Objectif : Pour une fonction $f :]a, b[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on cherche $p \in]a, b[$ tel que

$$f(p) = 0.$$

Généralement la racine (le zéro) p ne peut être calculée explicitement.
On peut alors utiliser une méthode itérative pour approcher p.

Principe d'une méthode itérative : Construire une suite (x_k) telle que

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = p.$$

Définition 1 (Convergence)

On dit qu'une suite (x_k) construite par une méthode itérative converge vers p à l'ordre $q \geq 1$ si

$$\exists C > 0, \quad \frac{|x_{k+1} - p|}{|x_k - p|^q} \leq C, \quad \forall k \geq k_0,$$

avec $k_0 \in \mathbb{N}$. Le réel C est appelé facteur de convergence.

Remarques :

- Si $q = 1$ il est nécessaire que $C < 1$ pour que (x_n) converge vers p.
- Lorsque $q = 2$ on dit que la convergence est quadratique.

La convergence de ces méthodes dépend souvent du choix de la donnée initiale x_0.

Définition 2

- Lorsque la méthode converge pour un x_0 "suffisament proche" de p on dit que la méthode converge localement.
- Lorsque la méthode converge pour tout x_0 on dit que la méthode converge globalement.

Dans la pratique, on ne peut pas faire tendre k vers l'$+\infty$, il faut donc définir un ou plusieurs critères d'arrêt de la méthode itérative : On note $e_k = p - x_k$ l'erreur à l'itération k.

Exemples de critères d'arrêt :

- On se fixe une tolérance $\varepsilon > 0$ et on arrête les itérations s'arrêtent lorsque l'**incrément** devient "petit" : $|x_{m+1} - x_m| \leq \varepsilon$.
- On se fixe une tolérance $\varepsilon > 0$ et ainsi les itérations s'arrêtent lorsque $|f(x_m)| \leq \varepsilon$.
- Lorsque l'erreur $|e_m|$ peut-être majorée par un réel M (ne dépendant pas de la solution exacte), on se fixe une tolérance $\varepsilon > 0$ et ainsi les itérations s'arrêtent lorsque $|e_m| \leq M \leq \varepsilon$.
- On se donne un nombre maximal d'itérations.

4.1 Méthode de dichotomie ou de la bissection

Soit $\mathcal{I}_0 = [a, b]$ avec a et b tels que $f(a)f(b) < 0$ et f continue.
Alors par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(p) = 0$.

Principe : Construire une suite de sous-intervalles $\mathcal{I}_k = [a_k, b_k]$ tels que $\mathcal{I}_{k+1} \subset \mathcal{I}_k$ et $f(a_k)f(b_k) < 0$ encadrant la racine p.

Méthode : On pose $a^{(0)} = a, b^{(0)} = b$ et $x_0 = \dfrac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$ alors pour $k \geq 0$

$$\begin{array}{llllll} \text{Si} & f(x_k)f(a_k) < 0, & \text{on pose} & a_{k+1} = a_k, & \text{et} & b_{k+1} = x_k, \\ \text{Si} & f(x_k)f(b_k) < 0, & \text{on pose} & a_{k+1} = x_k, & \text{et} & b_{k+1} = b_k, \end{array}$$

et

$$x_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}.$$

Proposition 1 (Convergence)

- Pour tout $k \geq 0$, on a $|e_k| \leq \dfrac{b-a}{2^{k+1}}$.
- La méthode de dichotomie est globalement convergente.

$$\lim_{k \to +\infty} |e_k| = 0.$$

Propriété : La méthode de dichotomie permet de déterminer à l'avance le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la précision souhaitée, i.e. pour avoir $|x_m - p| \leq \varepsilon$ il faut prendre $m \geq \dfrac{\ln((b-a)/\varepsilon)}{\ln 2} - 1$.

Exemple : L'équation $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ a une racine dans $[1, 2]$ puisque $f(1) = -5$ et $f(2) = 14$. La racine est $p = 1.365230013$.

Résultats de la méthode de dichotomie où le critère d'arrêt est : $|e_m| \leq \varepsilon$.

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
1	1	2	1.5	2.375
2	1	1.5	1.25	-1.796875
3	1.25	1.5	1.375	0.1621094
4	1.25	1.375	1.3125	-0.8483887
5	1.3125	1.375	1.34375	-0.3509827
9	1.36328125	1.3671875	1.365234375	0.000072
10	1.36328125	1.365234375	1.364257813	-0.01605

Remarque : La méthode de dichotomie n'est pas une méthode d'ordre 1.

4.2 Méthode du point fixe

Définition 3

Pour une fonction Φ donnée on appelle point fixe d'une fonction Φ un réel p tel que $\Phi(p) = p$.

Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ le problème $f(x) = 0$ peut se mettre sous la forme $x - \Phi(x) = 0$ où $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est telle que $\Phi(p) = p$ lorsque $f(p) = 0$.
Réciproquement, si Φ a un point fixe en p, alors p est une racine de la fonction $f(x) = x - \Phi(x)$.

Exemple : La fonction $\Phi(x) = x^2 - 2$ a deux points fixes dans $[-2, 3]$: $x = -1$ et $x = 2$.

Principe de la méthode de point fixe.

Pour approcher le point fixe d'une fonction Φ :

- on choisit une approximation initiale x_0, puis
- on génère une suite (x_n) en posant $x_n = \Phi(x_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$.

Ainsi, si la suite (x_n) converge vers p et si Φ est continue alors

$$p = \lim_n x_n = \lim_n \Phi(x_{n-1}) = \Phi(p).$$

Cette technique est appelée itération de point fixe.

Exemple : Approchons la racine $p = 1.365230013$ de l'équation $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ dans $[1,2]$ par la méthode du point fixe.
Plusieurs choix possibles pour Φ :

a. $\Phi_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

b. $\Phi_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{\frac{1}{2}}$

c. $\Phi_3(x) = \frac{1}{2}\left(10 - x^3\right)^{\frac{1}{2}}$

d. $\Phi_4(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{\frac{1}{2}}$

e. $\Phi_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$

Valeurs obtenues de $x_{n+1}^i = \Phi(x_n^i)$ lorsque $x_0 = 1.5$ et le critère d'arrêt choisit est :
$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon = 10^{-8}$.

n	$\Phi_1(x_n^1)$	$\Phi_2(x_n^2)$	$\Phi_3(x_n^3)$	$\Phi_4(x_n^4)$	$\Phi_5(x_n^5)$
0	-0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	-469.7	"$(-8.65)^{\frac{1}{2}}$"	1.345458374	1.364957015	1.365230014
3	1.03×10^8		1.375170253	1.365264748	1.365230013
4			1.360094193	1.365225594	
14			1.365223680	1.365230013	
29			1.365230013		

Comment choisir Φ ?

Théorème 1 (point fixe)

1. Si $\Phi \in \mathcal{C}([a,b])$ et $\Phi(x) \in [a,b]$ pour tout $x \in [a,b]$, alors Φ a un point fixe dans $[a,b]$.
2. Si de plus, Φ' existe sur $]a,b[$ et s'il existe une constante $k < 1$ telle que
$$|\Phi'(x)| \leq k, \qquad \text{pour tout } x \in]a,b[,$$
alors le point fixe dans $[a,b]$ est unique.

Alors, pour tout réel x_0 dans $[a,b]$ la suite récurrente définie pour $n \geq 1$ par $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, converge vers l'unique point fixe, p, de Φ. De plus, on a

$$\lim_k \frac{x_{k+1} - p}{x_k - p} = \Phi'(p).$$

La quantité $|\Phi'(p)|$ est appelée facteur de convergence asymptotique.

Définition 4

Une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ est dite contractante lorsqu'il existe un réel $0 < k < 1$ tel que pour tous x, y dans $[a,b]$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Si f est dérivable sur $[a,b]$ et si $f'(x) < 1$ pour tout x dans$[a,b]$, alors f est contractante.

Proposition 2

La méthode du point fixe converge à l'ordre 1 lorsque $\Phi'(p) \neq 0$.

Que dire lorsque $\Phi'(p) = 0$?

Supposons que $\Phi \in \mathcal{C}^2([a,b])$ et qu'il existe $M > 0$ tel que $|\Phi''(x)| \leq M$ pour tout x dans $[a,b]$. Le développment de Taylor-Lagrange de Φ en p à l'ordre 1 conduit à :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi(p) + (x-p)\Phi'(p) + \frac{(x-p)^2}{2}\Phi''(\xi), \qquad \text{avec } \xi \text{ entre } x \text{ et } p\\ &= p + \frac{(x-p)^2}{2}\Phi''(\xi),\end{aligned}$$

d'où $|\Phi(x) - p| \leq \dfrac{M}{2}|x-p|^2$, et donc en prenant $x = x_n$ on obtient :

$$|x_{n+1} - p| \leq \frac{M}{2}|x_n - p|^2.$$

La suite (x_n) converge quadratiquement vers p.

Exercice. Montrer que $|x_{n+1} - p| \leq \dfrac{2}{M}\left(\dfrac{M}{2}(x_n - p)\right)^{2^{n+1}}$.

Remarques.

- Si $|\Phi'(p)| > 1$ et si x_n est proche de p avec $|\Phi'(x_n)| > 1$, alors par un développement de Taylor de Φ en p à l'ordre 1 on obtient que $|x_{n+1} - p| > |x_n - p|$. Il ne peut donc y avoir convergence de la méthode !
- Dans le cas où $|\Phi'(p)| = 1$, on ne peut en général tirer aucune conclusion : selon le problème considéré, il peut y avoir convergence ou divergence.

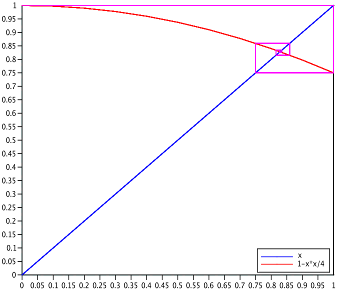
  Soit $\Phi(x) = x - x^3$ qui admet $p = 0$ comme point fixe. Bien que $\Phi'(p) = 1$, si $x_0 \in [-1, 1]$ alors $x_n \in]-1, 1[$ pour $n \geq 1$ et la suite converge (très lentement) vers p (en prenant $x_0 = \frac{1}{2}$, l'erreur absolue après 2000 itérations, $|x_{2000} - p|$, vaut 0.0158).
  Considérons maintenant $\Phi(x) = x + x^3$ qui a aussi $p = 0$ comme point fixe. À nouveau, $|\Phi'(p)| = 1$ mais dans ce cas la suite x_n diverge pour tout choix $x_0 \neq 0$.

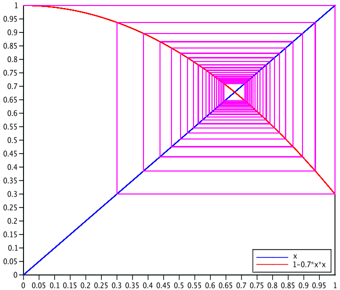
Définition 5

- Un point fixe p tel que $|\Phi'(p)| < 1$ est dit attractif.
- Un point fixe p tel que $|\Phi'(p)| > 1$ est dit répulsif.

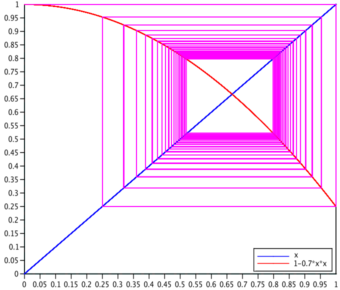
Exemple : Approchons la solution de $g(x) = 1 - \beta x^2$ sur $[-1, 1]$.

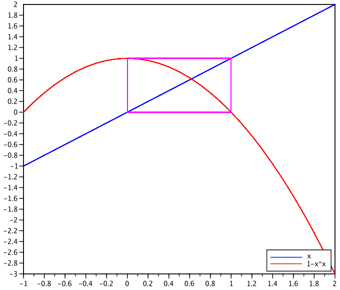
- Lorsque $0 \leq \beta \leq 2$, l'intervalle $[-1, 1]$ est stable par g , i.e. $g([-1, 1]) \subset [-1, 1]$.
- g est contractante lorsque $0 < a < \frac{1}{2}$.
- Lorsque $0 < \beta < 2$, $p = \frac{\sqrt{4\beta+1}-1}{2\beta}$ est un point fixe de g. Lorsque $\beta = 2$, g a deux points fixes dans $[-1, 1]$: -1 et $\frac{1}{2}$.
- p est un point fixe attractif lorsque $0 < \beta \leq \frac{3}{4}$.
- Les points fixes -1 et $\frac{1}{2}$ sont répulsifs.
- Lorsque $0 < \beta < \frac{1}{2}$, g est strictement contractante, ainsi par le théorème de point fixe, la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = g(x_n)$, x_0 donné, converge vers p.
- Lorsque $\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{3}{4}$, g n'est pas strictement contractante. Le théorème du point fixe ne peut s'appliquer. Les sous-suites $x_{2n+2} = g \circ g(x_{2n})$ et $x_{2n+1} = g \circ g(x_{2n-1})$ sont monotones et bornées donc convergentes. Elles convergent l'une et l'autre vers un point fixe de $g \circ g$, qui est aussi un point fixe de g.





- Lorsque $\beta = \frac{3}{4}$, $|g'(p)| = 1$. Dans ce cas, si l'on se réfère à la figure ci-dessous, la méthode de point fixe semble converger vers p *très lentement*.
- Lorsque $\beta > \frac{3}{4}$, le point fixe p est répulsif et la suite (x_n) ne converge pas, sauf si $x_0 = p$!





Dans la pratique, il est souvent difficile de déterminer a priori l'intervalle $[a, b]$ sur lequel Φ serait contractante.

Théorème 2 (d'Ostrowski)

Soit p un point fixe d'une fonction Φ continue et différentiable dans un voisinage J de p. Si $|\Phi'(p)| < 1$ alors il existe $\delta > 0$ tel que la suite (x_k) converge vers p pour tout x_0 tel que $|x_0 - p| < \delta$.

Proposition 3

Soient J un voisinage de p et q un entier supérieu ou égal à 1. Si $\Phi \in \mathcal{C}^{q+1}(J)$ et si $\Phi^i(p) = 0$ pour $1 \leq i \leq q$ et $\Phi^{q+1}(p) \neq 0$, alors la méthode de point fixe est d'ordre $q + 1$ et

$$\lim_k \frac{x_{k+1} - p}{(x_k - p)^{q+1}} = \frac{\Phi^{(q+1)}(p)}{(q+1)!}.$$

4.4 Méthode de Newton (Newton-Raphson ou de la tangente)

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ n'ayant qu'un seul zéro dans $[a, b]$.

On cherche à calculer de façon approchée ce zéro. L'idée est de remplacer la courbe représentative de f par sa tangente.

Approche géométrique.

- On se donne un point x_0 de l'intervalle $[a, b]$, et on considère la tangente à la courbe représentative de f en $(x_0, f(x_0))$.
- On note x_1 l'abscisse de l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses.
  Puisque la tangente est proche de la courbe, on peut espérer que x_1 donne une meilleure approximation d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ que x_0.
  On considère la tangente à la courbe représentative de f en $(x_1, f(x_1))$.
- On note x_2 l'abscisse de l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses.
  Puisque la tangente est proche de la courbe, on peut espérer que x_2 donne une meilleure approximation d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ que x_1.
- On recommence alors le procédé à partir de x_2, et on construit par récurrence une suite (x_n) définie par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \geq 0.$$

Approche par le calcul. Supposons $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Soit $\bar{x}$ une approximation de p telle que $f'(\bar{x}) \neq 0$ et $|\bar{x} - p| \ll 1$. Le développement de Taylor à l'ordre 1 de f en $\bar{x}$

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2} f"(\zeta_x), \text{ avec } \zeta_x \text{ compris entre } x \text{ et } \bar{x}.$$

conduit à

$$0 = f(p) = f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(p - \bar{x})^2}{2} f"(\zeta_p).$$

Comme $|\bar{x} - p| \ll 1$ on peut écrire

$$0 \approx f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}),$$

ainsi

$$p \approx \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}.$$

De cette expression, on construit par récurrence une suite (x_n) permettant d'approcher p : On se donne une donnée initiale x_0, et on définie la suite (x_n) par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \geq 0.$$

Proposition 4

La méthode de Newton est une méthode de point fixe où la fonction point fixe est :

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Théorème 3 (Convergence locale)

Soit p une racine de f. Supposons $f \in \mathcal{C}^2(]a, b[)$ et $f'(p) \neq 0$. Si la donnée initiale x_0 est assez proche de p, alors la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \geq 0,$$

converge vers p à l'ordre 2.

REMARQUE. Cette méthode nécessite le calcul à chaque itération de $f(x_n)$ et $f'(x_n)$.

Exemple : Approchons la racine de $f(x) = x^2 - 4$ dans $[-1, 3]$ avec la méthode de Newton.

n	x_n	x_n
0	0.5	-1
1	4.25	-2.5
2	2.5955882	-2.05
3	2.0683324	-2.0006098
4	2.0011288	-2.0000001
5	2.0000003	
6	2.	