Objectif : Approcher une fonction dont on ne connaît les valeurs qu'en certains points.

- Lorsqu'une fonction connue analytiquement est difficile à évaluer, différencier ou intégrer par ordinateur.
- Lorsque l'on dispose d'un nombre fini de valeurs obtenues expérimentalement (étalonnage en métrologie, relevé de la température d'une réaction chimique au cours du temps, ...)

Pourquoi une approximation polynomiale ?

- Toute fonction continue peut-être approchée par un polynôme,

Théorème 1 (d'approximation de Weirstrass)

Supposons que f est définie et continue sur $[a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P(x)$ tel que :

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

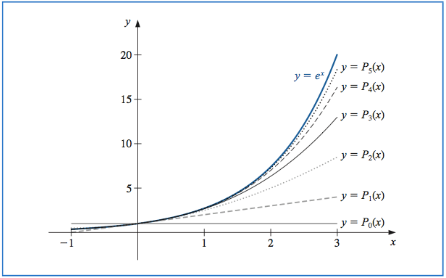
- Calculs de dérivées et d'intégrales de polynômes sont plus aisés.

2.1 Approximation d'une fonction par son polynôme de Taylor au voisinage d'un point

Le polynôme de Taylor de degré n en a de f est une approximation de f au voisinage de a. Si l'on sait estimer l'erreur R_n, on obtient la précision de l'approximation.

Exemple. Polynômes de Taylor de degré $n = 1, \cdots, 5$, de $f(x) = e^x$ au point 0.

$$P_1(x) = 1, \quad P_2(x) = 1 + x,$$
$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$
$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24},$$
$$P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}.$$



	$P_2(x)$	$P_4(x)$	$P_6(x)$	$P_8(x)$	$P_{10}(x)$	e^x
$x = 0.2$	1.220000	1.221400	1.221403	1.221403	1.221403	1.221403
$x = 3$	8.500000	16.375000	19.412500	20.009152	20.079665	20.085537

EXEMPLE. Polynômes de Taylor de degré n de $f(x) = \frac{1}{x}$ au point 1.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x-1)^k.$$

L'approximation de $f(3) = \frac{1}{3}$ à l'aide de $P_n(x)$ conduit à :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$P_n(3)$	1	-1	3	-5	11	-21	43	-85

- Le polynôme de Taylor donne une approximation précise d'une fonction en un point spécifique.
- Comment obtenir une approximation sur l'intervalle tout entier ?

Formulation mathématique : étant donnés $(n+1)$ couples (x_i, y_i) le problème consiste à trouver une fonction $\Phi(x)$ telle que

$$\Phi(x_i) = y_i, \ i = 1, \ldots, m,$$

où les y_i sont donnés. On dit alors que Φ interpole $\{y_i\}_i$ aux nœuds $\{x_i\}_i$.

- Lorsque Φ est un polynôme on parle d'interpolation polynomiale.
- Lorsque Φ est un polynomiale par morceaux on parle d'interpolation polynomiale par morceaux (ou d'interpolation par fonctions splines).
- Lorsque Φ est un polynôme trigonométrique on parle d'interpolation trigonométrique.

Soient $(n+1)$ couples (x_i, y_i). On cherche un polynôme Π_m de degré inférieur ou égal à m tel que

$$\Pi_m(x_i) = a_m x_i^m + \cdots + a_1 x_i + a_0 = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Définition 1

- Le polynôme Π_m est appelé polynôme d'interpolation (ou polynôme interpolant).
- Les points x_i sont appelés nœuds d'interpolation.

Notation : Lorsque $y_i = f(x_i)$, f étant une fonction donnée, le polynôme d'interpolation $\Pi_n(x)$ est noté $\Pi_n f(x)$.

Dans tout ce qui suit on considèrera le cas $n = m$.

Théorème 2 (Existence et unicité)

Etant donné $(n+1)$ points distincts $x_0, \ldots, x_n$ et $(n+1)$ valeurs correspondantes $y_0, \ldots, y_n$, il existe un unique polynôme Π_n de degré inférieur ou égal à n tel que $\Pi_n(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \ldots n$.

Comment trouver un tel polynôme ?

1. Méthode générale : Remplacer les coordonnées des points dans l'expression du polynôme et résoudre le système linéaire.
   - Procédure coûteuse.
   - Systèmes mal conditionnés.
2. Méthodes ad hoc :
   1. Méthode de Lagrange.
   2. Méthode de Newton.
      - Même polynôme que par la méthode de Lagrange.
      - Coût de calcul moins élevé que par la méthode de Lagrange.
   3. Méthode de Hermite
   4. ...

Définition 2

On appelle polynômes caractéristiques de Lagrange les polynômes ℓ_i définis pour $i = 0, \ldots, n$ par

$$\ell_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Notation. Soient $u_1, u_2, \cdots, u_N$, N réels. On note le produit $u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_N$ par : $\prod_{i=1}^{N} u_i$.
Ainsi, les polynômes caractéristiques de Lagrange s'écrivent :

$$\ell_0(x) = \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_i)\cdots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\cdots(x_0 - x_i)\cdots(x_0 - x_n)},$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\cdots(x - x_i)\cdots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_i)\cdots(x_1 - x_n)},$$

$$\ell_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)},\ i \neq, 0, 1, n$$

$$\ell_n(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_i)\cdots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_i)\cdots(x_n - x_{n-1})}.$$

Les polynômes caractéristiques de Lagrange :

- sont de degré n,
- sont tels que $\ell_i(x_i) = 1, i = 0, \ldots n$ et $\ell_i(x_j) = 0$ pour tout $j \neq i$.

Proposition 1

Les polynômes caractéristiques $\{\ell_i\}_{i=0,\ldots,n}$ forment une base de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Ainsi,

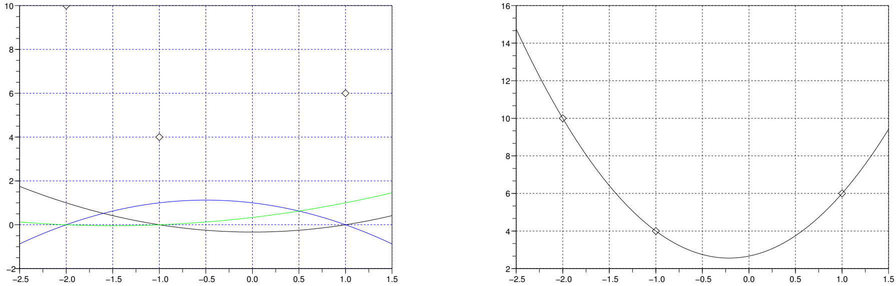
Théorème 3

Le polynôme interpolant $\{y_i\}_{i=0,\ldots,n}$ aux nœuds $\{x_i\}_{i=0,\ldots n}$ dans la base $\{\ell_i\}_{i=0,\ldots,n}$ s'écrit

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x).$$

Ce polynôme est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange.

EXEMPLE. Déterminer le polynôme de Lagrange interpolant les points $y_0 = 10, y_1 = 4$ et $y_2 = 6$ aux nœuds $x_0 = -2, x_1 = -1$ et $x_2 = 1$.



À gauche, *Polynômes caractéristiques de Lagrange,* ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2, à droite *Polynôme d'interpolation de Lagrange* Π_2.

EXEMPLE. Soient $f(x) = \cos(x)$ et $q_0 = (0, 1), q_1 = (\pi/16, \cos(\pi/16))$ et $q_2 = (\pi/8, \cos(\pi/8))$.

1. Calculer le polynôme d'interpolation de f passant par ces 3 points et en déduire une approximation de $\cos(\pi/32)$.
2. Calculer le développement de Taylor de f de degré 2 de la fonction $f(x) = \cos(x)$ au voisinage de 0 et en déduire une approximation de $\cos(\pi/32)$.

Définition 3

On appelle polynôme nodal de degré $(n+1)$ le polynôme défini par $\omega_0 = 1$

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n), \ n \geq 0.$$

Théorème 4

Soient $x_0, \dots, x_n$, $(n+1)$ nœuds distincts et x un point appartenant au domaine de définition de f. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I_x)$, où I_x est le plus petit intervalle contenant les nœuds $x_0, \dots, x_n$ et le point x. Alors, l'erreur d'interpolation au point x est donnée par :

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \qquad \text{avec } \xi \in I_x.$$

Exemple. Soit la fonction $f(x) = 2xe^{-(4x+2)}$ définie sur l'intervalle $[0.2, 1]$.

1. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange interpolant f aux nœuds $x = 0,2$ et $x = 1$.
2. Pour quelle valeur de $x \in [0.2, 1]$ l'erreur d'interpolation $|E_2(x)|$ est-elle maximale ?

Objectif : Etant données $(n+1)$ paires $(x_i, y_i), i = 0, \ldots n$, écrire Π_n tel que

$$\Pi_n(x) = \Pi_{n-1}(x) + q_n(x),$$

où q_n est un polynôme de degré n ne dépendant que des nœuds x_i et d'un seul coefficient inconnu.
Alors :

$$q_n(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) = a_n \omega_n(x),$$

avec $a_0, \cdots, a_n$ des réels.
Puisque $q_n(x_i) = \Pi_n(x_i) - \Pi_{n-1}(x_i) = 0$ pour $i = 0, \cdots, n-1$, on a nécessairement

$$q_n(x) = a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) = a_n \omega_n(x).$$

Pour déterminer le coefficient a_n, supposons que $y_i = f(x_i), i = 0, \cdots, n$, où f est une fonction donnée, pas nécessairement sous forme explicite. Puisque $\Pi_n f(x_n) = f(x_n)$, on déduit que

$$a_n = \frac{f(x_n) - \Pi_{n-1} f(x_n)}{\omega_n(x_n)}.$$

Définition 4

Le coefficient a_n est appelé *n-ème différence divisée de Newton* et est souvent noté

$$a_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

Proposition 2

Les polynômes nodaux $\{\omega_i\}_{i=0,\ldots,n}$ forment une base de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Théorème 5

En posant $y_0 = f(x_0) = f[x_0]$, et $\omega_0 = 1$, on a

$$\Pi_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k(x) f[x_0, \ldots, x_k].$$

Cette expression est appelée formule des différences divisées de Newton du polynôme d'interpolation.

REMARQUE. Par unicité du polynôme d'interpolation cette expression définit le même polynôme que la formule de Lagrange.

Propriétés

1. La valeur prise par la différence divisée est invariante par permutation des nœuds.
2. On a la formule de récurrence suivante :

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, n \geq 1.$$

Des propriétés ci-dessus on peut déduire le *tableau des différences divisées* :

x	$f(x)$	1ère diff. divisées	2ème diff. divisées		$n$ème diff. divisées
x_0	$f[x_0]$				
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	
x_n	$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\ldots$	$f[x_0, \ldots, x_n]$

Remarque.

- Pour $n+1$ points il est nécessaire de calculer une matrice triangulaire inférieure de taille n laquelle a $n(n+1)/2$ éléments différents de zéro.
- $n(n+1)$ additions et $n(n+1)/2$ divisions sont nécessaires pour construire la matrice triangulaire inférieure des différences divisées.
- Pour construire Π_{n+1} à partir de Π_n, $(n+1)$ divisions et $2(n+1)$ additions sont nécessaires. Ceci n'est pas le cas pour la méthode de Lagrange où il est nécessaire de répéter toute la procédure.

EXEMPLE.

- Étant donné trois points $(0,1),(2,5)$ et $(4,17)$, déterminer le polynôme d'interpolation passant par ces points.

- Soit f une fonction passant par les points $q_1=(0,3), q_2=(2,-1)$ et $q_3=(5,8)$.
  1. Donner la forme de Newton du polynôme d'interpolation de f passant par les points q_1, q_2 et q_3 et donner une approximation de $f(3)$.
  2. Sachant que $f(6)=7$, donner une approximation de l'erreur commise.
  3. On sait aussi que $f'(0)=6$. Calculer le polynôme d'interpolation de degré minimal passant par les points q_1, q_2 et q_3, dont la dérivée en $x=0$ est égale à 6.

- Une voiture roulant à 60km/h accélère au temps $t=0$s et sa vitesse v (en km/h) est mesurée régulièrement :

$t\,[s]$	0.0	0.7	1.4	2.1	2.8
$v\,[km/h]$	60	72.4	81.5	87.2	95.9

  1. À l'aide d'un polynôme d'interpolation de degré inférieur ou égal à 2, donner une approximation de la vitesse (en km/h) à $t=1.2$s.
  2. Donner l'expression analytique de l'erreur commise.
  3. Obtenir une approximation de cette erreur.