des prédateurs. L'évolution temporelle du nombre de proies $N_1(t)$ et du nombre prédateurs $N_2(t)$ peut-être décrite par le système
$$\begin{aligned} N_1'(t) &= (r_1 - \gamma_1 N_2)N_1 \\ N_2'(t) &= (-\gamma_2 + r_2 N_1)N_2, \end{aligned}$$
avec r_1 le taux de reproduction des proies γ_1, taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés ; r_2, taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées, et γ_2, taux de mortalité des prédateurs

4. Soit un corps ponctuel de masse m de température interne T situé dans un environnement de température constante T_e. Le transfert de chaleur entre le corps et l'extérieur peut être décrit par la loi de Stfan-Boltzmann
$$v(t) = \varepsilon\gamma S(T^4(t) - T_c^4),$$
où t est la variable désignant le temps, ε la constante de Boltzmann, γ la constante démissivité du corps, S sa surface et v la vitesse de transfert de chaleur. Le taux de variation de l'énergie $E(t) = mCT(t)$ (C est la capacité calorifique du corps) est égale $|v|$. Ainsi en posant $T(0) = T_0$ la calcul de $T(t)$ nécessite la résolution de l'équation différentielle $T'(t) = -\frac{v(t)}{mC}$, soit
$$T'(t) = -\frac{\varepsilon\gamma S(T^4(t) - T_c^4)}{mC}.$$

Dans tout ce qui suit on note p et m deux entier strictement positifs, $\mathcal{I}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $(\mathbb{R}^m)^{p+1}$ et $f : \mathcal{I} \times U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue.
On considère l'équation différentielle

$$y^{(p)} = f(t, y, y, y'', \cdots, y^{(p-1)}),\ (t, y) \in \mathcal{I} \times U, . \tag{E}$$

Définition 2

Une solution de l'équation différentielle (E) est une fonction $y : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^p$ telle que : $\quad \forall t \in \mathcal{I},\ y^{(p)}(t) = f(t, y, y, y'', \cdots, y^{(p-1)})$.

En général une équation différentielle possède une infinité de solutions.

On adjoint à un système de la forme (E) une condition initiale, c'est-à-dire que l'on fixe la valeur de y en un instant $t = t^0$.
Soit $t^0 \in \mathbb{R}$ et $y^0 = (y_1^0, \cdots, y_d^0) \in \mathbb{R}^d$, alors $y(t^0) = y^0$.

Définition 3

On appelle problème de Cauchy le problème

$$\left\{ \begin{array}{lcll} y^{(p)}(t) & = & f(t, y, y', y'', \cdots, y^{(p-1)}), & \quad t \in \mathcal{I}, \\ y(t^0) & = & y^0. & \end{array} \right. \tag{2}$$

Interprétation physique : Dans de nombreuses situations, la variable t représente le temps et $y = (y_1, \ldots, y_m)$ est une famille de paramètres décrivant l'état d'un système matériel donné. L'équation (2) traduit la loi d'évolution du système en fonction du temps et de la valeur des paramètres étant donnée une condition initiale.

Définition 4

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \qquad (\mathcal{P})$$

où a et b sont des fonctions continues de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1

Les solutions générales de $(\mathcal{P})$ sont toutes de la forme $y = y_p + z$ où y_p est une solution particulière de $(\mathcal{P})$ et où z est une solution du problème "sans second membre" associé :

$$z'(t) + a(t)z(t) \; = \; 0. \qquad (\mathcal{P}_S)$$

Méthode de variation de la constante

1. Résolution du problème "sans second membre" $(\mathcal{P}_S)$:

   Soit z une solution de $(\mathcal{P}_S)$ et soit A une primitive de a.

   - On pose $u(t) = \exp(A(t))z(t)$, on a alors

     $$u'(t) = \Big(z'(t) + a(t)z(t)\Big)\exp(A(t)) = 0.$$

     On en déduit que u est constante sur tout intervalle où elle est définie.
   - Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

     $$z(t) = \lambda \exp(-A(t)).$$

2. Recherche d'une solution particulière de $(\mathcal{P})$ par variation de la constante

- on cherche y_p sous la forme
$$y(t) = \lambda(t) \exp(-A(t)).$$
En remplaçant dans $(\mathcal{P})$, on obtient $\lambda'(t) = b(t) \exp(A(t))$.
- On note $G(t)$ une primitive de $b(t) \exp(A(t))$.
Une solution particulière de $(\mathcal{P})$ est alors donnée par $y_p(t) = \exp(-A(t))G(t)$.

La solution générale de $(\mathcal{P})$ est : $y(t) = e^{-A(t)} (\lambda + G(t))$.

Équations se ramenant à des équations linéaires

Equations à variables séparées.

Ce sont les équations qui peuvent se mettre sous la forme
$$y'(t)g(y(t)) = h(t). \tag{3}$$
Soit alors G une primitive de g et H une primitive de h. L'équation (3) s'écrit donc
$$\frac{d}{dt} G(y(t)) = \frac{d}{dt} H(t).$$
La fonction $t \mapsto G(y(t)) - H(t)$ est donc constante et il existe λ telle que
$$G(y(t)) = H(t) + \lambda.$$

Equations de Bernoulli

Ce sont les équations de la forme

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y^m(t),$$

où m est un réél non nul, et a et b sont des fonctions continues.

Remarques.

1) si $m > 0$: si y s'annule en un point de $\mathcal{I}$ alors $y(t) = 0$ est l'unique solution ;

2) si $m < 0$ alors l'équation n'est définie que si $y(t) \neq 0$.

On peut donc supposer que y ne s'annule pas. On pose alors

$$z(t) = y^{-m+1}(t).$$

Cette fonction vérifie l'équation différentielle **linéaire de degré 1**

$$z'(t) = -(m-1)(a(t)z + b(t)).$$

Quelques rappels de primitives

Soit C une constante, et u une fonction.

f	$u'u^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{u'}{u}$	$\frac{u'}{u^n},\ n \geq 2$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u'e^u$
Primitive de	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$	$\ln\lvert u\rvert + C$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C$	$2\sqrt{u} + C$	$e^u + C$

On s'intéresse aux équations du type suivant.

$$y'' = ay' + by \tag{4}$$

où a et b sont deux réels donnés.
Avant d'énoncer le résultat qui donne la solution générale de (4), commençons par chercher une solution sous la forme $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$.
En reportant dans (4), on peut simplifier par e^{rt} qui est toujours non nul. On obtient l'équation suivante en r :

$$r^2 = ar + b. \tag{$\mathcal{E}_{CA}$}$$

Définition 5

L'équation $(\mathcal{E}_{CA})$ porte le nom d'équation caractéristique associée à (4).

La solution générale de (4) s'exprime à l'aide des racines de $(\mathcal{E}_{CA})$.

Théorème 1

Soit E l'ensemble des solutions de (4), définies sur $\mathbb{R}$. L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Si l'équation caractéristique associée possède

- deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors :

$$E = \left\{t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 t},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\},$$

- une racine double r, alors :

$$E = \left\{t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{rt} + C_2 t \mathrm{e}^{rt},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\},$$

- deux racines complexes conjuguées $\alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\alpha - \mathrm{i}\beta$, alors :

$$E = \left\{t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mathrm{e}^{\alpha t} \sin(\beta t),\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exemples illustrant les trois cas.

équation	$(\mathcal{E}_{CA})$	racines	solution générale
$y" = y' + 6y$	$r^2 = r + 6$	$-2, 3$	$C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}$
$y" = -4y' - 4y$	$r^2 = -4r - 4$	$-2, -2$	$C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$
$y" = -4y' - 13y$	$r^2 = -4r - 13$	$-2 \pm 3i$	$C_1 e^{-2t} \cos(3t) + C_2 e^{-2t} \sin(3t)$

Équations différentielles d'ordre 2 avec second membre non nul

Dans cette section, nous ajoutons une fonction de la variable à l'équation du second ordre à coefficients constants de la section précédente.

$$y'' = ay' + by + h, \tag{5}$$

où a et b sont deux réels, et h est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: le second membre. Comme pour les équations linéaires du premier ordre, la solution générale de (5) s'obtient en ajoutant une solution particulière à l'équation sans second membre (4).

Théorème 2

Soit y_p une solution particulière de $y'' = ay' + by + h$. Soit (y_1, y_2) une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation sans second membre $y'' = ay' + by$. Alors, l'ensemble des solutions de $y'' = ay' + by + h$ est :

$$E = \left\{ C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p,\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

5.4 Trouver un développement limité à partir d'une équation différentielle

On considère le problème ci-dessous.

$$\left\{\begin{array}{ccll} y^{(m)}(t) & = & f(t, y, y', ..., y^{(p-1)}), & t \in]t_0, T] \\ y(t_0) & = & y_0^0, & \\ y'(t_0) & = & y_0^1, & \\ \vdots & & & \\ y^{(p-1)}(t_0) & = & y_0^{p-1}, & \end{array}\right.$$

où y_0^i, $i = 0, \cdots, p-1$ sont des réels donnés.
On suppose que le problème ci-dessus admet une unique solution et que sa solution admet un développement limité en $t^\star$ à l'ordre k. Autrement dit, on écrit

$$y(t) = a_0 + a_1(t - t^\star) + a_2(t - t^\star)^2 + \cdots + a_k(t - t^\star)^k + (t - t^\star)^k \varepsilon((t - t^\star)^k),$$

avec $\lim\limits_{t \to t^\star} \varepsilon((t - t^\star)^k) = 0$.
Le théorème de dérivation d'un développement limité (i.e. on peut dériver un DL terme à terme) permet de calculer $y^{(m)}(t)$. Ainsi en identifiant avec le second membre du problème et en utilisant les conditions initales on déduit le développement limité de y en $t^\star$ à l'ordre k.

Définition 6

On appelle **série entière** de la variable réelle toute série dont le terme général est de la forme $a_n x^n$.
$a_0, a_1, \cdots a_n, \cdots$ réels sont appelés coefficients de la série.

Remarques :

- Définir une série entière revient à déterminer la suite (a_n) de ses coefficients.
- La convergence d'une série entière dépend de la variable x.

Proposition 2 (Lemme d'Abel)

Soit (a_n) une suite. Si, pour un réel $r > 0$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée, alors pour tout $|x| < r$, la série numérique $\sum a_n x^n$ est absolument convergente.

Proposition 3

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Il existe un unique $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que

- si $|x| < R$ alors $(\sum u_n x^n)$ converge absolument,
- si $|x| > R$ alors $(\sum u_n x^n)$ diverge.

On appelle R le **rayon de convergence** de la série entière, et $(\{x \in \mathbb{R}, |x| < R\})$ l'intervalle ouvert de convergence.

Remarque : le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$ ne dépend que de la suite $(|a_n|)$.

Détermination pratique du rayon de convergence

Des règles de Cauchy et de d'Alembert sur les séries numériques on déduit :

Proposition 4

i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell \in [0, +\infty]$, alors $R = \frac{1}{\ell}$,

ii) On suppose qu'à partir d'un certain rang, les coefficients a_n sont non nuls.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \ell \in [0, +\infty]$ alors $R = \frac{1}{\ell}$,

avec la convention $R = +\infty$ si $\ell = 0$ et $R = 0$ si $\ell = +\infty$.

Exemple.

- La série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.
- La série entière $\sum \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ a pour rayon de convergence $R = 1$.
- La série entière $\sum \dfrac{n!}{(2n)!} x^n$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.
- La série entière $\sum \dfrac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} x^n$ a pour rayon de convergence $R = \frac{1}{8}$.

Définition 7

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un réel et $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que g est développable en série entière en x_0 sur $]x_0 - R, x_0 + R[$, si pour tout $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \ .$$

Cette identité est le développement en série entière de g.

Un changement de variable permet de se ramener à des développements en série entière en 0.

Proposition 5

La fonction g est développable en série entière en x_0 sur $]x_0 - R, x_0 + R[$, si et seulement si la fonction $f : x \longmapsto g(x_0 + x)$ est développable en série entière en 0 sur $]-R, R[$.

Le théorème suivant montre qu'une fonction développable en série entière, est indéfiniment dérivable. Ses dérivées successives sont également développables en série entière.

Théorème 3

Soit f une fonction développable en série entière, telle que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

La fonction f est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$. Sa dérivée est la somme de la série dérivée terme à terme, qui converge sur $]-R, R[$.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

Corollaire 1

Si f est développable en série entière sur $]-R, R[$, alors son développement est :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

Exemple. Considérons l'équation différentielle :

$$x(x^2+1)y'' + (x^2-1)y' = 1, \qquad (E)$$

Déterminer une solution de l'équation différentielle (E) développable en série entière. Quel est le rayon de convergence de cette série ?

5.6 Systèmes différentiels linéaires

Dans ce qui suit $\mathcal{I}$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n sur $\mathbb{R}$.

Quelques rappels

On définit l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $e^A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

Propriétés

1. $e^0 = I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.
2. Si $A = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Définition 8

Soit $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq m}$ une fonction continue de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B(t) = (b_i(t))_{1 \leq i \leq m}$ une fonction continue de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}^m$.
Un système différentiel linéaire du premier ordre dans $\mathbb{R}^m$ est une équation de la forme

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + B(t),$$

où $Y(t) = \left(y_1(t), \cdots, y_{m(t)}\right) \in \mathbb{R}^m$ est la fonction inconnue.

EXEMPLE. $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}$ est un système différentiel linéaire d'ordre un.

Représentation graphique.

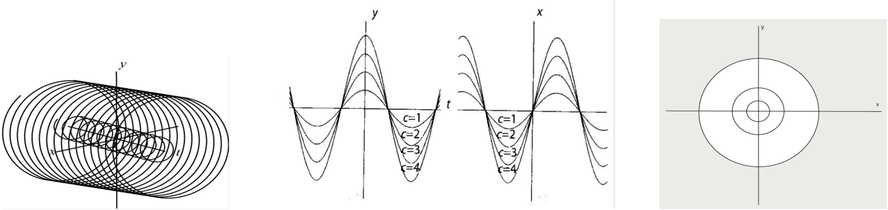


FIGURE: Gauche : Représentation de la solution dans $\mathbb{R}^3$; centre : représentation de $x(t)$ et $y(t)$: droite : représentation de la trajectoire $u(t), v(t)$.

5.7 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Ce sont les systèmes de la forme

$$\frac{dY}{dt} = Ay + B(t), \tag{6}$$

où la matrice A ne dépend pas de t.

Théorème 4

- La solution générale du système $\frac{dY}{dt} = Ay$ est $Y(t) = e^{At}V$ avec $V \in \mathbb{R}^n$.
- La solution du problème de Cauchy $\frac{dY}{dt} = Ay, \; Y(t^0) = Y^0$ est $Y(t) = e^{A(t-t^0)}Y^0$.

Théorème 5

Si A **est diagonalisable** la solution générale du système $\frac{dY}{dt} = Ay$ est donnée par

$$Y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \cdots + \alpha_m e^{\lambda_m t} V_m, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

où $(V_1, \ldots, V_m)$ est une base de vecteurs propre de $\mathbb{R}^m$ de valeurs propres respectives $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

1. Lorsque A est triangularisable et non diagonalisable on écrit $A = PTP^{-1}$ avec T une matrice triangulaire et P la matrice de passage et on effectue le changement de variable $Z(t) = P^{-1}Y(t)$.
2. Pour résoudre le système avec second membre (6) il suffit de trouver une solution particulière que l'on ajoute à la solution générale sans second membre.

Définition 9

1. Un système différentiel d'**ordre** p dans $\mathbb{R}^m$ est une équation de la forme

$$y^{(p)} = f(t, y, y, \ldots, y^{(p-1)}), \qquad (E)$$

où $f : U \to \mathbb{R}^m$ est une application continue définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^p$.

2. Une solution de cette équation sur un intervalle $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ est une application $y : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^m$ p-fois dérivable, telle que

   i) $\forall t \in \mathcal{I}, (t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(p-1)}(t)) \in U$,

   ii) $\forall t \in \mathcal{I}, y^{(p)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(p-1)}(t))$.

Dans le cas scalaire, posons pour $i = 0, \cdots, p-1$, $z_i(t) = y^{(i)}(t)$.
Alors y est solution de l'équation différentielle d'ordre p, (E), si et seulement si les fonctions $z_i, i = 0, \cdots, p-1$ sont solution du système à p équations différentielles **d'ordre 1** ci-dessous :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_0'(t) & = & z_1(t) \\ z_1'(t) & = & z_2(t) \\ \vdots & & \\ z_{p-2}' & = & z_{p-1} \\ z_{p-1}'(t) & = & f(t, z_0(t), z_1(t), \cdots, z_{p-1}(t)) \end{array}\right.$$

Théorème 6 (Régularité)

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, les solutions y sont de classe $\mathcal{C}^{k+p}$.

Existence et unicité

Théorème 7

Considérons un système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

dans lequel les fonctions f_i sont définies et continues sur un même domaine D de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et possèdent des dérivées partielles par rapport aux x_i qui sont continues sur D. Alors, si l'on se donne des réels $t_0, a_0, \cdots, a_n$ il existe une unique solution $(u_1(t), \cdots, u_n(t))$, définie sur un intervalle maximal contenant t_0, qui vérifie les conditions initiales $u_1(t_0) = a_1, \cdots, u_n(t_n) = a_n$.

5.8 Méthodes d'approximation des équations différentielles

Objectif : Etant donnée une fonction $f : [0, T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ on cherche à approcher la solution du problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)),\ t \in [0, T], \quad y(0) = y_0. \tag{7}$$

Principe :

- Subdiviser l'intervalle $[0, T]$ en N intervalles $[t_n, t_{n+1}]$, $n = 0, \ldots, N-1$. .
- Construire une suite (dépendant de N) de valeurs $w_0, w_1, \ldots w_N$ approchant $y(t_0), y(t_1), \ldots, y(t_N)$ respectivement.

  Ainsi, l'ensemble des valeurs $\{w_0 = y_0, w_1, \cdots, w_N\}$ représente la solution numérique.

Dans ce qui suit, nous supposons que les subdivisions sont de même longueur $h = T/N$.

5.8.1 Construction d'un schéma numérique à l'aide de quadratures numériques

En intégrant (7) sur $[t_n, t_{n+1}]$, on obtient

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))\mathrm{d}s.$$

On peut donc calculer $y(t_{n+1})$ connaissant $y(t_n)$ pourvu que l'on sache calculer l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))\mathrm{d}s$.

1. La méthode des rectangles à gauche conduit à approcher la solution de (7) par la suite (w_n) définie par

$$\begin{cases} w_0 = y_0 \\ w_{n+1} = w_n + hf(t_n, w_n), \;\; n \geq 0. \end{cases}$$

   Cette méthode est appelée schéma d'Euler explicite.

2. La méthode des rectangles à droite conduit à approcher la solution de (7) par la suite (w_n) définie par

$$\begin{cases} w_0 = y_0 \\ w_{n+1} = w_n + hf(t_{n+1}, w_{n+1}), \;\; n \geq 0. \end{cases}$$

   Cette méthode est appelée schéma d'Euler implicite.

   Comment résoudre un tel schéma ?

   À chaque itération il s'agit de résoudre l'équation non linéaire

$$w = \varphi(w), \quad \text{avec } \varphi(w) = w_n + hf(t_n, w).$$

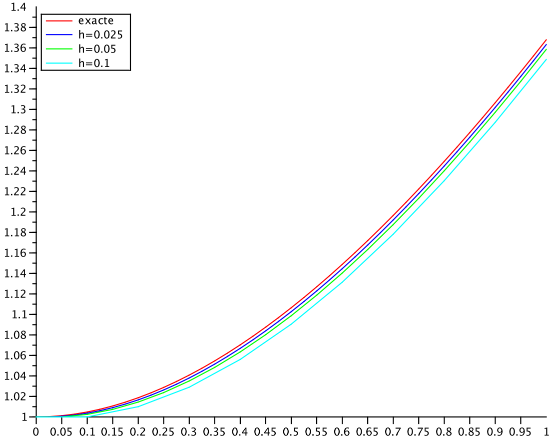
   Si φ est contractante, alors il existe un unique point fixe.

Les méthodes d'Euler explicite et implicite sont des méthodes à un pas car w_{n+1} dépend seulement de w_n (et de t_n).

Résolution approchée sur $[0, 1]$ de $y' = -y + t + 1$, $y(0) = 1$ par la méthode d'Euler explicite.
La solution exacte est : $y(t) = e^{-t} + t$.

t_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.8	0.9	1
$y(t_i)$	1	1.0048374	1.0187308	1.0408182	1.07032	1.1065307	1.249329	1.3065697	1.3678794
w_i	1	1	1.01	1.029	1.0561	1.09049	1.2304672	1.2874205	1.3486784
e_i	0	0.0048374	0.0087308	0.0118182	0.0142200	0.0160407	0.0188618	0.0191492	0.0192010

Solutions exacte et approchées pour $h = 0.1, 0.05, 0.025$



Définition 10

L'erreur de troncature locale au temps t_n, η_n, du schéma d'Euler explicite est définie par

$$\eta_n(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - f(t_n, y(t_n)).$$

L'erreur de troncature locale mesure la précision avec laquelle la solution exacte vérifie l'équation $w_{n+1} = w_n + h\, f(t_n, w_n)$.

Théorème 8

Supposons que $f\ :\ [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^m$ est continue et lipschitzienne, c-à-d qu'il existe une constante k telle que

$$\forall t \in I,\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^d, \quad \|f(t, z_1) - f(t, z_2)\| \leq k\|z_1 - z_2\|.$$

Supposons de plus qu'il existe une constante M telle que $|y''(t)| \leq M$. Alors pour $i = 1, \cdots, N$

$$|y(t_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L}\left(e^{k(t_i - t_0)} - 1\right).$$

5.8.2 Stabilité

Que se passe-t-il lorsque l'on se place sur l'intervalle $[0, +\infty[$?
Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) &= \lambda y(t), \qquad t \in [0, +\infty[\\ y(0) &= y_0, \end{cases} \tag{8}$$

avec $\lambda < 0$ donné. La solution exacte est $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$, et $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

- Schéma d'Euler explicite

$$\begin{cases} w_0 = y_0 \\ w_{n+1} = (1 + \lambda h) w_n, \ n \geq 0. \end{cases}$$

  et ainsi $w_{n+1} = (1 + \lambda h)^n w_0$ pour $n \geq 0$. Donc si $|1 + \lambda h| \geq 1$, alors $w_n \to +\infty$. Le schéma est alors dit instable.
  Si $h < \frac{-2}{\lambda}$, alors $w_n \to 0$. Le schéma est alors dit stable.
- Schéma d'Euler implicite

$$w_n = \left(\frac{1}{1 - \lambda h}\right) w_n \quad \text{et ainsi} \quad w_n = \left(\frac{1}{1 - \lambda h}\right)^n w_0.$$

  Il est clair que $w_n \to 0$ pour tout h, le schéma est inconditionnellement stable.